ЯК зацікавити математикою

Методичні рекомендації

Міністерство освіти і науки України
Національна академія наук України
Національний центр «Мала академія наук України»

ЯК ЗАЦІКАВИТИ МАТЕМАТИКОЮ

Методичні рекомендації

Київ
Національний центр
«Мала академія наук України»
2025

УДК 374.015.31:51(477)(072)
Я44

Укладачі:
Катерина Терлецька — завідувачка лабораторії математичних наук Національного центру «Мала академія наук України», старша наукова співробітниця Інституту проблем математичних машин і систем Національної академії наук України, докторка фізико-математичних наук;
Марія Дружкова — співпрезидентка Natural Math Alliance, докторка філософії (PhD) у галузі математичної освіти;
Тетяна Шубін — почесна професорка Університету Сан-Хосе штату Каліфорнія, докторка філософії (PhD) з математики;
Катерина Антошина — методистка лабораторії математичних наук Національного центру «Мала академія наук України»;
Ірина Романюк — лаборантка лабораторії математичних наук Національного центру «Мала академія наук України»

Рекомендовано для використання в освітньому процесі рішенням науково-методичної ради Національного центру «Мала академія наук України» (протокол № 2 від 16.06.2025)

Як зацікавити математикою : методичні рекомендації / уклад.:
Я44 К. Терлецька, М. Дружкова, Т. Шубін та ін. — Київ : Національний центр «Мала академія наук України», 2025. — 124 с.
ISBN 978-617-8586-01-0

У виданні запропоновано форми роботи, спрямовані на залучення вихованців й учнів закладів загальної середньої та позашкільної освіти до більш детального вивчення математики, розвиток у них критичного мислення, аналітичних здібностей і творчих підходів до розв’язання нестандартних задач. Використано матеріали з досвіду роботи міжнародних інституцій щодо організації освітньої діяльності гуртків математики, які адаптовано до реалій нашої країни, приділено увагу сприйманню математики як універсальної мови, що поєднує народи й епохи.

Видання адресовано педагогам, які організовують роботу з учнями, вихованцями закладів загальної середньої та позашкільної освіти.

УДК 374.015.31:51(477)(072)

ISBN 978-617-8586-01-0

Зміст

Передмова

Дорогі друзі!

Математика — це мова Всесвіту, яка допомагає нам пізнавати закономірності світу, мислити критично та приймати виважені рішення. Сьогодні, коли світ стрімко змінюється, саме математична освіта стає фундаментом для розвитку інновацій, технологій і культури мислення майбутніх поколінь.

Видання, яке ви тримаєте в руках, є важливим кроком до того, щоб зробити математику ближчою і зрозумілішою. У ньому поєднуються наукова глибина, культурний контекст і практичні завдання, що допомагають учням відчути: математика живе поруч із нами — у традиціях, мистецтві, архітектурі, повсякденному житті.

Особливо цінно, що матеріали посібника розроблені на основі міжнародного досвіду й адаптовані до українських реалій. Це сприяє не лише формуванню математичних компетентностей, а й вихованню поваги до культурної спадщини, взаєморозумінню між народами й поколіннями.

Переконаний, що ця праця стане корисним інструментом для педагогів, які прагнуть зацікавити дітей математикою, та для учнів, котрі хочуть відкрити її як універсальну мову науки й творчості.

Бажаю всім, хто працюватиме із цим виданням, невичерпної енергії, натхнення та віри у власні сили. Адже математика — це ключ, який відкриває двері у майбутнє.

З повагою
Станіслав Довгий,
президент Малої академії наук України,
академік НАН і НАПН України,
доктор фізико-математичних наук,
професор

Вступ

Математика є невід’ємною частиною нашого життя, допомагає розуміти світобудову, аналізувати інформацію, ухвалювати обґрунтовані рішення. Проте вона часто сприймається як складна і не завжди близька до повсякденних проблем наука. Ось чому важливо зламати такі стереотипи, знайти способи, що допоможуть усвідомити важливість і необхідність застосування математики як засобу пізнання, саморозвитку й самовдосконалення. Методичні рекомендації «Як зацікавити математикою» розроблені саме для того, щоб не лише поглибити знання, а й сформувати розуміння математики як корисної та цікавої науки.

Отже, основна мета і завдання цього видання — зацікавити учнів, вихованців закладів загальної середньої та позашкільної освіти математикою, зробити акцент на її застосуванні у різних сферах життєдіяльності, сприяти розвитку математичної компетентності, розвивати критичне мислення, аналітичні здібності, творчий підхід до розв’язування задач, формувати навички комунікування.

Використання інтерактивних вправ, ігор під час виконання нестандартних і проблемних завдань надає можливість засвоїти, закріпити й перевірити знання, а також підтримати мотивацію, відчути задоволення від досягнення мети — розв’язання завдання — спільними зусиллями.

Матеріали розроблені з урахуванням бюлетенів математичних гуртків, робота яких започаткована американською організацією Alliance of Indigenous Math Circles (Марією Дружковою та Тетяною Шубін) для українських педагогів. Українські автори адаптували їх до вітчизняних реалій, доповнили порадами й коментарями педагогів, які застосовували досвід американських колег в організації освітнього процесу.

Різноманітні математичні ігри, вправи, проєкти, представлені у виданні, спрямовано на активне залучення учнів до вивчення математики з використанням цікавих і нестандартних завдань. Кожне заняття має мету і завдання, реалізація яких забезпечує формування математичних знань, умінь і навичок, опис активностей і напрями наукових досліджень. Наприклад, під час заняття «Ігри з трикутниками» можна поглибити знання з геометрії, дізнатися більше про історію та культуру, розвинути навички роботи в команді під час математичних ігор. Заняття «Геометрія будинків хоган» спрямоване на дослідження геометричних концепцій з використанням історичних даних і завдань, завдяки чому навчання стає інтерактивним і більш багатогранним.

У виданні розповідається про культуру і традиції корінних племен Америки, зокрема навахо, що робить його не лише математично насиченим, а й культурно-освітнім. У процесі вивчення математики учні, вихованці відкриватимуть захопливий світ знань різних народів, що передаються з покоління в покоління. Завдяки завданням й етноматематичним проєктам можна дізнатися про символічні значення геометричних форм, використання чисел і пропорцій в архітектурі й мистецтві, тісний зв’язок математичних понять, природи та космології — важливих елементів культури навахо. Це дає змогу розуміти математику в більш широкому контексті, осмислювати, як числові та геометричні принципи застосовуються для створення реальних об’єктів і використовуються в обрядах. Таке поєднання науки і культури народів світу робить навчання більш змістовним, викликає інтерес, вчить поважати культурне розмаїття, допомагає усвідомлювати математику як універсальну мову, що поєднує народи й епохи.

П’ять занять структуровано так, щоб забезпечити поступове ознайомлення учнів, вихованців з різноманітними математичними поняттями та їх застосуванням. На початку заняття пропонується повторення базових понять й означень, з якими ознайомлюються на уроках у школі. Зазначимо, що кожне заняття містить завдання, розв’язання яких неможливе без додаткових знань, вмінь, навичок і життєвого досвіду. Такі задачі сприяють розвитку критичного мислення та творчого підходу до розв’язання математичних проблем, стимулюють зацікавлення дослідженнями, а також доводять важливість практичного застосування математичних знань у реальному житті.

Усі заняття, крім основного матеріалу, передбачають проведення мінідосліджень, експериментів, виконання завдань із застосуванням знань з геометрії, теорії чисел, комбінаторики й інших розділів математики, що дає змогу розширити розуміння її законів і явищ. Надано рекомендації щодо роботи в групах, проведення дискусій та обговорення результатів для забезпечення інтелектуального розвитку й соціалізації учнів. Також до кожного заняття запропоновано теми дослідницьких робіт, які мають проблемно-орієнтований характер і можуть бути використані учнями, вихованцями у підготовці індивідуальних досліджень, зокрема, для участі у Всеукраїнському конкурсі-захисті науково-дослідницьких робіт учнів — членів Малої академії наук України. Ці роботи рекомендовано виконувати у супроводі наукового керівника, який сприятиме організації дослідження, а саме: розробленню плану, добору літератури, визначенню мети й завдань, формулюванню висновків тощо.

Для ефективного опрацювання збірника рекомендовано:

- використовувати матеріали відповідно до рівня підготовки учнів;
- враховувати інтереси учнів й адаптувати активності під їхні потреби;
- заохочувати учнів до самостійних досліджень і пошуку власних розв’язань задач;
- підтримувати атмосферу співпраці та взаємоповаги під час командних активностей.

Очікувані результати:

- посилення мотивації до вивчення математики;
- підвищення рівня володіння математичними компетентностями, аналітичним мисленням;
- застосування математичних знань для розв’язування завдань у повсякденному житті;
- володіння комунікативними і соціальними навичками.

Зміст видання спрямовано на інтеграцію математичних знань у життя кожного учня, вихованця і навчання сприймати математику як корисну й захопливу науку.

Розділ 1

ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ЗНАНЬ

1.1. Ігри з трикутниками

Мета:

- поглиблювати знання про геометричні властивості трикутників, їх застосування в різних контекстах і зв'язок між математикою та реальним світом;
- формувати навички аналізування та розв'язування задач, пов'язаних із площами, розрізанням геометричних фігур, побудовою стратегій у математичних іграх;
- навчати використовувати лему Шпернера для пояснення математичних явищ, розв'язування складних математичних задач;
- навчати застосовувати історичні, культурні знання для виявлення зв'язку математики з буденним життям;
- розширювати знання про культуру, традиції інших народів, історичну цінність ремесла плетіння кошиків помо.

Під час заняття в учнів формуються такі компетентності:

- застосування знань про геометричні властивості трикутників під час розв'язування задач;
- розв'язування задач на розрізання геометричних фігур (квадратів) на трикутники однакової площі;
- використання креативних підходів до пошуку рішень щодо визначення відношення між предметами у просторі, їхньої форми, положення;
- вибудовування стратегій та аналізу під час математичних ігор, зокрема гри «Трикутник».

Кошики помо є прикладом унікального ремесла, що розвивалося протягом століть серед корінного населення Північної Каліфорнії. *Помо* — це група індіанських народів, які історично проживали на території, що простягається від тихоокеанського узбережжя до внутрішніх долин, озера Клір і річки Рашен.

Помо створили багату культурну спадщину, частиною якої є мистецтво плетіння кошиків, відомих не лише самобутньою красою та витонченістю, а й функціональністю. Вони вважаються надзвичайно зручними завдяки високій майстерності поєднувати естетику з практичністю. Для виготовлення кошиків використовують різноманітні природні матеріали: вербову лозу, соснові голки, трави й кору червоного кедра. Їх ретельно обробляють і плетуть із візерунками, що часто мають символічне значення. Майстри плетіння кошиків помо володіють глибокими знаннями про довкілля і життя в гармонії з природою. Вони ретельно доглядають за землею, рослинами і тваринами, аби мати джерела сировини для свого ремесла. Знання про те, як збирати матеріали та зберігати їх для тривалого використання, коли найкращий час для збирання коренів, передавалися з покоління в покоління.

Кошики зазвичай виготовляли з міцних вербових прутів або очерету. Майстри вміло плели їх так, що кошики ставали надзвичайно міцними й водонепроникними. Дивовижно, але такі кошики використовували не тільки для зберігання речей, а й для приготування їжі — у них, як у справжніх горщиках, можна було варити супи й рагу на вогні! Крім практичної функції, кошики мали естетичну цінність. Майстри намагалися зробити їх красивими: прикрашали поверхню витонченими візерунками, що були пов’язані з природою та мали символічні елементи.

І нині кошики помо залишаються не лише об’єктами мистецтва, а й символом культури, що продовжує жити й розвиватися у сучасному світі.

Запитання для допитливих

- Яка характерна риса помітна в кошиках на рис. 1.1?
- Чи є на зображеннях спільні візерунки?

Рис. 1.1. Кошики помо

Особливістю дизайну багатьох таких кошиків є використання простих геометричних форм, зокрема трикутників. Усі три кошики на рис. 1.1 мають спільний елемент — трикутник, який є основним у багатьох орнаментах і символізує стабільність, зв'язок із природою, а також додає виробам особливої гармонії.

Для того щоб учні, вихованці могли успішно розв'язувати задачі, що стосуються елементів трикутника (висоти, медіани, бісектриси, середньої лінії, ортоцентра, центроїда тощо), а також розуміти поняття рівності трикутників, необхідно попередньо узагальнити й повторити основні теоретичні відомості з теми.

Зокрема, варто зосередити увагу на таких поняттях:

- означення трикутника, його вершин і сторін;
- висота, медіана, бісектриса, середня лінія трикутника;
- ортоцентр і центроїд;
- ознаки рівності трикутників.

Задача 1.1
Площа трикутника

Потрібно визначити, який із двох трикутників на рис. 1.2 має більшу площу: синій чи жовтий. Зверніть увагу на те, що BC і DE однакової довжини. Зокрема, зауважте, що у них є спільна вершина A, а також висота AH.

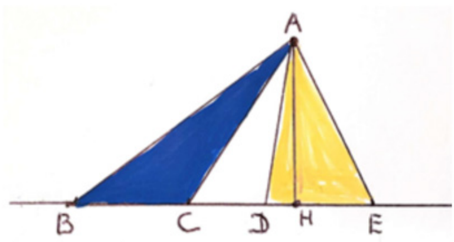


Рис. 1.2. Трикутники ABC і ADE

Розв'язання

Для розв'язання цієї задачі скористаємося формулою обчислення площі трикутника:

$$S = 1/2 \cdot \text{основа} \cdot \text{висота}.$$

Обидва трикутники мають однакову висоту AH, тому їхні площі залежать лише від довжини основ. Синій трикутник має основу BC. Жовтий — DE. За умовою задачі, довжини BC і DE є однаковими. Оскільки висоти трикутників також однакові (це висота AH), то площі трикутників будуть рівними. Відповідно синій і жовтий трикутники мають однакову площу.

Звичайно, це розв'язання правильне. Але є інший, більш візуальний спосіб побачити це (*рис. 1.3*). Можна розрізати трикутник на частини і переставити їх так, щоб вони утворили прямокутник, основа якого збігається з основою трикутника, а висота рівна половині висоти трикутника. Нагадаємо, що площа прямокутника дорівнює добутку його сторін.

Ось один із способів це зробити. Починаємо з трикутника ABC і робимо три кроки.

Крок 1. Ділимо висоту AH на два рівні відрізки точкою M, тоді $AM = MH$.

Крок 2. Через точку M проводимо пряму, паралельну до основи BC, щоб вона перетнула AB і AC у точках P і O відповідно.

Крок 3. Розрізаємо трикутник по прямій PO. Розташовуємо трикутник APO так, щоб точка A збіглася з точкою C, а відрізок AO наклався на CO (іншими словами, повертаємо трикутник AOP на кут $180°$ навколо вершини O). У такий спосіб ми перегрупували частини ABC й утворили паралелограм $PBCQ$. Він має таку саму площу, як трикутник ABC. Також він має ту ж саму основу BC і висоту, що дорівнює половині AH. Із точки P опустимо висоту PT на сторону BC. Відріжемо трикутник PBT і пересунемо його вздовж основи так, щоб його сторона PB наклалася на QC. Таким чином ми побудували прямокутник $PTSQ$. Він має таку ж саму площу, як трикутник ABC. Його основа TS дорівнює BC, а висота — рівно половині AH.

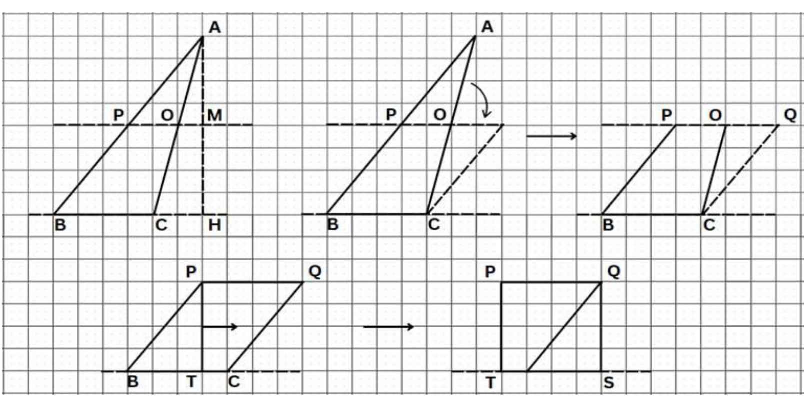


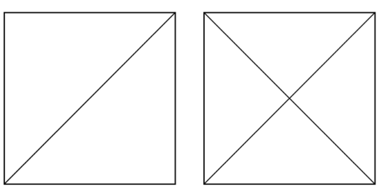
Рис. 1.3. Трансформація трикутника ABC у прямокутник $TSQP$

Задача 1.2
Розрізання квадрата на трикутники однакової площі

Розглянемо задачу на розрізання, яка, на перший погляд, не є складною. Завдання полягає у тому, щоб розрізати квадрат на різну кількість фігур однакової площі: 2, 4, 6 і 3 трикутники.

Розрізання квадрата на трикутники однакової площі — це захоплива задача, що дає змогу більш детально дізнатися про геометричні властивості фігур і відношення площ. Така задача розвиває просторове мислення і вміння аналізувати фігуру, шукаючи способи розділити її на рівні частини. Розглянемо приклади завдань.

Розрізання квадрата на 2 і 4 трикутники однакової площі. Найбільш простий спосіб — провести одну діагональ квадрата (*рис. 1.4 а*). Діагональ ділить квадрат на два рівнобедрені трикутники, які мають однакову площу, оскільки вони займають половини площі квадрата. У такий самий спосіб дві діагоналі квадрата розділяють його на 4 трикутники однакової площі (*рис. 1.4 б*).



а *б*

Рис. 1.4. Розрізання квадрата на трикутники однакової площі: *а*) на 2; *б*) на 4

Розрізання квадрата на 6 трикутників однакової площі. Таке завдання є більш складним і цікавим. Під час заняття можна запропонувати кілька способів його розв’язання (*рис. 1.5*).

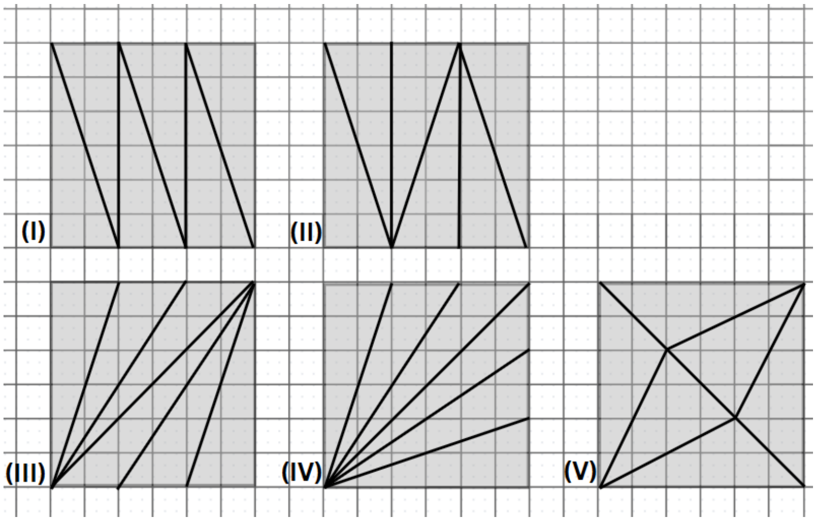


Рис. 1.5. Розрізання квадрата на 6 трикутників рівної площі різними способами

Зауважимо, що в (I) й (II) випадках усі (мінімальні) трикутники однакові, тоді як у розв'язаннях (III) — (V) трикутники мають рівні площі, але не є подібними (задача 1.1).

Блискучою математичною ідеєю є те, що аналогічний підхід можна застосувати для розділення квадрата на будь-яке парне число $2n$ трикутників однакової площі. Наприклад, квадрат можна поділити на n рівних прямокутників, а потім провести діагональ у кожному з них, як у випадках (I) чи (II). Інший спосіб — розділити дві протилежні (III) чи суміжні (IV) сторони квадрата на n рівних частин і з'єднати ці точки з двома (III) чи однією (IV) вершиною квадрата. Також можна провести діагональ, поділити її на n рівних відрізків і з'єднати кінці цих відрізків з двома протилежними вершинами квадрата (V).

Питання, над яким варто подумати, «Чи є інші способи розрізання квадрата?».

Розрізання квадрата на 3 трикутники однакової площі. Розрізати квадрат на непарну кількість трикутників однакової площі — завдання не з легких. Доведення неможливості такого розрізання є складним математичним результатом (див. [12]). Щоб це зробити, математик Пол Монскі скористався *лемою Шпернера*, про яку йтиметься далі.

Задача 1.3
Гра «Трикутник»

Гра «Трикутник» проводиться на полі у формі рівностороннього трикутника (*рис. 1.6*). Вершини трикутника позначені проти годинникової стрілки трьома кольорами, які для зручності назвемо 1, 2 і 3. Паралельно кожній стороні через трикутник проведено по три рівновіддалені лінії, які утворили 16 маленьких трикутників.

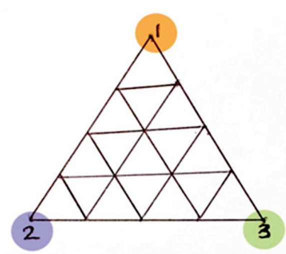


Рис. 1.6. Поле для гри «Трикутник»

Гра призначена для двох гравців, які по черзі позначають нерозмічені вершини фігури за такими правилами:

• вершина на стороні {1, 2} може бути позначена 1 або 2, але не 3;

• вершина на стороні {2, 3} може бути позначена 2 або 3, але не 1;

• вершина на стороні {3, 1} може бути позначена 3 або 1, але не 2;

• вершина всередині великого трикутника може бути позначена 1, 2 або 3.

Коли всі вершини пронумеровані, очки кожного з гравців підраховуються таким чином:

• рахунок першого гравця дорівнює кількості маленьких трикутників, які пронумеровані {1, 2, 3} проти годинникової стрілки;

• рахунок другого гравця дорівнює кількості маленьких трикутників, які пронумеровані {1, 2, 3} за годинниковою стрілкою;

• виграє гравець із більшим рахунком.

Питання для обговорення

- Чи можете ви визначити виграшну стратегію?
- Хто має більше шансів перемогти: перший чи другий гравець?
- Чи можлива нічия у цій грі?

Нижче наведені приклади двох ігор, зіграних на меншому полі (*рис. 1.7, 1.8*). У кожній з них розфарбовано всі маленькі {1, 2, 3} трикутники в синій чи жовтий колір для унаочнення руху проти та за годинниковою стрілкою відповідно. На рис. 1.7 показано, що кількість маленьких трикутників, які обходять проти годинникової стрілки, дорівнює 2, а кількість тих, що обходять за годинниковою стрілкою, дорівнює 1. Отже, рахунок першого гравця становить 2, а другого — 1.

На рис. 1.8 бачимо, що кількість трикутників проти годинникової стрілки дорівнює 1, а за годинниковою стрілкою — 0. Отже, перший гравець отримує 1 бал, а другий — 0.

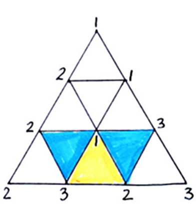


Рис. 1.7. Приклад гри 1: перший гравець має рахунок 2, а другий — 1

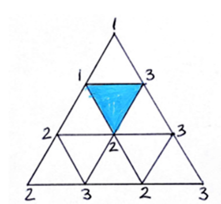


Рис. 1.8. Приклад гри 2: перший гравець має рахунок 1, а другий — 0

Можна спробувати змагатися один проти одного, по черзі обираючи вершину й число для нумерації цієї вершини.

Ось цікаві спостереження, які можна виявити під час гри:

- перший гравець завжди виграє;
- неможливо отримати нічию;
- перший гравець завжди має на 1 трикутник більше, ніж другий;
- загальна кількість малих трикутничків із вершинами {1, 2, 3} — непарна.

Гра «Трикутник» є ілюстрацією леми Шпернера. Такий математичний результат стверджує: «Якщо розмітити великий трикутник числами 1, 2 і 3 проти годинникової стрілки, то за правильного (як в умові гри) розмічання вершин довільної триангуляції трикутника завжди виникатиме маленький трикутник, розмічений так само, як і великий». Більше того, кількість трикутників із 1, 2, 3, що обходили проти годинникової стрілки, буде на 1 більшою за кількість трикутників із 1, 2, 3, що обходили за годинниковою стрілкою (*рис. 1.7, 1.8*).

Формулювання твердження леми Шпернера можна прочитати в «Rental harmony: Sperner's lemma in fair division» (Su, 1999). Наведемо стисло лему Шпернера: «Якщо ми поділимо трикутник (або іншу просту фігуру) на менші частини — наприклад, на менші трикутнички — і правильно підпишемо вершини (за певними простими правилами на краях), то *обов'язково* знайдеться хоча б один маленький трикутник, у якому є всі три позначки». Такий трикутник начебто «містить всю інформацію» про великий. Інтригуючим є те, що таких трикутників завжди буде *непарна кількість,* а отже, принаймні один точно буде. Існує багато різних доведень цієї леми (наприклад, див. [9]).

Тож тепер ми бачимо, що гра «Трикутник» недоброчесна — незалежно від дій гравців перший завжди виграє, навіть нічиєї бути не може! Лема Шпернера дійсно вражає. Зазначимо, що існує багато її застосувань. Зокрема, задача про розрізання квадрата й гіпотеза про те, що неможливо розрізати квадрат на непарну кількість трикутників однакової площі. Насправді математики здогадувалися про це вже давно, але не могли довести.

Лише в 1970-х роках було сформульовано доведення, що ґрунтувалося на лемі Шпернера.

Іншим вражаючим прикладом є те, що лема Шпернера еквівалентна теоремі Брауера про нерухому точку — фундаментальному результату алгебраїчної топології, сформульованому й доведеному голландським математиком Лейтзеном Егбертом Яном Брауером у 1912 році.

Ця теорема стверджує, що будь-яке неперервне відображення компактного опуклого простору в себе має хоча б одну нерухому точку, тобто таку, яка не змінює свого положення після застосування відображення. Інтуїтивно неможливо «перемалювати» простір усередині самого себе так, щоб усі точки пересунулися, — принаймні одна обов'язково залишиться на місці.

У найпростішому, одновимірному випадку теорема Брауера зводиться до теореми про середнє значення — класичного результату математичного аналізу, що також гарантує існування однієї особливої точки.

Щоб краще зрозуміти це твердження, уявімо просту ситуацію: у вашій чашці налита кава. Ви починаєте повільно її помішувати. Рідина закручується, утворюючи вир, але тільки-но ви припиняєте помішування — кава припиняє рухатися. Незалежно від того, як саме ви її помішували, завжди знайдеться хоча б одна молекула, яка повернулася саме в ту точку, де була до початку руху. Можливо, вона рухалася складною траєкторією, але зрештою опинилася на своєму місці.

Як це стосується інших задач?

Зазначені математичні концепції мають безліч застосувань:

- розроблення тривимірних моделей у комп'ютерній графіці;
- розв'язання задач оптимізації;
- описування рівноважних станів систем у фізиці;
- знаходження стратегій рівноваги в теорії ігор.

Теорема Брауера про нерухому точку є прикладом того, як складні математичні ідеї можна виявити у звичайних життєвих ситуаціях, навіть коли п'ємо каву.

Теми дослідницьких робіт

• *Лема Шпернера та її комбінаторні застосування.*

Дослідити використання леми Шпернера для доведення існування деяких конфігурацій у триангуляціях; розробити власні приклади ігрових задач чи візуалізацій, що ілюструють цю лему.

• *Теореми про нерухому точку: від одновимірних випадків до багатовимірних узагальнень.*

Дослідити зв'язок теореми Брауера з лемою Шпернера та іншими топологічними результатами; підготувати демонстрації на реальних чи ігрових прикладах, що ілюструють існування нерухомої точки.

• *Розрізання фігур на частини рівної площі: можливості й обмеження.*

Дослідити різні способи розбиття геометричних фігур (квадратів, трикутників) на рівні частини; визначити, для яких пар «фігура — кількість частин» існують розбиття, а для яких це неможливо; зробити огляд історичних прикладів і сучасних результатів з теорії розбиттів.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Обчисліть площу в клітинках фігур, зображених на рис. 1.9.

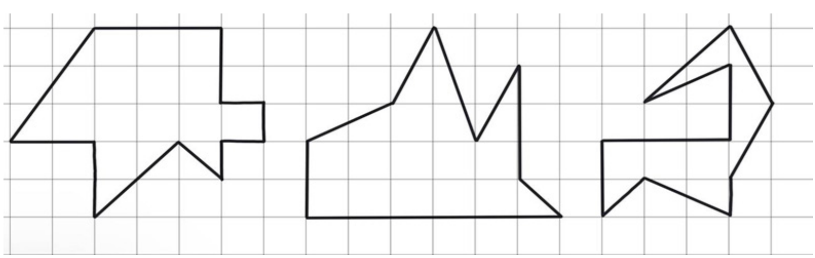


Рис. 1.9. Фігури для обчислення площі

2. Розріжте фігури, зображені на рис. 1.10, на чотири рівні частини по лініях сітки, якщо це можливо.

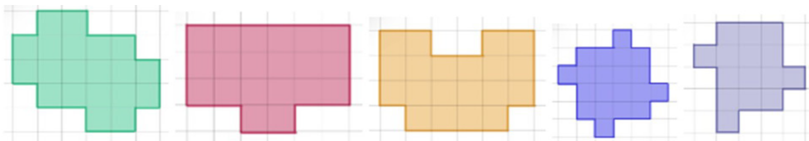


Рис. 1.10. Фігури для розрізання

3. Визначте кількість різних прямокутних трикутників із цілими катетами та площею 12 клітинок.
4. Доведіть, що після того, як трикутник розділити середніми лініями, утворяться чотири рівні трикутники.
5. Доведіть, що медіани трикутника розділяють його на шість рівних за площею трикутників.
6. На медіані BD трикутника ABC позначено точку M так, що $BM : MD = 3 : 1$. Визначте, у скільки разів відрізняється площа трикутника ABC від площі трикутника AMD.
7. *Триангуляцією опуклого многокутника* називається розбиття його на трикутники діагоналями. Визначте, на яку кількість трикутників триангулюється опуклий n-кутник.

1.2. Квадрат – відрізка брат

Мета:

- розширювати знання про використання геометричних візерунків на килимах навахо для виявлення фактів про застосування математики в культурах різних народів;
- розвивати навички обчислення кількості об'єктів на сітці через взаємно однозначну відповідність з іншими об'єктами з урахуванням властивостей квадратів;
- формувати логічне мислення та навички доведення математичних тверджень за допомогою методу математичної індукції.

Під час заняття в учнів формуються такі компетентності:

- обчислення площі геометричних фігур з використанням аналізу їхнього розташування у квадратній сітці;
- визначення кількості об'єктів у сітці (прямокутників, квадратів) і взаємно однозначних відповідностей між об'єктами;
- доведення математичних тверджень за допомогою методу математичної індукції;
- розуміння значення інтегрування математики в культури народів світу, а саме: застосування геометричних фігур в орнаментах.

Килими навахо, які створюють майстри індіанського народу в Північній Америці, глибоко пов'язані з його культурними традиціями, що відображається в геометричних візерунках, кольорах, символах. Килим навахо — це не просто декоративний виріб, а символ зв'язку народу з природою, відображення традицій і вірувань. Процес створення килима — поєднання творчого й наукового підходів у ткацтві. Геометричні орнаменти, що використовуються для створення килимів, вимагають точного розрахунку, дотримання пропорцій, уваги до всіх деталей, урахування математичних принципів. У цих орнаментах дотримано симетрії, ритму, пропорції — основ культури, що водночас є ключовими для математики.

Для навахо Генрі Фаулера, який став видатним математиком, ознайомлення із цією наукою почалося біля ткацького верстата. Спостереження за створенням геометричних орнаментів, процесом їх вимірювання дало можливість зрозуміти значення чисел і математичні принципи.

Квадрат — це чотирикутник, у якого всі сторони рівні й усі кути прямі (90°). Зауважимо, що квадрат є одночасно і прямокутником, і ромбом.

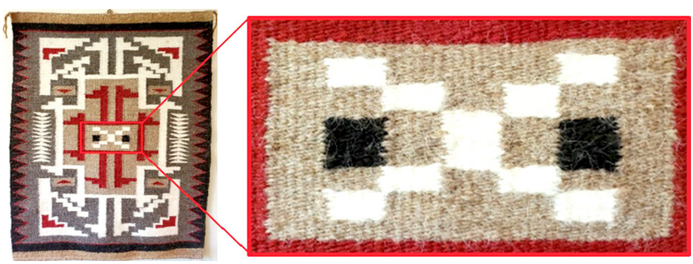


Рис. 1.11. Килим навахо

Запитання для допитливих

- Які геометричні фігури використані в орнаменті килима навахо, зображеного на рис. 1.11?
- Які ще народи використовують такі самі геометричні фігури у своїх виробах?

Задача 1.4
Квадратний отвір

Одного чудового літнього дня Синя пташка навідала свою подругу Таязуру, яка звернулася з проханням допомогти їй вирізати ідеальний квадрат із картону. Пташка взяла шматок картону і вирізала потрібну форму (*рис. 1.12*). Тепер у неї були картон із отвором і вирізаний шматок. Вона хотіла переконатися, що цей шматок — справді квадрат. Прикро, але вона не мала ні лінійки, ні циркуля, ні чогось іншого. Утім, Синя пташка розв'язала задачу. Як вона це зробила?

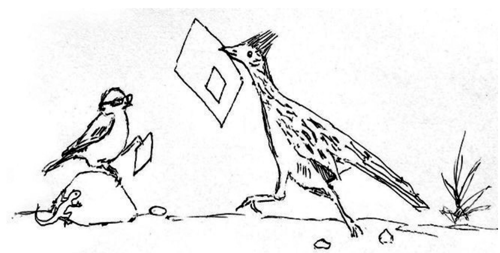


Рис. 1.12. Квадрат і аркуш паперу

Розв'язання

Зазначимо, що існує кілька способів перевірити, чи є вирізана фігура квадратом.

Перевіряння симетрії обертанням фігури. Якщо відрізаний шматок картону накласти на отвір, із якого він був вирізаний, і повернути на 90°, 180° або 270°, то ідеальний квадрат співпаде з отвором. Це відбувається тому, що квадрат має осьову симетрію та обертальну симетрію 90°, 180° і 270°.

Перевіряння складанням фігури. Складіть фігуру по її двох діагоналях. Якщо це квадрат, то фігура накладеться сама на себе, утворивши рівнобедрений прямокутний трикутник. Щоб перевірити, чи трикутник рівнобедрений, складіть його навпіл ще раз.

Ці способи ґрунтуються на факті про те, що квадрат — це фігура, яка має 4 осі симетрії: дві діагоналі й відрізки, що сполучають середини протилежних сторін.

Задача 1.5
Площі різних квадратів

Визначте геометричні фігури, зображені на рис. 1.13. Знайдіть площі внутрішніх фігур, уписаних у квадрати, якщо площа однієї клітинки дорівнює 1.

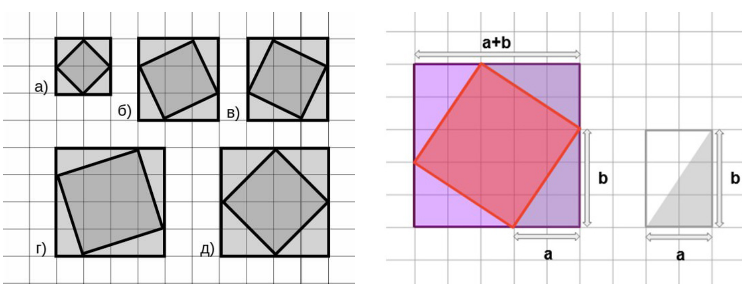


Рис. 1.13. Фігури для задачі 1.5

Розв'язання

Фігури на зображенні — квадрати (*рис. 1.13*). Площа квадрата дорівнює $(a+b)^2$, а площа прямокутного трикутника зі сторонами a і b — $0{,}5ab$. Отже, площа червоного квадрата:

$$(a+b)^2 - 2ab = a^2 + 2ab + b^2 - 2ab = a^2 + b^2.$$

Відповідь: 2, 5, 5, 10, 8.

Задача 1.6
Кількість прямокутників у квадраті

Визначте, скільки існує прямокутників, сторони яких лежать на лініях сітки у квадраті:

1) 7×7;
2) $n \times n$.

Розв'язання

1. Кожен прямокутник визначається двома вертикальними і двома горизонтальними сторонами. Тому для визначення прямокутника спершу необхідно обрати 2 з 8 вертикальні лінії з ділянки 7×7 ($\frac{8 \cdot 7}{2}$ способів), потім необхідно обрати 2 з 8 горизонтальні лінії з ділянки 7×7 (можна використати те саме значення для кількості способів). Отже, загальна кількість прямокутників становить $\left(\frac{8 \cdot 7}{2}\right) \cdot \left(\frac{8 \cdot 7}{2}\right) = 784$.

2. Як і в пункті 1, щоб отримати прямокутник, необхідно обрати 2 з $(n+1)$ вертикальні лінії та 2 з $(n+1)$ горизонтальні лінії в сітці $n \times n$. Це знаходять таким способом:

$$\left(\frac{(n+1) \cdot n}{2}\right) \cdot \left(\frac{(n+1)n}{2}\right) = \frac{(n+1)^2 \cdot n^2}{4}.$$

Отже, кількість таких прямокутників у сітці $n \times n$ дорівнює

$$\frac{(n+1)^2 \cdot n^2}{4}.$$

Зображені на рис. 1.13 квадрати поділимо на два типи (*рис. 1.14*):

1) *правильні квадрати* — квадрати, сторони яких лежать на лініях сітки;

2) *нахилені квадрати* — квадрати, вершини яких лежать у вузлах сітки, а сторони не лежать на лініях сітки.

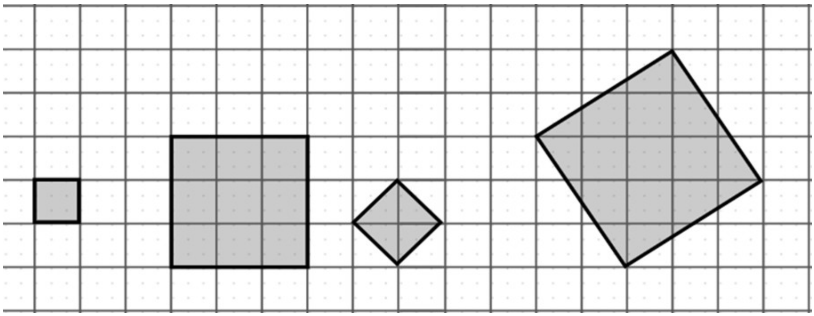


Рис. 1.14. Правильні квадрати 1×1, 3×3 і два нахилені

Задача 1.7
Кількість правильних і нахилених квадратів

Знайдіть формулу загальної кількості:
1) усіх правильних квадратів у сітці $n \times n$;
2) усіх нахилених квадратів у сітці $n \times n$;
3) усіх квадратів (правильних і нахилених) у сітці $n \times n$.

Розв'язання

1. Розглянемо, як можна утворити квадрат зі стороною x у сітці розміром $n \times n$. Для цього потрібно вибрати x стовпців, розташованих поспіль, і x рядків, що також розташовані поспіль. Перетин цих стовпців і рядків утворить квадрат зі стороною x.

Для кожного значення x знайдемо кількість способів обрання x стовпців і x рядків. Утворити квадрат зі стороною x можна, якщо перший обраний стовпець не матиме номера, більшого за $n - x + 1$, інакше не вистачить місця для x стовпців. Отже, робимо висновок:

• кількість способів вибрати x стовпців поспіль становить $n - x + 1$;

• кількість способів вибрати x рядків, розташованих поспіль, теж становить $n - x + 1$.

Оскільки кожен вибір стовпців і рядків утворює квадрат зі стороною x, загальна кількість квадратів такого розміру дорівнює добутку кількості способів вибору стовпців на кількість способів вибору рядків.

Отже, кількість квадратів зі стороною x у сітці $n \times n = (n - x + 1)^2$.

Тоді кількість усіх квадратів: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$.

Результат такого виразу: $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Довести це можна за допомогою *методу математичної індукції*, опис якого наведено в підрозділі 2.1 розділу 2.

У нашому випадку:

база індукції: $n = 1 : 1^2 = \frac{1(1+1)(1+2)}{6} = \frac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$, отже, твердження є справедливим.

Припущення індукції. Припустимо, що для n формула справедлива:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Крок індукції. Доведемо, що тоді формула виконується і для $n+1$:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 =$$

$$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) + (n+1)^2.$$

За припущенням індукції

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Виконаємо підстановку:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)\big(n(2n+1) + 6(n+1)\big)}{6} =$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} =$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6},$$

що і потрібно було довести.

2. Зазначимо, що кожен нахилений квадрат можна вписати в окремий правильний квадрат, який повністю лежатиме на нашій сітці (*рис. 1.15*). Спробуємо порахувати, скільки існує вписаних у правильний квадрат нахилених квадратів.

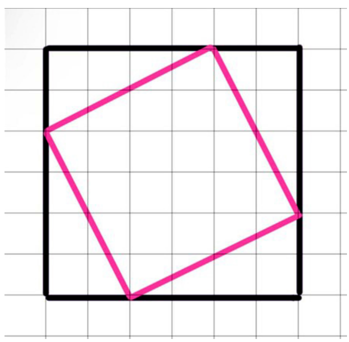


Рис. 1.15. Вписаний нахилений квадрат

Розглянемо невелике значення сторони квадрата для побудови гіпотези. Наприклад, для квадрата зі стороною 4 існує три вписані нахилені квадрати (*рис. 1.16*).

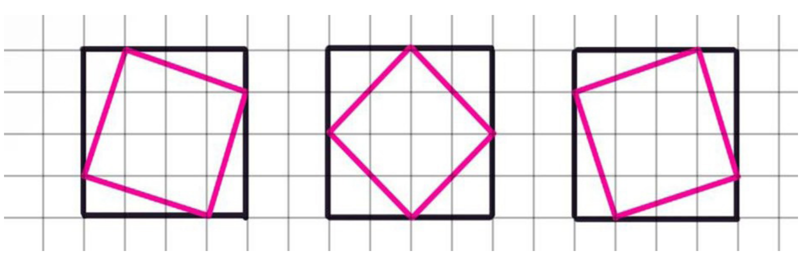


Рис. 1.16. Вписані у квадрат 4×4 нахилені квадрати

Вписаний нахилений квадрат однозначно задає вибір його вершини на верхній стороні квадрата. З усіх можливих вузлів перший і останній утворюють правильні квадрати. Отже, нахилених, що вписані у квадрат розміру $x \times x$, буде $(x - 1)$. У попередньому пункті ми визначили, що правильних квадратів розміру $x \times x$ у сітці $n \times n$ буде $(n - x + 1)^2$. У кожному із цих правильних квадратів є $(x - 1)$ нахилений квадрат. Тож отримуємо такий вираз:

$$1^2(n-1) + 2^2(n-2) + 3^2(n-3) + \ldots + n^2\,(n-n).$$

Значення цього виразу можна обчислити за формулою

$$\frac{(n-1)n^2(n+1)}{12}.$$

Доведемо це аналогічно до попереднього пункту за допомогою методу математичної індукції.

База індукції. Перевіримо виконання для

$$n = 2 \div 1^2(2-1) + 2^2(2-2) = \frac{1 \times 4 \times 3}{12} = 1.$$

Справді в сітці 2 × 2 є лише один нахилений квадрат.

Припущення індукції. Припустимо, що для n формула справедлива:

$$1^2(n-1) + 2^2(n-2) + 3^2(n-3) + \ldots + n^2(n-n) =$$
$$= \frac{(n-1)n^2(n+1)}{12}.$$

Крок індукції. Доведемо, що тоді формула виконується і для $n + 1$:

$$1^2\,(n+1-1) + 2^2(n+1-2) + 3^2(n+1-3) + \ldots + n^2(n+1-n) +$$
$$+ (n+1)^2\,(n+1-n-1) = (1^2(n-1) + 2^2\,(n-2) + 3^2\,(n-3) + \ldots + n^2 \cdot 0) +$$
$$+ (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) + (n+1)^2 \cdot 0.$$

За припущенням індукції

$$(1^2(n-1) + 2^2(n-2) + 3^2(n-3) + \ldots + n^2 \cdot 0) = \frac{(n-1)n^2(n+1)}{12}.$$

Значення виразу в другій дужці нам відоме з попередньої задачі:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Тому маємо:

$$(1^2(n-1)+2^2(n-2)+3^2(n-3)\ +\ldots+\ n^2\cdot 0)+$$
$$+(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)+(n+1)^2\cdot 0=$$
$$=\frac{(n-1)n^2(n+1)}{12}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+0=$$
$$=\frac{(n-1)n^2(n+1)+2n(n+1)(2n+1)}{12}=$$
$$=\frac{n(n+1)(n^2-n+4n+2)}{12}=\frac{n(n+1)^2(n+2)}{12},$$

що і потрібно було довести.

3. Склавши результати, маємо кількість усіх квадратів у сітці $n\times n$:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{(n-1)n^2(n+1)}{12}=\frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}.$$

Задача 1.8
Середини сторін квадратів

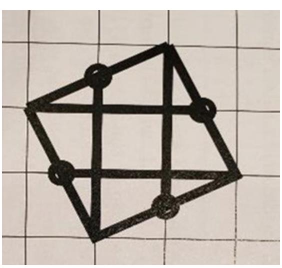


Рис. 1.17. З'єднані по колу середини й вершини

Рухаючись по колу, з'єднаємо вершини квадрата із серединами протилежних сторін (*рис. 1.17*). Чотири відрізки формують внутрішній чотирикутник всередині початкового квадрата. Дайте відповіді на запитання:

1) який це чотирикутник;

2) яку частину площі початкового квадрата він займає;

3) середина кожної зі сторін ділить сторону на два відрізки, співвідношення яких 1 : 1. Що станеться, якщо розділити кожну зі сторін не на рівні дві частини, а на частини, що відносяться як $a : b$?

Розв'язання

1 і 2. Якщо зобразити нахилений квадрат, як показано на рисунку, то лінія сітки проходить через вершину і ділить протилежну сторону навпіл. Ця фігура ілюструє побудову, необхідну для розв'язання задачі. Чотирикутник посередині є квадратом із площею 1, а площа великого нахиленого квадрата становить $2^2 + 1^2 = 5$ (використовується результат із заняття про площу нахиленого квадрата). Отже, площа внутрішнього квадрата становить ⅕ площі початкового квадрата.

3. Розглянемо нахилені квадрати на рис. 1.18.

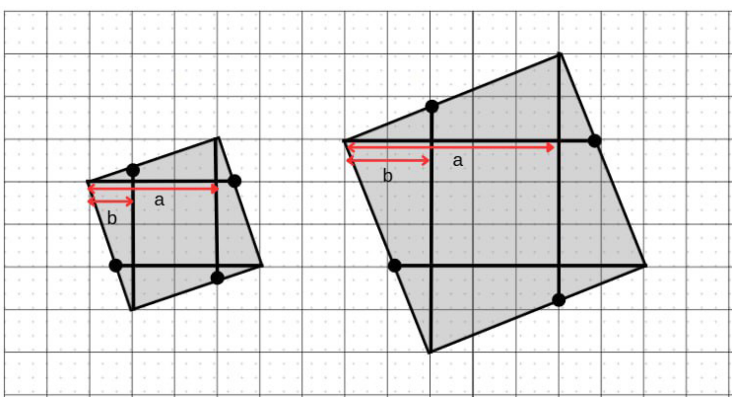


Рис. 1.18. Два нахилені квадрати, вершини яких сполучені з протилежними сторонами

Для зручності сформулюємо завдання інакше. Замість того, щоб зважати на співвідношення частин сторони, розглянемо відношення r однієї із частин до всієї сторони квадрата.

У нахиленому квадраті ліворуч, де $a = 3$ і $b = 1$, відношення $r = 1/3$ (щоб переконатися в цьому, розгляньте подібні трикутники). Площа внутрішнього квадрата становить $(3 - 1)^2 = 4$, а площа великого — $3^2 + 1^2 = 10$. Отже, співвідношення площ дорівнює $4/10$.

У нахиленому квадраті праворуч $a = 5$, $b = 2$ і $r = 2/5$. Площа внутрішнього квадрата становить $(5 - 2)^2 = 9$, а площа великого — $5^2 + 2^2 = 29$. Тут співвідношення площ дорівнює $9/29$.

Використовуючи міркування щодо зображення заданого квадрата нахиленим, маємо такий результат: якщо $r = m/n$, де $m < n$ і m та n є натуральними числами, площа внутрішнього квадрата становить $(n - m)^2$, а площа великого нахиленого квадрата дорівнює $n^2 + m^2$. Отже, співвідношення їхніх площ дорівнюватиме

$$\frac{(n-m)^2}{n^2+m^2} = \frac{(n-m)^2/n^2}{(n^2+m^2)/n^2} = \frac{(1-r)^2}{1+r^2}.$$

Остання формула є коректною, навіть коли r — ірраціональне (це можна довести з використанням границь).

Задача 1.9
Кольорова сітка

Уявіть, що кожен вузол нескінченної сітки фарбується одним із заданого набору кольорів, і дайте відповіді на наведені нижче запитання.

1. Якщо кожне ціле число числової прямої розфарбувати одним із двох кольорів, чи можна зробити так, щоб не було трьох одноколірних чисел, які формують арифметичну прогресію?

2. Якщо кожен вузол нескінченної сітки фарбується в один із двох кольорів (*рис. 1.19*), чи можна уникнути трьох точок одного кольору, що формують рівнобедрений прямокутний трикутник? Що станеться, якщо використати 3 кольори?

3. Припустімо, що нескінченна сітка розфарбовується двома кольорами. Чи можна це зробити так, щоб жодні чотири одноколірні точки не формували квадрат?

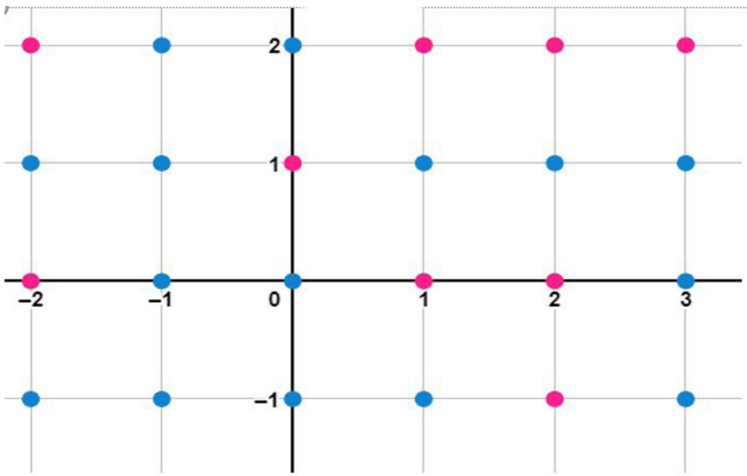


Рис. 1.19. Сітка, вузли якої розфарбовані у два кольори

Розв'язання

1. Розглянемо 2-розфарбування (двоколірне розфарбування) цілих чисел на дійсній прямій (тобто кожне із цілих чисел фарбується в один із двох кольорів). Назвемо ці кольори Б (блакитний) і Р (рожевий). Тоді є три випадки:

1) маємо 3 послідовні цілі числа однакового кольору;
2) маємо 2 послідовні цілі числа однакового кольору;
3) будь-які два сусідні цілі числа мають різний колір.

Випадки 1 і 3 достатньо легкі, тож розглянемо спочатку їх.

Випадок 1. Нехай три послідовні одноколірні цілі числа — це n, $n+1$ та $n+2$. Але ці три числа формують арифметичну прогресію з різницею 1. Отже, якщо розфарбування не має містити такої послідовності, тоді цей випадок неможливий.

Випадок 3. У такому разі кольори цілих чисел чергуються. Припустімо, що 0 — блакитний (якщо 0 — рожевий, то аналогічно). Тоді числа 0, 1, 2, 3, 4 розфарбовані: БРБРБ і 0, 2, 4 формують одноколірну арифметичну прогресію з різницею 2. Оскільки потрібно уникнути такої послідовності, то цей випадок також неможливий.

Залишається перевірити *випадок 2*, коли існують два послідовні цілі числа одного кольору. Припустімо, що цими числами є 1 і 2, і вони обидва блакитні (аналогічно розглядається і в загальному вигляді, коли ці числа n та $n+1$ для довільного n; нічого не зміниться, якщо поміняти кольори місцями). Отже, маємо:

	1	2	3	4	5	6	7	8
	Б	Б						

Ми не хочемо отримати одноколірну арифметичну прогресію довжиною 3, тому числа 0 і 3 мусять бути рожевими. Маємо:

0	1	2	3	4	5	6	7	8
Р	Б	Б	Р					

Щоб уникнути одноколірної рожевої послідовності (0, 3, 6), число 6 має бути блакитним.

0	1	2	3	4	5	6	7	8
Р	Б	Б	Р			Б		

Щоб уникнути одноколірної блакитної послідовності (2, 4, 6), число 4 має бути рожевим.

0	1	2	3	4	5	6	7	8
Р	Б	Б	Р	Р		Б		

Отже, 5 має бути блакитним, щоб не було трьох рожевих чисел підряд.

0	1	2	3	4	5	6	7	8
Р	Б	Б	Р	Р	Б	Б		

Тепер число 7 має бути рожевим, щоб не було трьох блакитних одне за одним.

0	1	2	3	4	5	6	7	8
Р	Б	Б	Р	Р	Б	Б	Р	

Якого кольору буде 8? Якщо 8 рожевого кольору, то ми отримаємо рожеву послідовність (0, 4, 8). Щоб цього не сталося, число 8 має бути блакитного кольору. Але в цьому випадку отримаємо блакитну послідовність (2, 5, 8).

Ми довели: якщо у нас є будь-які два сусідні цілі числа одного кольору, то кожне розфарбовування решти цілих чисел міститиме одноколірну арифметичну послідовність довжиною 3. Тому всі три можливі випадки неминуче створюють одноколірну арифметичну прогресію довжиною 3. Отже, не створюючи одноколірної арифметичної послідовності довжиною 3, розфарбувати у два кольори можна не більше 7 чисел.

Запитання для допитливих

- Що трапиться, якщо використовувати більше двох кольорів?
- Чи можливо розфарбувати цілі числа в C різних кольорів так, щоб не утворилася одноколірна арифметична прогресія довжиною L?
- Якщо ваша відповідь «Ні», тоді визначте, як можна знайти найбільшу кількість послідовних цілих чисел, які розфарбовуються в C кольорів, не утворюючи одноколірної арифметичної послідовності довжиною L.

Останнє запитання виглядає як захопливий дослідницький проєкт. Можна експериментувати з різними значеннями для C самостійно чи за допомогою комп’ютера.

2. Якщо кожен вузол нескінченної сітки фарбується в один з двох кольорів, чи можливо уникнути появи трьох точок одного кольору, що формують рівнобедрений прямокутний трикутник? Чи можна використовувати три кольори, а не два?

Введемо деякі означення, для зручності назвемо:

• одноколірний рівнобедрений трикутник *бажаним трикутником;*

• квадратну множину вузлів сітки *хорошою*, якщо в ній є три точки з координатами (x, y), $(x, y + d)$ і $(x + d, y)$, при цьому (x, y) і $(x, y + d)$ мають однаковий колір, а $(x + d, y)$ — інший.

Почнімо з того, що в довільному 2-розфарбуванні кожна квадратна множина 3×3 вузлів сітки або містить бажаний трикутник, або є *хорошою*.

Дійсно, перший (лівий) стовпчик такої множини повинен містити принаймні дві точки одного кольору (принцип Діріхле), що можуть розташовуватися в одній із трьох позицій, зображених на рис. 1.20 (припустимо, що вони блакитні; для рожевих — так само).

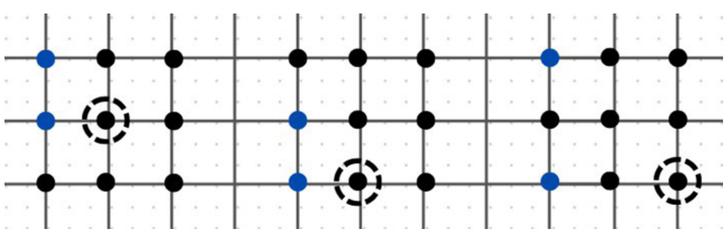


Рис. 1.20. Можливі позиції одноколірних точок першого стовпця

У кожному з випадків, якщо обведена точка блакитна, то маємо бажаний трикутник, якщо рожева — квадрат є *хорошим*.

Тепер розглянемо квадрат розміру $M \times M$, де $M = 1539 = 3 \cdot 513$.

Розділимо цю множину вертикальними і горизонтальними лініями так, щоб утворилося візуальне розділення на клітини 3×3, як на рис. 1.21 (наведено фрагмент великої сітки).

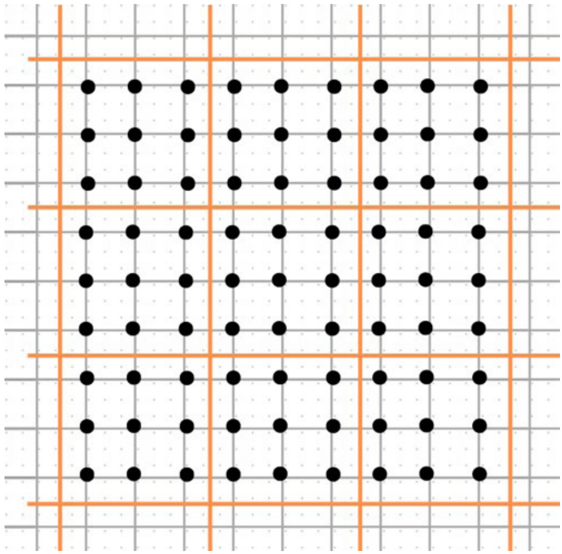


Рис. 1.21. Розділення на квадрати 3×3

Назвемо цю множину *клітинним масивом*, що складається з 513 стовпців і 513 рядків. Перший (лівий) стовпець має 513 клітин 3×3. Кількість різних способів розфарбувати клітину 3×3 становить $2^9 = 512$. Тому в першому стовпці знайдеться дві клітини, розфарбовані однаково (принцип Діріхле). Якщо ці клітини містять бажані трикутники, то умова вже порушена. Припустимо, що вони не містять бажаних трикутників. У цьому разі вони є *хорошими*. Розглянемо клітину 3×3 в тому ж рядку клітинного масиву, де розташована нижча *хороша* клітина. Вона розміщена на тій самій відстані, що й друга *хороша* клітина вище (*рис. 1.22*).

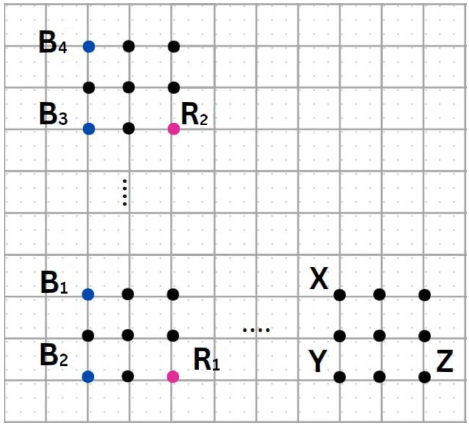


Рис. 1.22. Клітинний масив із повторюваним шаблоном

Якщо X чи Y блакитні, то ми отримали бажаний трикутник B_4B_1X чи B_3B_2Y.

Припустимо, що X і Y пофарбовані в рожевий колір. Тепер поглянемо на Z. Якщо ця точка рожева, то XYZ є бажаним трикутником. Якщо Z блакитна, то B_4B_2Z є бажаним трикутником. Отже, ми довели, що для довільного 2-розфарбування вузлів сітки $M \times M$ знайдеться бажаний трикутник із вершинами у вузлах одного кольору (для $M = 1539$).

Зауваження. Якщо бути пильними, то можна помітити, що наведене значення M завелике. Його можна зменшити, якщо вилучити всі розфарбовування клітин 3×3, що містять бажані трикутники. Чи могли б ви зменшити M? Чи можете ви знайти найменше значення M, яке гарантує, що масив $M \times M$ містить бажаний трикутник?

3. *Ідея розв'язання*.

Як у пункті 2, можна продемонструвати, що для довільного натурального числа C існує таке число N_C, яке у випадку кожного C-розфарбування (тобто розфарбування вузлів сітки в C різних кольорів) масиву $N_C \times N_C$ буде містити бажаний трикутник.

Скільки способів є для розфарбовування клітинного масиву $M \times M$ у блакитний і рожевий кольори?

Відповідь: 2^{M^2}.

Будемо вважати кожне розфарбовування клітини *кольором* клітини. Розглянемо клітинний масив $M \times M$. Нам відомо, що існує таке число N_c (із $C = 2^{M^2}$), яке у випадку кожного C-розфарбування масиву містить бажаний трикутник із клітин. Проте кожна із цих клітин містить бажаний трикутник із точок, і такі трикутники з точок мають однакові кольори та розташування в кожній із трьох клітин.

Наступний рис. 1.23 ілюструє такий випадок. Зображення стилізоване, тобто якщо поряд знаходяться дві точки R, це не означає, що вони стоять поруч. Отже, зображені поруч дві пари мають рівні відстані між собою.

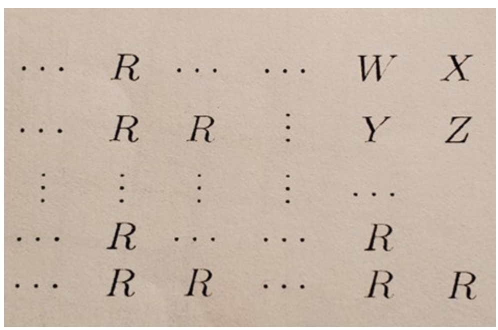


Рис. 1.23. Повторюваний трикутник у сітці

Розглянемо точки W, X, Y, Z. Якщо якась із них рожевого кольору, то маємо рожевий квадрат. Якщо жодна з них не рожева, то $WXYZ$ — блакитний квадрат.

Отже, довели, що для довільного 2-розфарбування точок сітки $M \times M$ знайдеться одноколірний квадрат.

Зауваження. Усі наведені міркування і приклади є ілюстраціями фундаментального принципу *теорії Рамсея,* що описує таку закономірність: у будь-якій великій структурі обов'язково існує впорядкована підструктура. Зокрема, якщо вершини або клітинки великої сітки розфарбувати у якусь кількість кольорів, то завжди можна знайти підмножину точок, що утворює геометричну фігуру з усіма вершинами одного кольору.

Класичним прикладом такої закономірності є твердження, що в будь-якому великому двоколірному графі існує повністю одноколірний трикутник, квадрат чи якась інша фігура. Саме завдяки такому принципу можна довести існування бажаного трикутника чи квадрата в клітинному масиві незалежно від того, як будуть розфарбовані вузли або клітини. Такі результати демонструють глибинний зв'язок між випадковістю і порядком у дискретних структурах.

Зважимо на те, що для будь-якого натурального числа C кожне C-розфарбування вузлів сітки має містити одноколірний квадрат.

Наступне твердження: для кожного натурального числа C є таке число $G(C)$, що для кожного C-розфарбування сітки розміру $G(C) \times G(C)$ знайдуться чотири точки одного кольору, які є вершинами квадрата.

Для доведення такого твердження є кілька варіантів:

• наслідок із теореми Гейлса — Джевета (Hales, Jewett, 1963);

• наслідок із теореми Галлаї (Erdős, Gallai, 1960);

• використання теореми ван дер Вардена (van der Waerden, 1927).

Нами наведене елементарне доведення для окремого випадку $C = 2$. А яким буде значення $G(C)$?

Відповідь: воно величезне.

Наприклад, на сьогодні найкраща з відомих верхніх оцінок — це $G(2) \leq 2^{2^{81}}$.

Рис. 1.24. Стен Вейґон на велосипеді з квадратними колесами

Велосипед з квадратними колесами і ланцюгова лінія

У 1997 році Стен Вейґон, професор математики з коледжу Макалестер у Сент-Полі (штат Міннесота, США), створив унікальний велосипед із квадратними колесами. Він міг поволі пересуватися по поверхні лише такої форми, переріз якої складався з катенарій — рівномірно обернених однакових ланцюгових ліній.

Ланцюгова лінія (катенарія) — це математична крива, що описує вигин мотузки або ланцюга, який висить між двома точками, під дією власної ваги. Якщо тримати кінці мотузки, що вільно провисає, то утворена нею ланцюгова крива є катенарією. Завдяки унікальним властивостям вона застосовується для розрахунку натягу й розподілу навантаження в гнучких конструкціях у:

- будівництві: містобудуванні, дизайні дахів для спортивних арен і павільйонів;
- ткацтві: створенні тканин і візерунків на них;
- ландшафтному дизайні: створенні альтанок, ландшафтних композицій;
- виробництві: виготовленні конвеєрних систем, електричних підвісок тощо.

Ланцюгова лінія (катенарія) використовувалася у проєктуванні арок і мостів ще за часів Стародавнього Риму. Катенарія забезпечує оптимальний розподіл навантаження завдяки своїй природній формі. Прикладом її широкого використання є проєкти іспанського архітектора Антоніо Гауді, зокрема Саграда Фамілія в Барселоні.

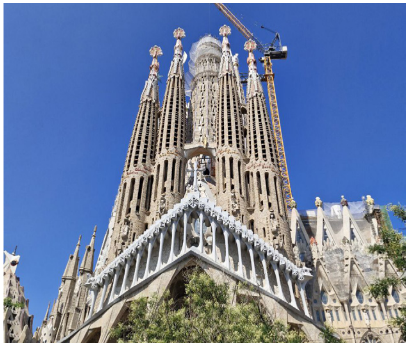


Рис. 1.25. Антоніо Гауді. Саграда Фамілія
(Барселона, Іспанія)

Катенарний переріз популярний серед кемперів, оскільки відповідний дизайн наметів сприяє міцнішому натягуванню тканини, робить конструкцію більш стійкою та зручною для використання, зменшує її провисання під власною вагою чи від вітру.

У Стародавньому Єгипті біля деяких пірамід були знайдені дерев'яні конструкції, вирізані у формі четвертої частини кола. Можливо, такі конструкції використовували для переміщення важких мармурових блоків із квадратним поперечним перерізом. Дерев'яні чверті кола встановлювали під блоки, що давало змогу котити їх з меншими зусиллями. Зазначимо, що форма чверті кола близька до катенарії. Отже, спостереження за формами в природі могли бути використані для розв'язання інженерних задач у далекому минулому.

Велосипед як свідчення інтеграції математики й інженерії. Побудова велосипеда з квадратними колесами Стеном Вейґоном є яскравим прикладом того, як знання математики можуть бути застосовані для створення різних механічних конструкцій. Хоча такий велосипед виглядає незвично, він демонструє те, як абстрактні математичні криві можуть стати основою для розроблення інженерних рішень. Зазначене підкреслює роль поєднання математики з інженерною думкою, її важливість у повсякденному житті.

Сьогодні всі охочі можуть побачити і випробувати цей унікальний велосипед в Музеї науки Малої академії наук України, що знаходиться в місті Києві за адресою: проспект Академіка Глушкова, буд. 1.

Теми дослідницьких робіт

• *Комбінаторика: закономірності, принципи й екстремальні випадки.*

Дослідити, як працюють базові принципи комбінаторики (принцип Діріхле, принцип теорії Рамсея); розробити задачі, у яких потрібно довести існування впорядкованих підструктур у випадкових наборах.

• *Бієктивні доведення: як перетворювати об'єкт.*

Дослідити метод бієктивних доведень як інструмент в комбінаториці: виявити класичні приклади, побудувати власні бієкції між різними множинами (наприклад, між перестановками й розбиттями, між графами й таблицями); довести, що такі відповідності можна використовувати для аналізу та моделювання складних об'єктів.

• *Формула кількості квадратів у сітці: від правильних до нахилених.*

Проаналізувати формули для підрахунку кількості всіх правильних і нахилених квадратів у сітці розміру $n \times n$; узагальнити доведення; здійснити індукцію та дослідити, які ще комбінації таких квадратів можна знайти (наприклад, що зміниться, якщо сітка нескінченна чи точки зафарбовані).

Задачі для самостійного розв'язання

1. Визначте, скільки квадратів мають рожеву або блакитну точку як вершину (*рис. 1.26*). Чи можуть квадрати містити рожеву й блакитну точки одночасно? Знайдіть їхню кількість.

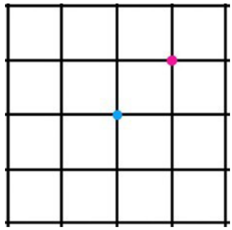


Рис. 1.26. Розташування блакитної та рожевої точок

2. Знайдіть кількість правильних і нахилених квадратів у сітці 4×4, площа яких не більша ніж 9.
3. Визначте кількість квадратів, які містять більше блакитних точок, ніж рожевих (*рис. 1.27*).

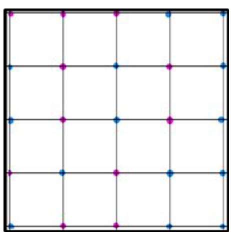


Рис. 1.27. Розфарбування вузлів сітки у рожевий і блакитний кольори

4. По черзі двоє гравців на дошці 5×6 малюють простий квадрат по лініях сітки і вирізають його з дошки. Якщо гравець не зможе зробити хід, він програє. Визначте, хто з гравців має виграшну стратегію. (Вважаємо, що гравці грають правильно і не помиляються.)
5. Виконайте завдання, як у задачі 4, для дошки $m \times n$, у якої більша сторона (якщо вони не рівні) парна.

1.3. Геометрія будинків хоган

Мета:

- формувати навички застосування базових принципів геометричних побудов за допомогою циркуля і лінійки;
- навчати використовувати геометрію оригамі як альтернативний підхід до простору й утворення форми;
- розвивати практичні навички розв'язування задач на побудову геометричних фігур, підрахунок площ, аналіз властивостей об'єктів;
- поглиблювати знання про культурні й історичні аспекти геометрії, її використання у народних традиціях, мистецтві, архітектурі на прикладі Стародавнього Єгипту, Греції, Японії та культури навахо з Північної Америки;
- залучати до дослідження застосування геометричних знань у культурах і традиціях народів світу.

Під час заняття в учнів формуються такі компетентності:

- виконання базових геометричних побудов (поділ відрізка навпіл, побудова бісектриси кута, правильного п'ятикутника) з використанням циркуля і лінійки;
- застосування принципів геометрії оригамі для вивчення геометричних принципів;
- дослідження властивостей складених фігур та їхнього зв'язку з математичними аксіомами;
- виявлення прикладів використання геометрії (грецька геометрія, японське оригамі й архітектура хоган) в орнаментах, архітектурі тощо;

- дослідження симетрії, взаємно однозначної відповідності, властивостей геометричних об'єктів під час розв'язування задач, що передбачають поєднання практичних навичок і творчого підходу;
- усвідомлення важливості геометрії в історичному і сучасному контекстах, зокрема у мистецтві, архітектурі й екологічно сталих рішеннях.

Геометрія — розділ математики про форми і просторові відношення, що зароджувався на перетині практичних ідей, мистецтва і повсякденного життя, втілюючись у народній творчості й ремеслах. Геометрія зародилася у Стародавньому Єгипті, де її використовували для вимірювання землі після розливів Нілу, щоб відновити межі полів. Єгиптяни розв'язували задачі на побудову, наприклад, створювали правильні кути за допомогою мотузок із вузлами.

У Стародавній Греції геометрія набула абстрактного характеру завдяки працям Фалеса і Піфагора, які згодом перетворили її на теоретичну науку. Греки розв'язували задачі на побудову лише за допомогою циркуля і лінійки. Зокрема, будували правильні многокутники й ділили відрізки навпіл. Евклід у трактаті з 13 книг «Начала» сформулював аксіоми геометрії, які стали її основою. Завдяки грецьким математичним відкриттям геометрія перетворилася на абстрактну дисципліну, зосереджену на доказах і теоремах. Грецька геометрія була спрямована на дослідження основоположних форм — кола і прямокутника. Коло є символом грецької геометрії, де точність і елегантність форм поєднувалися з філософським осмисленням природи Всесвіту. Гармонійні орнаменти з кіл демонструють симетрію, ритм і красу геометрії. Такі креслення з давніх часів слугували основою для художніх і архітектурних орнаментів у різних культурах світу (*рис. 1.31*).

Побудова геометричних фігур із заданими властивостями здійснювалася за допомогою креслярських інструментів: циркуля та лінійки без вимірювальних поділок. За допомогою лінійки можна провести довільну пряму, пряму, що проходить через певну точку, пряму, що проходить через дві задані точки.

Пропонуємо кілька найпростіших задач на побудову, які не лише сприяють засвоєнню базових принципів геометричних побудов за допомогою циркуля і лінійки, а й визначають цікаві властивості геометричних фігур.

Задача 1.10
Побудова середини відрізка

Дано відрізок AB. Побудуйте точку C, що є його серединою, використовуючи циркуль і лінійку.

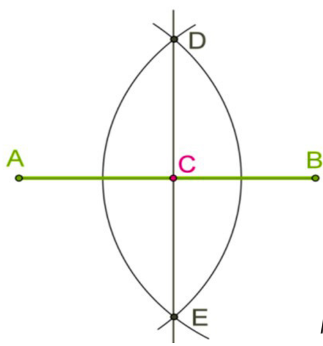


Рис. 1.28. Побудова середини відрізка

Розв'язання

Установіть радіус циркуля, трохи більший за половину довжини відрізка AB. Накресліть дугу з центром у точці A. Не змінюючи радіуса циркуля, проведіть ще одну дугу з центром у точці B так, щоб вона також перетинала дугу, накреслену з точки A, утворюючи дві точки перетину D і E. Проведіть пряму через ці дві точки. Пряма буде перпендикулярна до відрізка AB і проходитиме через його середину.

Задача 1.11
Побудова бісектриси кута

Дано кут AOB. Побудуйте бісектрису кута OC за допомогою циркуля і лінійки.

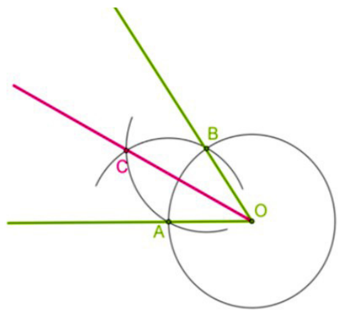


Рис. 1.29. Побудова бісектриси кута

Розв'язання

Установіть голку циркуля у вершину кута O (*рис. 1.29*). Проведіть дугу, яка перетинає обидві сторони кута, отримані точки позначте як A і B. Не змінюйте розкриття циркуля і з центрів у точках A і B проведіть дуги, щоб вони перетнулися між собою. Позначте точку перетину цих дуг як C.

Щоб довести, що OC дійсно ділить кут AOB навпіл, достатньо розглянути трикутники AOC і BOC. $OA = OB$ як радіуси одного кола, а $AC = BC$, оскільки для побудови ми обрали однакові радіуси для обох кіл. Сторона OC спільна. Трикутники рівні за третьою ознакою рівності трикутників, тож їхні відповідні кути рівні. Отже, $AOC = BOC$ — дві рівні частини одного кута, а промінь OC ділить кут навпіл.

Розглянемо інший практичний підхід до геометрії. *Оригамі* — мистецтво, у якому кожна фігура створюється без ножиць і клею згинанням паперу. У цій практиці прихована математика, де простір і форма переплітаються в ідеях симетрії, послідовності й точності.

Геометрія оригамі — частина традиційного мистецтва складання паперу, що використовували для створення символічних фігур у релігійних і культових обрядах. Згодом японські майстри почали досліджувати математичні властивості складених фігур, визначили закономірності їхньої побудови й розробили правила. Оригамі перетворилося на мистецтво, у якому правила складання стали основою розвитку геометричних концепцій і задач.

Для ознайомлення з оригамі можна скласти паперовий літачок (*рис. 1.30*).

Краса геометрії полягає в тому, що вона демонструє різні підходи до простору та форми. В оригамі Японії використовують згини й послідовність дій, а основою геометрії Стародавньої Греції є інструменти й чіткі правила побудови.

Більш детальне вивчення геометрії дає змогу не лише зрозуміти її математичну логіку, а й довести те, що людство почало мимовіль використовувати математичні принципи у повсякденному житті.

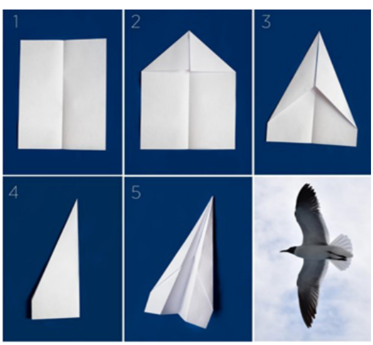


Рис. 1.30. Японське оригамі. Літачок

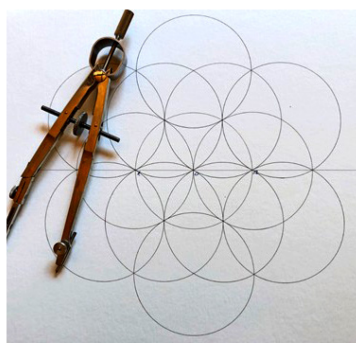


Рис. 1.31. Креслення циркулем

Використання згинів паперу, циркуля та лінійки є яскравим прикладом того, як різні інструменти й культурні практики можуть формувати унікальні системи аксіом і законів у геометрії.

Японське мистецтво оригамі спирається на набір спеціальних аксіом, відомих як аксіоми Худзіти (Huzita, 1989), що визначають принципи й можливості створення форм за допомогою згинання паперу. Аксіоми оригамі задають спосіб, як кожен згин може трансформувати площину та взаємодіяти з іншими лініями на аркуші, утворюючи нові точки й кути. Наприклад, одна з аксіом стверджує, що завжди можна зробити згин, який накладе одну пряму на іншу (складання крил літачка). Ця аксіома відображає просту, але значущу властивість симетрії, що дає змогу створювати безліч складних структур із паперу.

Натомість класична геометрія, розроблена давньогрецьким математиком Евклідом, ґрунтується на аксіомах, що описують властивості ліній, кіл і точок, коли вони конструюються за допомогою циркуля і лінійки. Евклід побудував систему з п'яти основних аксіом, які упродовж століть були фундаментом для геометричних побудов, досліджень і доказів. Однією з таких аксіом є твердження, що через дві будь-які точки завжди можна провести пряму, яке лежить в основі нашого розуміння лінійності та просторових відношень. Ця аксіома свідчить про прагнення до чіткої структури й логіки — основи грецької геометрії.

Різниця між аксіомами оригамі й Евкліда демонструє те, як математика може відображати культурний та інструментальний контексти. У той час, коли евклідова геометрія прагне до абстрактної досконалості форм з використанням визначених інструментів, оригамі орієнтується на фізичну взаємодію з матеріалом, де кожен згин змінює форму аркуша і створює нові можливості. Такі два підходи допомагають нам не лише розширювати знання з геометрії, а й розуміти те, що математичні істини можуть виглядати по-різному залежно від методів і підходів, що лежать в основі побудови кожної системи.

Одним із яскравих прикладів поєднання таких підходів є побудова правильного п'ятикутника. Його можна створити як за допомогою циркуля і лінійки, так і у техніці оригамі, складаючи папір так, щоб отримати рівні кути і пропорції. Розглянемо обидва методи й порівняємо, як кожен із них розкриває різні можливості застосування геометрії.

Задача 1.12
Побудова правильного п'ятикутника за допомогою циркуля і лінійки та у техніці оригамі

Накресліть коло з центром O. Проведіть два взаємно перпендикулярні діаметри, один — горизонтальний, а інший — вертикальний. На кінці горизонтального діаметра позначте точку A. Установіть розмах циркуля, що дорівнює радіусу кола. Із точки A проведіть дугу, яка перетне коло в точках B і B'. З'єднайте точки B і B' прямою лінією. Ця лінія має перетнути горизонтальний діаметр у точці C, яка є серединою відрізка AO. На верхньому кінці вертикального діаметра позначте точку 1. Від точки C проведіть дугу з радіусом, що дорівнює відстані між точками C й 1. Точка перетину цієї дуги з горизонтальним діаметром є точкою D. Потім, використовуючи точку 1 як центр, проведіть третю дугу з радіусом, що дорівнює відстані між точками 1 та D. У місці перетину цієї дуги з колом отримуємо точку 2. Точка 1 є першою поділкою на колі, а точка 2 — другою. Відстань між точками 1 і 2 відкладаємо циркулем по колу, отримуючи наступні точки 3, 4, 5. З'єднуємо точки 1, 2, 3, 4, 5 й отримуємо правильний п'ятикутник, уписаний у коло (*рис. 1.32*).

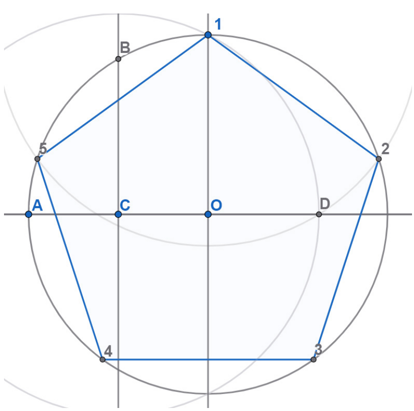


Рис. 1.32. Побудова правильного п'ятикутника за допомогою циркуля і лінійки

Відріжте смужку паперу (*рис. 1.33*). Довжина смужки має бути у 8 разів більша за ширину. Зав’яжіть її у вузол і затягніть так, щоб папір не перегинався. Притисніть вузол і згини. Загорніть хвостики. Доведіть, що отримана фігура — правильний п’ятикутник.

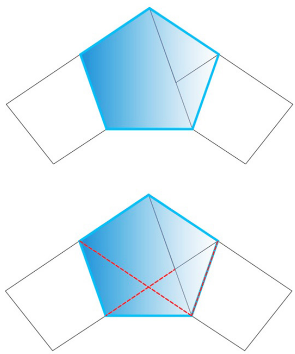


Рис. 1.33. Складання п’ятикутника зі смужки паперу

Задача 1.13
Побудова будинку хоган

Хоган (*рис. 1.34*) — це традиційний будинок представників племені навахо. Перші хогани були круглими, бо символізували зв’язок із природою і космосом, утілювали ідею захисту, яку надає кругла форма. Із розвитком будівництва хогани набули многокутної чи квадратної форми, але зберегли основні принципи конструкції. Зазвичай їх зводили з дерев’яних стовпів, покритих глиною або каменем, що забезпечувало міцність і теплоізоляцію. Під час будівництва хогану використовували мотузку, щоб викласти основу кола або многокутника. Два будівельники, працюючи разом, зосереджувалися на створенні ідеально рівного кола, навколо якого зводилися стіни. Для цього кедрові колоди встановлювали вертикально, формуючи міцні й захищені стіни.

Процес будівництва передбачав урахування сторін світу — сходу, заходу, півдня і півночі. У культурі навахо кожна з них мала своє значення. Східна сторона символізувала початок нового, тому двері хогану завжди орієнтовані на схід, щоб мешканці могли зустрічати світанок — символ життя й удачі.

Крім символічної значимості хогану, варто відзначити також екологічну ефективність, адаптованість до природних умов. Завдяки товстим глиняним стінам, що добре зберігають тепло, хоган прохолодний улітку і теплий узимку. Особлива конструкція забезпечує природну вентиляцію, підтримує комфортний мікроклімат упродовж року, що відображає глибоке розуміння природних ресурсів і властивостей матеріалів, доступних для навахо.

Сьогодні хогани майже не використовуються для постійного проживання, оскільки сучасні будівлі поступово витіснили традиційне житло навахо. Проте вони зберігають свою важливу роль у релігійних і культурних обрядах навахо. Хоган є місцем, де відбуваються зустрічі, проводяться церемонії очищення, зцілення та інші важливі ритуали, що мають духовне і культурне значення для навахо. Тому традиційний хоган — не лише символ історії й архітектури, але й священний простір, що зберігає пам’ять поколінь і повагу до природи.

а

б

Рис. 1.34. Будинки хоган

Спробуйте побудувати маленький будинок хоган у своєму дворі. Щоб накреслити коло, використайте мотузку і гостру палицю. Для визначення сторін світу можна використовувати GPS. Якщо немає можливості створити будиночок просто неба, накресліть його схему на папері. Для цього визначте, де схід. Накресліть пряму схід — захід крізь круглий хоган і позначте отвір для дверей.

Деякі будинки хоган мають шість сторін. Щоб побудувати правильний шестикутник, як роблять навахо, дотримуйтесь такої послідовності:

1) намалюйте коло;

2) розтягніть мотузку чи паперову стрічку і проведіть пряму схід — захід через центр кола;

3) накресліть ще два однакові кола із центрами в точках перетину проведеної прямої з початковим колом за допомогою мотузки тієї самої довжини (*рис. 1.35*);

4) визначте точки перетину кіл і центри (крім початкового), що є вершинами правильного шестикутника.

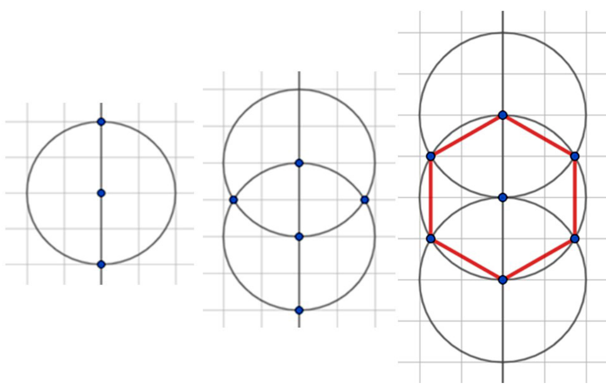


Рис. 1.35. Побудова правильного шестикутника

Більшість будинків хоган мають вісім стін. Будівля математичного факультету Коледжу Діне має восьмикутну основу, як і багато інших будівель кампусу (*рис. 1.36*).

Рис. 1.36. Коледж Діне та його кампус

Використайте мотузку, щоб створити правильний восьмикутник. Маємо дві поради:

1) мотузку можна скласти вдвоє, щоб розділити відрізок навпіл (слугує також для дуг);

2) можна утворити прямий кут, якщо побудувати прямі схід — захід та південь — північ.

Застосуйте мотузку і врахуйте сторони світу, щоб отримати різні геометричні фігури: паралельні прямі, правильний трикутник, квадрат, п’ятикутник та інші правильні многокутники.

А ще «допоможіть» древнім грекам із відомими задачами, які не розв’язані в евклідовій геометрії: трисекція кута і квадратура круга. Також складіть набір аксіом будинків хоган.

Цікавий факт

У багатьох народів будують споруди без лінійок, циркуля або транспортира. Щоб виміряти довжину чи кути, вони використовують частини тіла: долоні, руки, ноги. Також застосування знаходять природні матеріали: палички й камінці.

Теми дослідницьких робіт

• *Аксіоматичний підхід у геометрії.*

Порівняти аксіоми Евкліда й оригамі (аксіоми Худзіти); дослідити, як ці набори аксіом пояснюють різні способи побудови фігур (п'ятикутник, трисекція кута); з'ясувати, чи можна скласти власний набір аксіом для будівель хоган або інших традиційних споруд.

• *Геометричні доведення в оригамі.*

Проаналізувати аксіоми оригамі на прикладі простих фігур (п'ятикутник, правильні многокутники); дослідити, як геометрія оригамі розширює чи обмежує класичні побудови.

• *Одиниці вимірювання та історія їхнього розвитку.*

Дослідити, як розвивалися одиниці вимірювання довжини, кутів і площі у різних культурах і як це впливало на архітектуру, як здійснювалися побудови без стандартних інструментів (за допомогою мотузки, частин тіла людини).

Задачі для самостійного розв'язання

1. Побудуйте рівносторонній трикутник.
2. Побудуйте прямокутний трикутник із кутом 30°.
3. Знайдіть центр заданого кола за допомогою циркуля і лінійки.
4. Побудуйте дотичну до кола, що проходить через точку A поза колом, за допомогою циркуля і лінійки.
5. Визначте, яку фігуру треба викласти з мотузки певної довжини, щоб вона мала найбільшу площу, — коло, прямокутник або трикутник.

6.* Побудуйте дотичну до кола за допомогою лише лінійки.

1.4. Камінці та цегляні стіни

Мета:

- розвивати навички розв'язування задач на обчислення членів послідовності Фібоначчі, моделювання реальних ситуацій, візуалізацію геометричних побудов.

Під час заняття в учнів формуються такі компетентності:

- здійснення дослідження історичного контексту і значення чисел Фібоначчі;
- використання рекурентних співвідношень для обчислення кількості способів виконання дій, пов'язаних із переміщенням чи побудовою;
- застосування чисел Фібоначчі для аналізу маршрутів, відстаней, практичних моделей;
- представлення задач графічно;
- виявлення прикладів використання чисел Фібоначчі у природі, мистецтві, архітектурі та науці;
- виявлення закономірностей процесів у повсякденному житті.

Послідовність Фібоначчі названа на честь математика Леонардо Пізанського, відомого як Фібоначчі, який описав її у своїй праці «Книга абака» («Liber Abaci») у 1202 році. Фібоначчі використав таку послідовність, щоб розв'язати задачу про зростання популяції кроликів за певних умов.

Числа Фібоначчі — це послідовність чисел, де кожен наступний член є сумою двох попередніх. Послідовність починається з чисел 0 та 1 і виглядає так: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 і так далі.

Завдяки своїм унікальним властивостям числа Фібоначчі стали основою для багатьох відкриттів і знайшли застосування в різноманітних сферах. Вони не лише математичний феномен, а й універсальна модель природних процесів, що допомагає розуміти світ навколо нас. Їхні пропорції використовуються в архітектурі й мистецтві для створення гармонії, бо числова послідовність Фібоначчі тісно пов’язана із золотим перетином — співвідношенням, що вважається естетично ідеальним. У біології послідовність Фібоначчі відображається в багатьох природних об’єктах: розташуванні листя на стеблі, формі квіток, структурі шишок, спіралях мушель, забезпечуючи ефективність росту та розподіл ресурсів. Комп’ютерні алгоритми використовують цю послідовність для швидкого розв’язання задач оптимізації, а в економіці вона допомагає аналізувати динаміку ринків. Числа Фібоначчі мають суттєве значення не лише в математиці, а й у природі, мистецтві, архітектурі.

Фотографії на рис. 1.37 були зроблені на території племені навахо, і одна — в Колорадо.

Рис. 1.37. Квітки, кількість пелюсток яких відповідає числам Фібоначчі

? Запитання для допитливих

- Скільки пелюсток у кожної квітки, зображеної на рис. 1.37?

Для геометричної візуалізації ідей, пов'язаних із числами Фібоначчі, накреслимо прямокутник 13×8.

Завдання

1. Розділіть прямокутник на найбільший можливий квадрат і прямокутник, що залишився. Дайте відповідь на запитання про те, які розміри отриманого прямокутника.

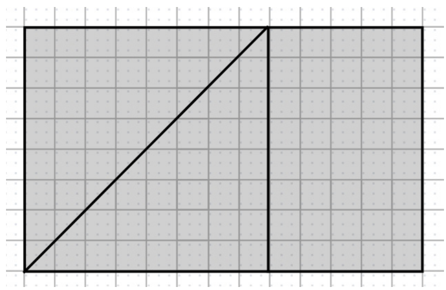


Рис. 1.38. Прямокутник із виділеним квадратом і його діагоналлю

2. Накресліть діагональ квадрата (*рис. 1.38*).
3. Із отриманим прямокутником (п. 1) повторіть виконання завдань 1 і 2. Зобразіть новий квадрат так, щоб одна з його діагоналей починалася в кутку, суміжному з тим, звідки була проведена діагональ більшого квадрата (п. 2).
4. Продовжуйте виконувати завдання 1–3, доки це можливо.

Зверніть увагу на те, що всі побудови відбувалися *всередині* прямокутника 13×8. Чи можна здійснити подібне, але *зовні* прямокутника?

Якщо виписати довжини сторін квадратів, які ми отримали, у порядку зростання, почавши з найменшого, отримаємо таку послідовність: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13. Ці числа називаються числами Фібоначчі, а така послідовність — послідовністю Фібоначчі.

Задача 1.14
Числа Фібоначчі та кролики

Уявімо, що ми маємо двох кроликів (самця і самку), які щойно народилися. Потрібно розв'язати задачу, дотримуючись таких чотирьох умов:

1) кролики мають досягти статевої зрілості, що наступає після першого місяця їхнього життя;

2) кожна пара має народжувати нову пару кроликів на початку кожного місяця, починаючи з кінця другого місяця;

3) кожна нова пара кроликів за місяць теж має почати давати потомство;

4) кролики ніколи не гинуть.

Обчисліть, скільки пар кроликів буде за 12 місяців, якщо спочатку була лише одна пара.

Розв'язання

Розв'язання цієї задачі формує послідовність Фібоначчі, де кожне наступне значення дорівнює сумі двох попередніх, оскільки нові пари кроликів додаються до попередніх.

1. Нехай F_{n} — кількість пар кроликів після n-го місяця.
2. Початкові умови:
   $F_1 = 1$ (на початку є одна пара).
   $F_2 = 1$ (на другий місяць вони ще не розмножуються).
3. Рекурентне співвідношення:

$$F_{\mathrm{n}} = F_{\mathrm{n}-1} + F_{\mathrm{n}-2},$$

$F_{\mathrm{n}-2}$ — це кількість пар, що вже існує, а $F_{\mathrm{n}-1}$ — кількість новонароджених пар.

Обчислимо кількість пар кроликів для 12 місяців:

$$F_1 = 1;\ F_2 = 1;$$
$$F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2;$$
$$F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3;$$
$$F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5;$$
$$F_6 = F_5 + F_4 = 5 + 3 = 8;$$
$$F_7 = F_6 + F_5 = 8 + 5 = 13;$$
$$F_8 = F_7 + F_6 = 13 + 8 = 21;$$
$$F_9 = F_8 + F_7 = 21 + 13 = 34;$$
$$F_{10} = F_9 + F_8 = 34 + 21 = 55;$$
$$F_{11} = F_{10} + F_9 = 55 + 34 = 89;$$
$$F_{12} = F_{11} + F_{10} = 89 + 55 = 144.$$

Відповідь: за 12 місяців буде 144 пари кроликів.

Задача 1.15
Камінці

Кілька камінців, покладених на дно неглибокого потічка, дають змогу дістатися з одного берега на інший. Визначте, скільки є можливих способів потрапити на берег, якщо стояти на одному з камінців. Можна ступати чи на наступний камінець, чи через один. Якщо ви знаходитесь на камінці 1, ступити можна лише на берег (*рис. 1.39*), тобто існує лише 1 спосіб.

Рис. 1.39. Можливий варіант ходу з камінця 1

Якщо ж ви знаходитесь на камінці 2, то можна ступити або на камінець 1, а потім на берег (крок + крок), або стрибнути відразу на берег (*рис. 1.40*).

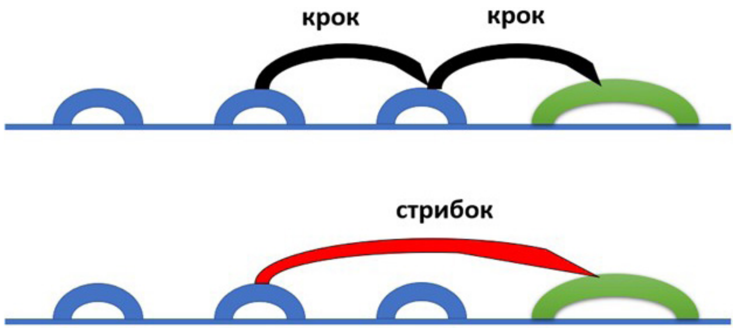


Рис. 1.40. Можливі варіанти ходу з камінця 2

Із камінця 3 можна у три кроки дістатися берега (крок + крок + + крок), або ступити на камінець 2, а потім перестрибнути через 1 на берег, або стрибнути на камінець 1, потім крок (*рис. 1.41*).

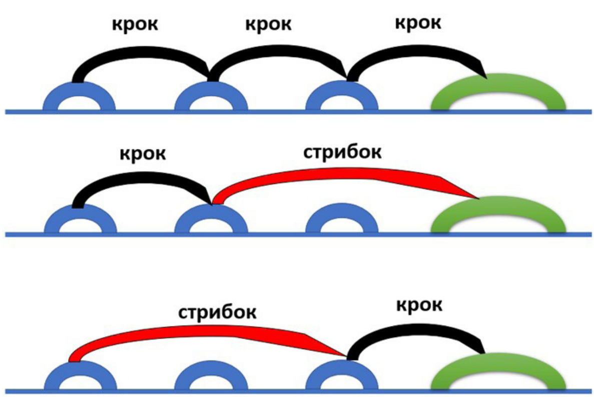


Рис. 1.41. Можливі варіанти ходів, починаючи з камінця 3

Визначте, скільки є способів дістатися берега, якщо стояти на камінцях 4, 5, 10.

Розв'язання

Із камінця 4 можна виконати п'ять дій:
1) крок + крок + крок + крок;
2) стрибок + крок + крок;
3) крок + стрибок + крок;
4) крок + крок + стрибок;
5) стрибок + стрибок.

Із камінця 5 — вісім дій:
1) крок + крок + крок + крок + крок;
2) крок + стрибок + крок + крок;
3) крок + крок + стрибок + крок;
4) крок + крок + крок + стрибок;
5) крок + стрибок + стрибок;
6) стрибок + крок + крок + крок;
7) стрибок + крок + стрибок;
8) стрибок + стрибок + крок.

Отже, результати виконання були частиною ряду Фібоначчі: 1, 2, 3, 5, 8. Спробуємо це довести. Нехай ми стоїмо на камінці n. Із нього ми можемо зробити крок на камінець $n - 1$, тоді кількість способів дістатися берега буде дорівнювати кількості способів дістатися берега з камінця $n - 1$. Якщо ж спочатку ми стрибнемо через один камінець, то кількість способів дістатися берега буде як для камінця $n - 2$. Отже, кількість способів дістатися берега для камінця n — це сума кількостей способів для попередніх двох чисел, що і визначатиме низку наших дій як ряд чисел Фібоначчі із зсовуванням на один (у послідовності Фібоначчі на початку 1, 1, 2, а не 1, 2, як у нас). Тобто, щоб дізнатись кількість дій із застосуванням камінця 10, треба порахувати одинадцяте число Фібоначчі.

Задача 1.16
Цегляні стіни

Звичайна цеглина має довжину вдвічі більшу, ніж висоту: довжина становить 2 одиниці, а висота — одну. Ми хочемо побудувати стіну заввишки дві одиниці. Є різні способи укладання цегли, що залежать від довжини стіни (*рис. 1.42*):

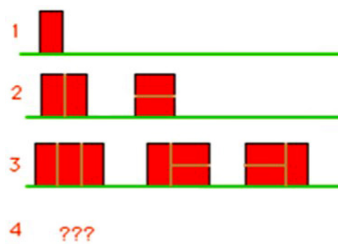


Рис. 1.42. Способи закладання цеглинок для довжини стіни 1, 2, 3

1) довжину в 1 одиницю можна отримати одним способом — поставити цеглину вертикально;

2) отримати довжину у 2 одиниці можна лише такими способами:
• дві цеглини, поставлені одна біля іншої;
• дві цеглини, покладені одна на одну;

3) довжину у 3 цеглини можна отримати трьома способами.

Визначте, скільки варіантів буде для створення такої стіни завдовжки 4, 5, 10 одиниць.

Розв'язання

Звернемо увагу на деяку схожість із задачею 1.15. Роздивимось першу цеглинку, що має два варіанти укладання:

1) вертикальний (тоді нам залишається замостити прямокутник $(n-1)\times 2$);

2) горизонтальний (тоді над нею має бути ще одна цеглина і замостити залишиться прямокутник $(n-2)\times 2$).

Як і в задачі 1.15, кількість варіантів для n залежить від двох попередніх значень, і починаємо ми з 1 і 2 варіантів для довжин 1 і 2 відповідно.

Інтерактивне завдання

Випишіть послідовно перші двадцять чисел Фібоначчі: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765. Потім оберіть два довільні міста на Google Maps і прокладіть маршрут.

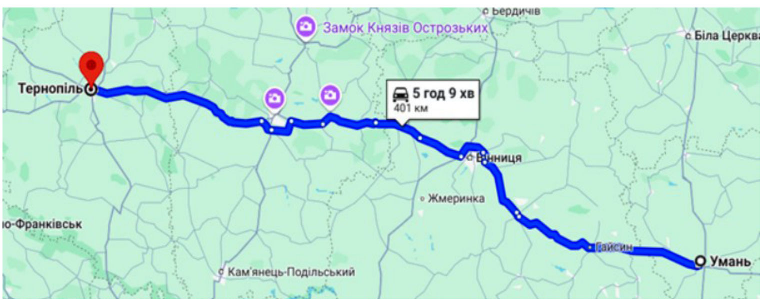


Рис. 1.43. Шлях між Уманню і Тернополем

Припустимо, що прокладено маршрут між Уманню і Тернополем (*рис. 1.43*). На Google Maps такий шлях має довжину 401 км. Розкладемо 401 на суму чисел Фібоначчі:

$$401 = 377 + 21 + 3.$$

Знайдемо ці числа у виписаній послідовності:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89,144, 233, 377.$$

Розглянемо суму тих чисел Фібоначчі, що стоять перед виділеними вище:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89,144, 233, 377,$$

$$2 + 13 + 233 = 248.$$

Отримане число 248 є приблизним значенням відстані між Уманню і Тернополем у *милях*.

Дійсно, 401 км дорівнює 249,17 милі.

Можна зробити і навпаки. Припустимо, що у вас є відстань між двома містами у милях (*рис. 1.44*).

Рис. 1.44. Шлях між Сан-Хосе і Кері

Переведемо 2793 милі у кілометри. Для цього розкладемо 2793 на суму чисел Фібоначчі:

$$2793 = 2584 + 144 + 55 + 8 + 2.$$

Знайдемо ці числа у виписаній послідовності:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181.$$

Розглянемо суму тих чисел Фібоначчі, що стоять після виділених вище:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181,$$

$$3 + 13 + 89 + 233 + 4181 = 4519.$$

Отримане число 4519 є приблизним значенням відстані між містами Сан-Хосе і Кері в *кілометрах*. 2793 милі дорівнюють 4494,9 кілометра.

Це перетворення пояснюється такими трьома фактами:

1) кожне натуральне число можна однозначно представити як суму одного або кількох різних чисел Фібоначчі так, щоб сума не включала жодних двох послідовних чисел Фібоначчі (*рис. 1.45*);

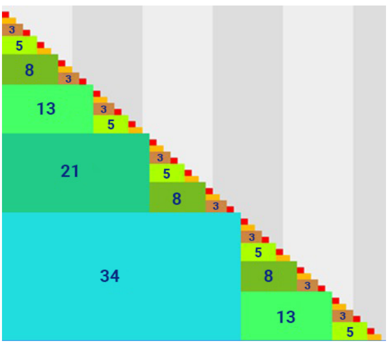


Рис. 1.45. Розкладання натуральних чисел з використанням послідовності Фібоначчі

2) співвідношення двох послідовних чисел Фібоначчі прямує до золотого перетину, що позначається грецькою літерою φ, і $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2 = 1{,}618033$...

3) 1 миля $= 1{,}609344$ кілометра.

Цікавий факт

Є лише чотири 4-цифрових числа Фібоначчі — 1597, 2584, 4181 і 6765, отже, 2023 не є таким. Але 2023 має іншу доволі визначну особливість:

$$2023 = (2 + 0 + 2 + 3) \cdot (2^2 + 0^2 + 2^2 + 3^2)^2 = 7 \cdot 17^2.$$

Його найменший простий множник 7 є сумою його цифр, а його найбільший простий множник 17 є сумою квадратів його цифр. І число 2023 є єдиним 4-цифровим числом із такою властивістю. Насправді чисел із такою властивістю мало. Перші шість із послідовності таких чисел: 133, 803, 2023, 106 811, 383 177, 1 071 949. Ця послідовність має назву A217690, згідно з Онлайн-енциклопедією цілочисельних послідовностей (OEIS) [5].

Теми дослідницьких робіт

• *Числа Фібоначчі.*

Дослідити, як рекурентні співвідношення Фібоначчі моделюють різні життєві ситуації (популяції, маршрути, укладання плитки чи цегли).

• *Золотий перетин.*

Дослідити, який зв'язок між числами Фібоначчі й золотим перетином (рослини, мушлі, шишки, фасади будівель, відстані на картинах); створити власну композицію чи малюнок із використанням золотого перетину.

• *Спіраль Архімеда.*

Дослідити, як формується спіраль Фібоначчі в природі і чим вона відрізняється від спіралі Архімеда.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Знайдіть можливі способи покриття прямокутника 10×1 квадратиками 1×1 і гральними кісточками доміно 2×1. Фігури мають покрити прямокутник без накладань однієї на іншу. Визначте кількість покриттів прямокутника $n \times 1$ для довільного числа n.

2. На рис. 1.46 зображена бджола, яка починає рухатися від краю комірок у вулику. Вона може почати з комірки 1 або комірки 2 і рухатися лише вправо (тобто лише до комірки з більшим номером). Є тільки один шлях до комірки 1, але два до комірки 2: безпосередньо або через комірку 1. До комірки 3 можна дістатися через 1, 2, 3; 1, 3 або 2, 3, тобто є три різні шляхи. Визначте, скільки може бути шляхів від початку до клітинки номер n.

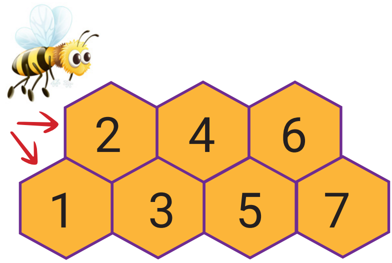


Рис. 1.46. Розташування комірок і шлях бджоли

3. Доведіть, що існує $F(n+2)$ способів розфарбувати ряд із n квадратів у червоний чи коричневий так, щоб жодні два червоні квадрати не мали спільної сторони.

4. Доведіть, що $F(1)^2 + F(2)^2 + \ldots + F(n)^2 = F(n) \times F(n+1)$. *Підказка*. Подивіться на прямокутник 8 × 13 з усіма квадратами, що є всередині (*рис. 1.47*). Обчисліть його площу двома різними способами. Узагальніть цей результат за допомогою методу математичної індукції.

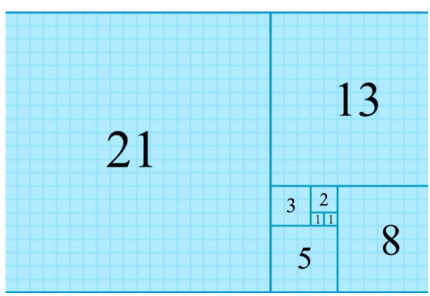


Рис. 1.47. Зв'язок між числами Фібоначчі й квадратами

5. Доведіть, що сусідні числа Фібоначчі взаємно прості (не мають спільних простих дільників).

6. Доведіть, що кожне п’яте число Фібоначчі ділиться на 5 (для кожного n число $F(5n)$ кратне 5). Обґрунтуйте, чи можна узагальнити такий результат.
7. Доведіть, що суми біноміальних коефіцієнтів на діагоналях трикутника Паскаля є числами Фібоначчі (*рис. 1.48*). *Примітка.* Для розв’язання цієї задачі необхідно ознайомитись із трикутником Паскаля.

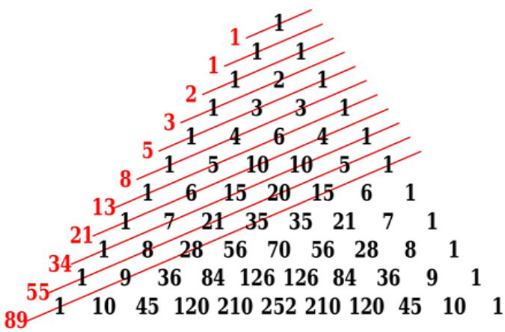


Рис. 1.48. Діагоналі трикутника Паскаля утворюють числа Фібоначчі

1.5. Оповідання і моделювання

Мета:

- розвивати навички застосування математики як інструменту побудови моделей і дослідження взаємозв'язків у процесі розв’язування абстрактних задач, що передбачають застосування нестандартних підходів до вирішення проблем;
- формувати комунікативні навички і вміння працювати в команді;
- умотивовувати до більш глибокого вивчення математики.

Під час заняття в учнів формуються такі компетентності:

- інтегрування вигаданих історій у математичні задачі, наповнення їх персонажами, сюжетом і мотивацією;
- розроблення стратегії вирішення проблем у межах заданих правил;
- створення історії з альтернативною реальністю;
- адаптування математичних задач до різних сценаріїв;
- досягнення мети під час роботи в команді.

Математика — це не лише наука з її фундаментальними твердженнями і формулами, а й засіб дивитися на світ крізь призму логіки, послідовності та взаємозв’язків. Вигадування пов’язаних з математикою історій об’єднує креативність із логікою, робить складні задачі більш цікавими та зрозумілими.

Розроблення задач, завдань, оповідань, головоломок із математичним змістом сприяє усвідомленню того, як математичні ідеї та поняття застосовують у різних контекстах. Захопливі історії-задачі поглиблюють знання математики, розвивають уяву та здатність аналізувати умови, допомагають оживити абстрактні задачі та зробити їх невід'ємною частиною пригодницької розповіді чи казки.

Такий підхід мотивує до пошуку нестандартних рішень, навчає сприймати математику як важливий інструмент для вирішення широкого кола проблем, а також забезпечує усвідомлення того, що математичні завдання можуть перетворюватися на захопливі сюжети, а кожна деталь, правило чи умова стають у пригоді для знаходження правильної відповіді.

Застосування технології інтерактивного навчання забезпечить результативність виконання завдання щодо розроблення задач-історій у процесі активної взаємодії між учнями, вихованцями. Їхня спільна діяльність — не лише обмін знаннями й ідеями, а й особливий внесок кожного, що забезпечує формування навичок взаємної підтримки для досягнення визначеної мети.

Інтерактивна вправа
Головоломка про міст і факел

Вправа спрямована на формування креативного підходу до розв'язання навчального завдання, розвиток комунікативних навичок і вміння працювати в команді.

В основі — класичний тип головоломок під назвою Bridge and Torch Puzzles. Головоломки про міст і факел — логічні задачі, за умовою яких група людей має перейти міст уночі за допомогою одного факела, дотримуючись правил і обмежень.

Особа А долає міст за 1 хв, особа В — за 2 хв, особа С — за 4 хв, а особа D — за 8 хв. Надворі темно, тому їм треба мати факел, щоб не впасти з мосту.

Двоє осіб, одна з яких тримає факел, можуть пройти разом, але якщо на міст зайдуть більше двох людей, то він зламається. Усі четверо осіб повинні перейти міст, маючи лише один факел і 15 хв на це. Чи вдасться їм перейти на інший бік?

Щоб скласти подібні задачі-історії чи головоломки, маємо звернути увагу на такі деталі:

• *персонажі:* хто вони (ви, друзі, тварини, герої з вашої улюбленої книги чи фільму); за яких умов і як пересуваються (можливо, хтось із них рухається повільніше чи лише разом із кимось);

• *умови:* чому персонажі мають поспішати виконати завдання (запізнюються, втікають, мають обмаль часу, виконують чиєсь завдання чи прохання); для спрощення можна передбачити однакову швидкість в усіх тощо;

• *альтернативна реальність:* придумайте цікавий сюжет, збільшуйте чи зменшуйте кількість персонажів та їхні можливості, ускладнюйте завдання, робіть можливим застосування різної кількості предметів та об’єктів тощо; для деталізації застосовуйте будь-яку дрібницю, що може призвести до катастрофи, блискучого повороту сюжету або математичного трилеру.

Завдання про картки

В основі завдання — класична головоломка під назвою Wason Selection Task (див. [18]). Завдання Вейсона про вибір — це логічна головоломка, розроблена когнітивним психологом Пітером Вейсоном. Вона використовується для вивчення критичного мислення, логіки та здатності людей до перевірки правил.

Рис. 1.49. Картки з цифрами й кольорами

На одному боці картки написано цифру (1 чи 2), а інший бік — кольоровий (червоний чи жовтий). На столі 4 картки (рис. 1.49): 1, 2, червона і жовта. Зазначено: «Якщо з одного боку картки цифра 1, то з іншого боку картка червона». Скільки карток необхідно перевернути, щоб дізнатися, чи написане в записці є правдою?

Розглянемо цю задачу в контексті того, що є персонажі з обов'язками та діями, які дозволені лише одному типу персонажів. Завдання — створити версію задачі; описати, як її розв'язати. Дотримуйтесь виконання п'яти пунктів послідовно:

1) визначте місце (наприклад, університет, де виконують завдання тесту);

2) оберіть два типи персонажів (студенти і викладачі);

3) окресліть дію, яка дозволена лише одному типу персонажів (наприклад, лише викладачі можуть бачити аркуші з відповідями до тесту);

4) визначте дію, яка дозволена обом типам персонажів (наприклад, усі можуть бачити запитання тесту);

5) поставте запитання про те, що має бути перевірено для того, щоб дізнатися, чи ваші персонажі схибили (наприклад, про бейджі, конверти із запитаннями, відповідями).

Питання для обговорення

- Як допомагає драматизація у розв’язанні логічних задач?
- Чи змінює вона підхід до розв'язання класичної головоломки?

Теми дослідницьких робіт

• *Ефект Вейсона: помилки у логічних задачах на вибір.*

Провести мінідослідження: надати друзям задачу Вейсона для розв’язання у класичному варіанті й у форматі вигаданої історії. Порівняти результати: чи допомагає сценарій (наприклад, університет і бейджі) правильно перевірити правило. Проаналізувати, як контекст підвищує точність логічних рішень.

• *Задачі про переправу.*

Виявити, скільки варіантів і як знайти оптимальний, чи завжди є єдиний оптимальний план переправи, якщо змінити кількість персонажів і правила. Скласти власну головоломку про переправу (наприклад, з тваринами, героями відомої комп’ютерної гри тощо). Знайти всі можливі сценарії: які варіанти правильні, а які — хибні. Побудувати схему (дерево рішень), що показує різні шляхи і мінімальний час переправи.

Задачі для самостійного розв’язання

1. Троє місіонерів і троє людожерів мають перебратися через річку. У них є один човен, у якому поміщаються тільки двоє. Щоб уникнути трагедії, не можна залишати разом більше людожерів, ніж місіонерів. Як місіонерам і людожерам переправитися через річку так, щоб залишитися живими?

2. Мисливець повинен перевезти через річку вовка, козу й капусту. Однак човен настільки малий, що в ньому може поміститися мисливець, а з ним або вовк, або коза, або капуста. Вовка не можна залишити з козою, а козу із капустою. Що робити мисливцю? Як перевезти всіх на інший бік річки так, щоб вовк не з'їв козу, а коза не з'їла капусту?
3. Сто в'язнів щойно прибули до в'язниці. Наглядач повідомив їх про те, що від наступного дня кожного з них помістять в ізольовану камеру, тому в'язні не зможуть спілкуватися між собою. Кожного дня наглядач обиратиме одного з ув'язнених навмання і приводитиме його в кімнату для допитів, де є лише лампочка з тумблером. Ув'язнений матиме можливість вмикати й вимикати лампочку за бажанням. Він також може висловити думку про те, що всі ув'язнені уже відвідали кімнату для допитів. Якщо це справді так, то всіх ув'язнених звільнять, але якщо ні, то стратять. Після оголошення повідомлення наглядач іде геть, а в'язні збираються разом, щоб обговорити свої подальші дії. Чи можуть вони домовитися про план, який гарантуватиме їм свободу?
4. Двоє людей одночасно підійшли до річки. Біля берега був човен, у якому лише один міг переправитися на протилежний берег. Однак вони змогли вирішити проблему. Яким чином це можливо зробити?

Розділ 2

ІГРИ, ЗАДАЧІ ТА РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ЇХ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

2.1. Метод математичної індукції

Математична індукція — метод, що часто використовується для доведення і розв'язування задач загального вигляду, тобто для змінної n, де n — натуральне число. У виданні ми неодноразово звертаємося до цього методу розв'язування задач загального характеру, що демонструють залежні від n закономірності.

Метод математичної індукції широко використовують у різних розділах математики й суміжних із нею науках. Він є ефективним засобом доведення рівностей, наприклад: формул для сум арифметичних і геометричних прогресій, квадратів і кубів натуральних чисел. Цей метод також допомагає підтвердити істинність нерівностей для всіх n.

У комбінаториці метод математичної індукції дає змогу визначити кількість способів вибору, розподілу чи перестановки об'єктів.

Крім того, він часто використовується для роботи з рекурсивними послідовностями, зокрема під час доведення формул для загального члена таких послідовностей. У геометрії його застосовують у задачах, пов'язаних із розбиттям фігур чи підрахунком кількості елементів у геометричних побудовах.

Задача 2.1

Доведіть формули для суми перших n натуральних чисел.

Твердження. Сума перших n натуральних чисел дорівнює:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Доведення за допомогою математичної індукції

База індукції. Для $n = 1$ маємо:

$$\frac{1 \times (1+1)}{2}.$$

Припущення індукції. Нехай для деякого $k \geq 1$ твердження справедливе, тобто:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Крок індукції. Доведемо, що твердження справедливе для $k + 1$:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k + 1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k + 1).$$

Винесемо $(k + 1)$ за дужки:

$$\frac{k(k+1)}{2} + (k + 1) = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Таким чином, формула реалізується для $k + 1$.

За принципом математичної індукції твердження справедливе для всіх $n \geq 1$.

Задача 2.2

Доведіть рівності для степенів двійки за допомогою математичної індукції.

Твердження. Для всіх $n \geq 1$ виконується рівність:

$$2^n - 1 = 1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{(n-1)}.$$

База індукції. Для $n = 1$:

$$2^1 - 1 = 1.$$

Припущення індукції. Припустимо, що для деякого $k \geq 1$ виконується:

$$2k - 1 = 1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{(k-1)}.$$

Крок індукції. Доведемо, що твердження виконується для $k + 1$:

$$2^{k+1} - 1 = 2 \times 2^k - 1 = 2^k + 2^k - 1 = (2^k - 1) + 2^k.$$

За індукційним припущенням підставимо $2^k - 1$:

$$(1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{(k-1)}) + 2^k.$$

Це дорівнює сумі:

$$1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{(k-1)} + 2^k.$$

Отже, твердження виконується для $k + 1$.

За принципом математичної індукції рівність справедлива для всіх $n \geq 1$.

2.2. Ігри й задачі

2.2.1. Ігри з трикутниками

1. Обчисліть площу в клітинках фігур, зображених на рис. 1.9.

Розв'язання

Для того щоб обчислити площу фігур, розіб'ємо їх на фігури, площі яких визначити зможемо — прямокутники й трикутники. Зробити це можна так, як зображено на рис. 2.1.

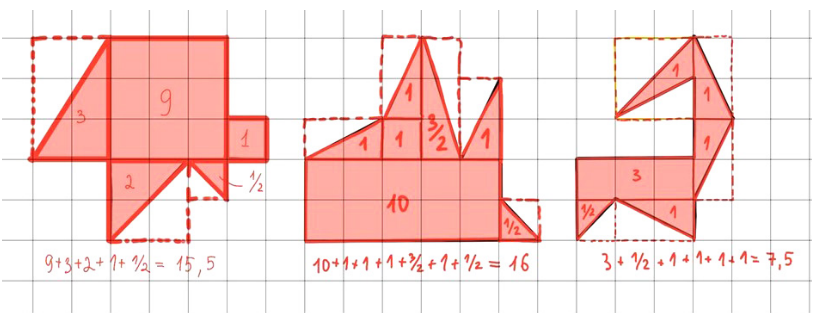


Рис. 2.1. Розбиття неправильних фігур
на прямокутники і трикутники для визначення їхньої площі

2. Дайте відповідь на запитання про те, чи можна фігури на рис. 1.10 розрізати на чотири рівні частини по лініях сітки.

Розв'язання

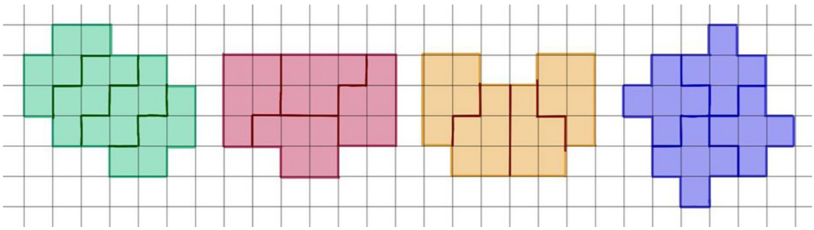


Рис. 2.2. Варіанти розрізання фігур на 4 однакові

Для останньої фігури на рис. 1.10 це, на жаль, зробити неможливо, адже площа сірої фігури — 15 клітинок, що націло на 4 не ділиться.

Зауваження. Наведені вище варіанти розрізання фігур можуть бути не єдиними можливими. Спробуйте знайти інші. Як багато різних варіантів вам вдалося знайти? Можливо, ви придумаєте схожі власні завдання.

3. Визначте кількість різних прямокутних трикутників із цілими катетами та площею 12 клітинок.

Розв'язання

Ми знаємо, що площа прямокутного трикутника дорівнює половині добутку його катетів. Отже, якщо $S = 12$, то добуток катетів a і b дорівнює $a \times b = 24$. Оскільки за умовою катети цілочисельні, тобто a і b — цілі числа більше 0, тоді a має бути дільником числа 24, тобто можливі значення — це $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$. Можливі значення для пар чисел (a, b) — це $\{(1, 24), (2, 12), (3, 8), (4, 6), (6, 4), (8, 3), (12, 2), (24, 1)\}$. Але зауважимо, що прямокутні трикутники з $a = 2$, $b = 12$ і $a = 12$, $b = 2$ однакові, отже, лише одна з пар $(2, 12)$ чи $(12, 2)$

дає новий трикутник. Усі можливі варіанти зводимо до $\{(1, 24), (2, 12), (3, 8), (4, 6)\}$ (*рис. 2.3*).

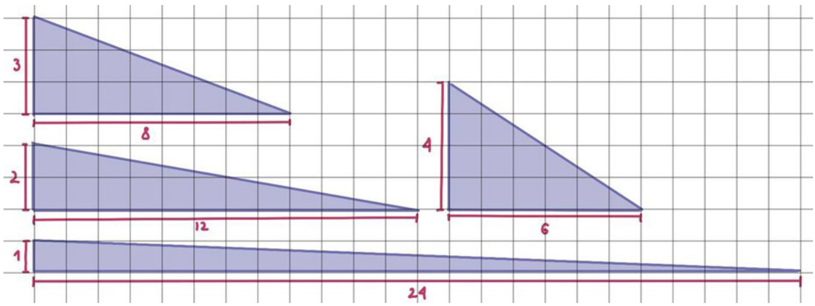


Рис. 2.3. Прямокутні трикутники з цілочисельними катетами і площею 12

4. Доведіть, що після того, як трикутник розділити середніми лініями, утворяться чотири рівні трикутники.

Середньою лінією трикутника називається відрізок, що сполучає середини двох його сторін.

Розв'язання

Розглянемо трикутник ABC. Нехай D, E, F — середини сторін BC, AC, AB відповідно. Проведемо середні лінії трикутника FE, ED, DF.

Середня лінія трикутника, що сполучає середини двох сторін, є паралельною третій стороні трикутника і дорівнює половині довжини цієї сторони. Довести це можна за допомогою теореми Фалеса.

Оскільки $AF = FB$ та $AE = EC$, то $FE \parallel BC$ (паралельність як наслідок з теореми Фалеса).

Доведемо другу частину.

Скористаємось уже доведеною раніше паралельністю: через те що $FE \parallel BC$, маємо $\angle CBA = \angle EFA$.

Далі, оскільки $AB \parallel ED$, реалізується рівність $\angle EFA = \angle FED$ як внутрішніх різносторонніх. Аналогічно внаслідок паралельності $AB \parallel ED$ рівними будуть $\angle FED = \angle EDC$ (*рис. 2.4*).

Аналогічно $\angle BCA = \angle FEA = \angle DFE = \angle FDB$.

Тоді $\triangle BFD = \triangle DEC$, а отже, $FD = CE = \frac{CA}{2}$, тобто середня лінія FD вдвічі менша за сторону AC, якій паралельна (*рис. 2.5*).

Такий підхід застосовується і для інших середніх ліній.

Тоді $\triangle BFD = \triangle DEC = \triangle EDF = \triangle FAE$ за трьома сторонами, а площі рівних трикутників рівні між собою, що треба було довести.

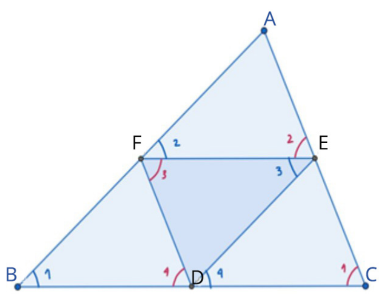


Рис. 2.4. Доведення рівності кутів через паралельність середніх ліній відповідним їм сторонам

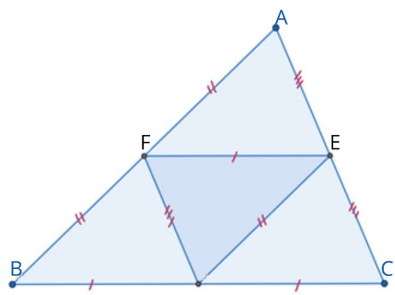


Рис. 2.5. У трикутнику середня лінія вдвічі менша сторони, якій паралельна

5. Доведіть, що медіани трикутника розділяють його на шість рівних за площею трикутників.

Розв'язання

Проведемо медіани AD, BE, CF (*рис. 2.6*). Відомо, що медіани перетинаються в точці з назвою центроїд, позначеній M. Скористаємось задачею 1.1. Відповідно до неї:

• з трикутника BMC:

$$S(BMD) = S(DMC); \qquad (1)$$

• з трикутника CMA:

$$S(CME) = S(EMA); \qquad (2)$$

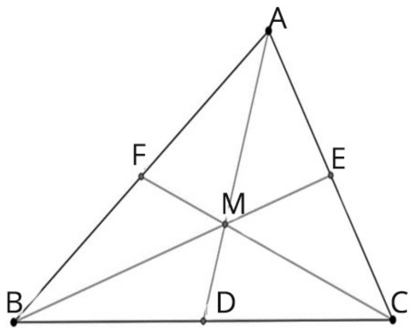


Рис. 2.6. Розбиття трикутника його медіанами

• з трикутника AMB:

$$S(FMA) = S(BMF); \tag{3}$$

• з трикутника BAC і медіани AD:

$$S(BAD) = S(DAC). \tag{4}$$

Виразимо ці трикутники як суму менших:

$$S(BAD) = S(BMD) + S(BMF) + S(FMA) =$$

$$= S(CDM) + S(CME) + S(EMA) = S(DAC).$$

Скористаємося рівностями (2) і (3):

$$S(BMD) + S(BMF) + S(FMA) = S(BMD) + 2 \times S(BMF) =$$
$$= S(CDM) + 2 \times S(CME).$$

З рівності (1):

$$2 \times S(BMF) = 2 \times S(CME);$$

$$S(BMF) = S(CME);$$

$$S(FMA) = S(BMF) = S(CME) = S(EMA).$$

Те ж саме застосовуємо для медіан CF і BE й отримуємо $S(FMA) = S(BMF) = S(CME) = S(EMA) = S(BMD) = S(DMC)$, що необхідно було довести.

6. На медіані BD трикутника ABC позначено точку M так, що $BM : MD = 3 : 1$. Визначте, у скільки разів відрізняється площа трикутника ABC від площі трикутника AMD.

Розв'язання

Зробимо рисунок до задачі (*рис. 2.7*).

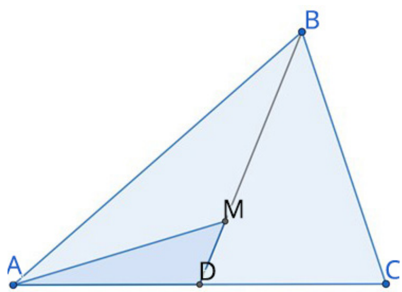


Рис. 2.7. Трикутник з медіаною BD і точкою M

Оскільки $AD = DC$, то $S(ABD) = S(DBC) = \frac{1}{2} \times S(ABC)$ (задача 1.1).

Оскільки $DM = \frac{1}{3} \times MB$, то $S(ADM) = \frac{1}{3} \times S(AMB)$.

Доведемо це:

$S(ADM) = \frac{1}{2}(DM \times h_1)$, де h_1 — довжина висоти, проведеної до сторони DM.

$S(AMB) = \frac{1}{2}(MB \times h_2)$, де h_2 — довжина висоти, проведеної до сторони MB.

Зазначимо, що $h_1 = h_2$, адже це висота, проведена від точки A до прямої DB.

Отже, $S(ADM) = \frac{1}{2}(DM \times h_1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}(MB \times h_1) =$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}(MB \times h_2) = \frac{1}{3}S(AMB).$$

Тоді $S(ADM) = \frac{1}{3}S(AMB) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}S(ABC) = \frac{1}{6}S(ABC).$

7. *Триангуляцією опуклого многокутника* називається розбиття його на трикутники діагоналями. Визначте, на яку кількість трикутників триангулюється опуклий n-кутник.

Розв'язання

Після кількох прикладів можна помітити, що кількість трикутників становить $(n-2)$. Щоб довести це, скористаємось методом математичної індукції.

База індукції. Якщо $n = 3$, маємо один трикутник.

Припущення індукції. Нехай для всіх n, що не перевищують якесь число k, кількість трикутників за триангуляції визначається формулою $(n-2)$.

Індукційний перехід. Розглянемо многокутник із $n = k + 1$ вершиною. Проведемо триангуляцію і подивимось на якусь із проведених діагоналей. Припустимо, що ця діагональ розбиває наш n-кутник на два многокутники. Позначимо кількість вершин першого з них як x, тоді у другого $(n - x + 2)$ вершин, адже вершини нашої діагоналі включаються в обидва многокутники. Зазначимо, що x і $(n - x + 2) < n = k + 1$, отже, не більше k. Тоді можна застосувати наше припущення індукції.

Кількість трикутників у триангуляції першого многокутника: $x - 2$.

Кількість трикутників у триангуляції другого многокутника:

$$(n - x + 2) - 2 = n - x.$$

Отже, $(x - 2) + (n - x) = n - 2$, що закінчує доведення задачі.

2.2.2. Квадрат – відрізка брат

1. Визначте, скільки квадратів мають рожеву або блакитну точку як вершину (*рис. 1.26*). Чи можуть квадрати містити рожеву й блакитну точки одночасно? Знайдіть їхню кількість.

Розв'язання

Усі можливі квадрати зображені на рис. 2.8–2.10. Знайти шукані квадрати можна, розглянувши всі можливі квадрати, для яких наша точка є лівою нижньою вершиною, лівою верхньою вершиною тощо.

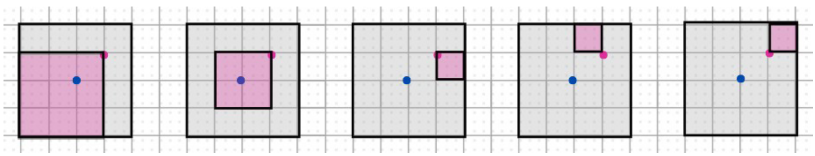


Рис. 2.8. Квадрати, що мають як вершину рожеву точку, але не блакитну

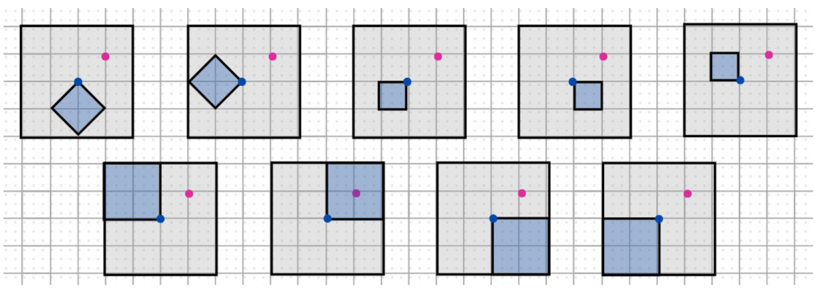


Рис. 2.9. Квадрати, що мають як вершину блакитну точку, але не рожеву

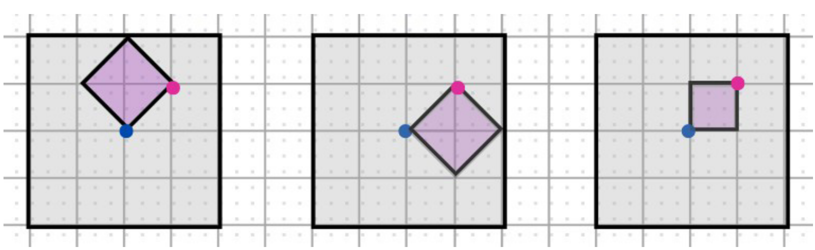


Рис. 2.10. Квадрати, що містять обидві точки як вершини

2. Знайдіть кількість правильних і нахилених квадратів у сітці 4×4, площа яких не більша ніж 9.

Розв'язання

Використаємо результати задачі 1.7. Згідно з формулою, квадратів у сітці 4×4 — 50. Порахуємо кількість квадратів, площа яких більша ніж 9.

Із правильних квадратів площу більшу ніж 9 має один — 4×4.

Кожен нахилений квадрат можна вписати у якийсь правильний квадрат. Усі нахилені квадрати, що вписуються у правильні зі стороною завдовжки не більше ніж 3, матимуть площу, яка менша за площу правильного квадрата, у який вписані. Тоді квадрати, які треба перевірити, це ті, що вписуються у квадрат 4×4 (*рис. 2.11*).

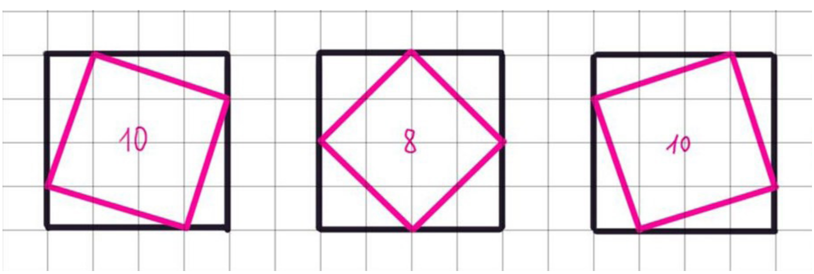


Рис. 2.11. Площі нахилених квадратів, уписаних у квадрат 4×4

Другий квадрат має площу $8 < 9$, отже, відповідає умові. Серед усіх нахилених квадратів площу більшу ніж 9 мають лише два. Тоді є $50 - 1 - 2 = 47$ квадратів, що відповідають умові.

3. Визначте кількість квадратів, які містять більше блакитних точок, ніж рожевих (*рис. 1.27*).

Розв'язання

Порахуємо кількість правильних квадратів, що відповідають умові:

• квадрати 1×1 містять 4 точки, тож необхідно, щоб квадрат мав хоча б 3 блакитні. Таких квадратів три (*рис. 2.12*);

• квадрати 2×2 містять 9 точок, тож хоча б 5 мають бути блакитними. Квадратів, що задовольняють цю умову, чотири (*рис. 2.13*);

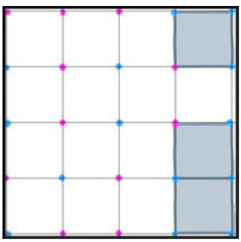


Рис. 2.12. Квадрати 1×1, що містять більше блакитних точок, ніж рожевих

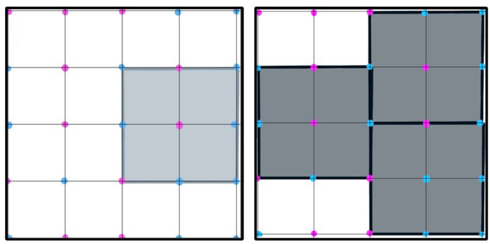


Рис. 2.13. Квадрати 2×2, що містять більше блакитних точок, ніж рожевих

• квадрати 3×3 мають містити хоча б 9 блакитних точок (*рис. 2.14*);

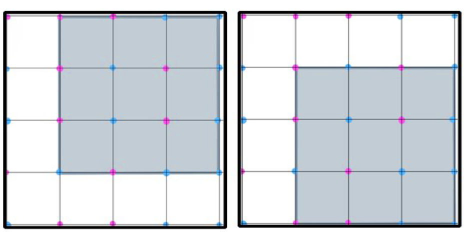


Рис. 2.14. Квадрати 3×3, у яких блакитних точок більше, ніж рожевих

• квадрат 4×4 (зовнішній) містить 14 блакитних точок і 11 рожевих, що відповідає умові.

Загальна кількість шуканих правильних квадратів — 10.

4. По черзі двоє гравців на дошці 5×6 малюють простий квадрат по лініях сітки і вирізають його з дошки. Якщо гравець не зможе зробити хід, він програє. Визначте, хто з гравців має виграшну стратегію. (Вважаємо, що гравці грають правильно і не помиляються.)

Розв'язання

Виграшну стратегію має перший гравець.

Спершу вирізаємо квадрат 4×4 так, як на рис. 2.15. Потім, які б дії не виконував суперник, робимо такий самий хід симетрично до вертикальної осі симетрії прямокутника (*рис. 2.16*).

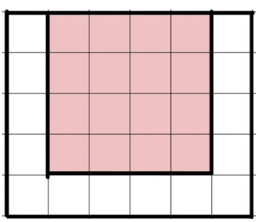


Рис. 2.15. Перший хід переможної стратегії першого гравця

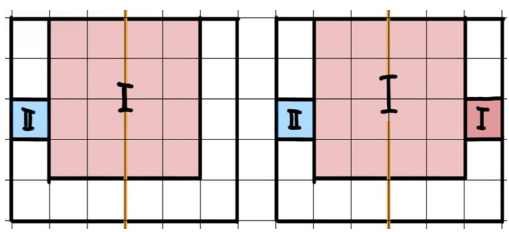


Рис. 2.16. Приклад ходу, симетричного до попереднього ходу суперника

Якщо наш суперник робить хід, то і ми зможемо – з міркувань симетрії. Тому ми не програємо, а переможемо, оскільки гра скінченна.

5. Виконайте завдання, як у задачі 4, для дошки $m \times n$, у якої більша сторона (якщо вони не рівні) парна.

Розв'язання

Для $m = n$ задача є простою, адже перший гравець може вирізати увесь квадрат. Не обмежуючи загальності, вважатимемо, що $m \geq n$. Спробуємо узагальнити стратегію, отриману у задачі 4.

Для зручності розглянемо два варіанти: коли m та n однакової парності та різної.

1. Якщо m і n однакової парності, тоді першим ходом вирізаємо квадрат $n \times n$, розмістивши його в центрі (*рис. 2.17*), а потім використовуємо стратегію симетричних ходів.

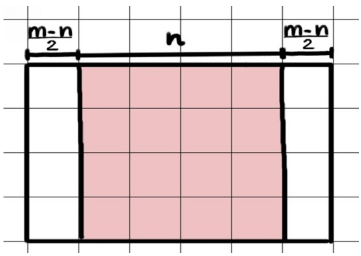


Рис. 2.17. Перший хід для випадку, коли m і n — числа однакової парності

2. Якщо m і n різної парності, а m — парне, то спершу виріжемо квадрат $(n - 1) \times (n - 1)$ аналогічно тому, як робили в задачі 4 (*рис. 2.18*), а потім діятимемо за стратегією симетрії.

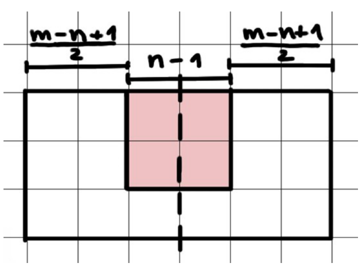


Рис. 2.18. Перший хід для ситуації, коли m і n різної парності

Запитання для допитливих

- Чи можна адаптувати стратегію, якщо m — більша сторона — непарна?

2.2.3. Геометрія будинків хоган

1. Побудуйте рівносторонній трикутник.

Розв'язання

Накреслимо відрізок AB — основу для рівностороннього трикутника. Потім побудуємо коло із центром у точці A і радіусом AB, а також коло із центром у точці B і радіусом AB (*рис. 2.19*). На перетині цих двох кіл знаходиться точка C, бо за побудовою $AC = AB$ і $BC = AB$.

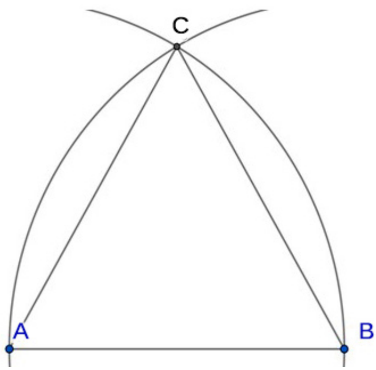


Рис. 2.19. Побудова рівностороннього трикутника

2. Побудуйте прямокутний трикутник із кутом 30°.

Розв'язання

У прямокутного трикутника з кутом 30° гіпотенуза вдвічі більша за катет, що лежить проти цього кута. Накреслимо катет AB. Відкладемо на прямій AB за точкою A відрізок AX так, щоб $AX = AB$. Це можна зробити, накресливши коло із центром у точці A і радіусом AB. До відрізка XB проведемо серединний перпендикуляр. Цей перпендикуляр міститиме другий катет прямокутного трикутника (*рис. 2.20*).

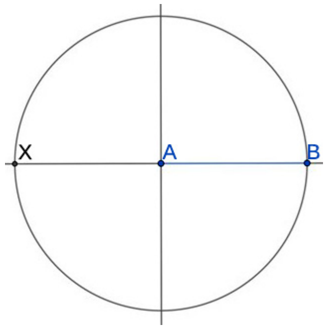


Рис. 2.20. Побудова прямокутного трикутника з кутом 30° (початок)

Тепер накреслимо коло з центром B і радіусом BX. На перетині цього кола й перпендикуляра поставимо точку C — останню вершину нашого трикутника (*рис. 2.21*). Тоді кут $ACB = 30°$, адже сторона AB вдвічі менша за BX, а $BX = BC$ за побудовою.

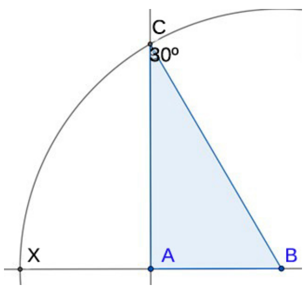


Рис. 2.21. Побудова прямокутного трикутника з кутом 30°

3. Знайдіть центр заданого кола за допомогою циркуля і лінійки.

Розв'язання

Відмітимо три точки A, B, C на колі. Проведемо серединні перпендикуляри відрізків AB і AC (*рис. 2.22*). На перетині цих прямих буде знаходитися центр кола, адже трикутник ABC вписаний у це коло, і серединні перпендикуляри трикутника перетинаються в центрі описаного кола (*рис. 2.22*).

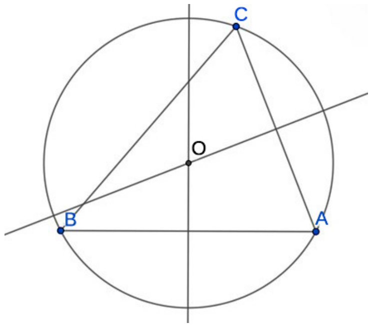


Рис. 2.22. Побудова центра кола

4. Побудуйте дотичну до кола, що проходить через точку A поза колом, за допомогою циркуля і лінійки.

Розв'язання

Визначимо центр кола так, як робили в задачі 3. Далі проведемо відрізок AC. Кут між дотичною і відрізком, що сполучає точку дотику і центр кола, дорівнює $90°$. Геометричне місце усіх точок X, для яких кут $AXO = 90°$, — це коло, у якому AO — діаметр. Побудуємо це геометричне місце точок, визначивши середину відрізка AO — точку M і побудувавши циркулем коло з центром у точці M і радіусом MA. Перетин цього кола і даного в умові буде точкою дотику C (*рис. 2.23*).

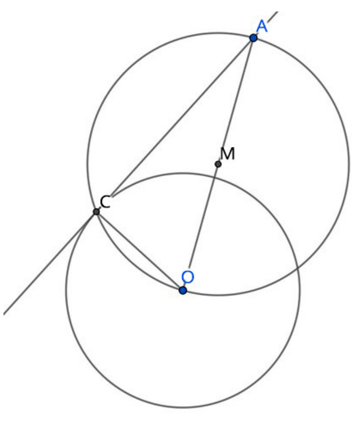


Рис. 2.23. Побудова дотичної до кола

5. Визначте, яку фігуру треба викласти з мотузки певної довжини, щоб вона мала найбільшу площу, — коло, прямокутник або трикутник.

Розв'язання

Визначимо довжину мотузки як l. Порівняємо між собою площі найбільшого можливого кола, прямокутника і трикутника, викладених за допомогою цієї мотузки. Відомо, що довжина кола, периметри квадрата та трикутника дорівнюють довжині мотузки, тобто l. Розглянемо кожну фігуру окремо.

Коло. Довжина кола обчислюється за формулою $l = 2\pi r$, де r — радіус кола. Отже, можемо виразити радіус як $r = l/2\pi$. Площа круга $S = \pi r^2 = \pi(l/2\pi)^2 = l^2/4\pi$.

Прямокутник. Припустимо, що у прямокутника сторони a і b, тож $P = 2(a + b) = l$. Для будь-яких двох додатних чисел a і b справедлива нерівність між середнім геометричним і середнім арифметичним: $\frac{(a+b)}{2} \geq \sqrt{ab}$, де рівність досягається, якщо $a = b$. Підносимо обидві частини до квадрата:

$$\frac{(a+b)^2}{4} \geq ab.$$

Оскільки $2(a + b) = l$, можемо зробити заміну:

$$\frac{l^2}{16} \geq ab.$$

Рівність справджується, коли $a = b = \frac{l}{4}$.

Трикутник. Припустимо, що a, b, c — сторони трикутника і $P = a + b + c = l$. Півпериметр трикутника позначимо як s, тобто $s = \frac{P}{2} = \frac{l}{2}$.

Площа трикутника за формулою Герона:

$$S = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}.$$

Знову використаємо нерівність між середнім геометричним і середнім арифметичним для чисел s, $s - a$, $s - b$, $s - c$:

$$\frac{s + s - a + s - b + s - c}{4} \geq \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)};$$

$$\frac{4s - a - b - c}{4} \geq \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)};$$

$$\frac{4s - 2s}{4} \geq \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)};$$

$$\frac{2s}{4} = \frac{s}{2} \geq \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}.$$

Підносимо обидві частини до квадрата:

$$\frac{s^2}{4} = \left(\frac{l}{2}\right)^2/4 = \frac{l^2}{16} \geq \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)} = S.$$

Рівність справджується, коли $s = s - a = s - b = s - c$, чого бути не може, тобто $S > \frac{l^2}{16}$.

Серед усіх розглянутих нами фігур найбільшу площу за заданого периметру l має коло, бо $4\pi \approx 12{,}57 < 16$.

6.* Побудуйте дотичну до кола за допомогою лише лінійки.

Вказівка. Ця задача відрізняється від 4-ї відсутністю циркуля. Це означає, що можна провести пряму через дві точки, що занадто обмежує наші можливості. Обміркуємо проблему.

Спробуємо спершу з точки X провести три січні (блакитні прямі), що перетинають коло в 6 точках. Проведемо 4 відрізки між цими точками, як показано на рис. 2.24 (червоні). Потім проведемо лінію через перетини цих червоних відрізків (пунктир). У місці, де вона перетинає коло, знаходяться точки дотику шуканих дотичних до кола, що проходять через точку X (дотичні позначені зеленим кольором). Для доведення цього можуть знадобитись більш глибокі знання геометрії, але можна експериментувати, використовуючи такий метод для різних положень точки X.

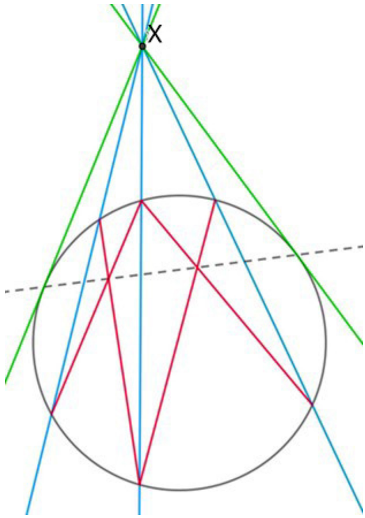


Рис. 2.24. Побудова дотичної лише за допомогою лінійки

2.2.4. Камінці та цегляні стіни

1. Знайдіть можливі способи покриття прямокутника 10×1 квадратиками 1×1 і гральними кісточками доміно 2×1. Фігури мають покрити прямокутник без накладань однієї на іншу. Визначте кількість покриттів прямокутника $n \times 1$ для довільного числа n.

Розв'язання

За допомогою математичної індукції доведемо, що кількість способів покриття прямокутника $n \times 1$ дорівнює n-му числу Фібоначчі.

База індукції. Почнемо з найменшого прямокутника 1×1. Маємо лише один спосіб покрити його — використати один квадратик 1×1. Отже, для прямокутника 1×1 кількість способів покриття дорівнює 1.

Припущення індукції. Уявімо, що нам відома кількість способів покриття прямокутника розміром $k \times 1$ для всіх $k \leq n$. Тепер наше завдання — знайти кількість способів покриття прямокутника розміром $(k+1) \times 1$.

Крок індукції. Ми маємо два варіанти покриття прямокутника $(k+1) \times 1$:

1) можна покласти квадратик 1×1 на початок смуги, що залишає нам прямокутник розміром $k \times 1$ для покриття;

2) можна поставити доміно 2×1 на початок смуги, що залишає нам прямокутник розміром $(k-1) \times 1$ для покриття.

Загальна кількість способів покриття прямокутника $(k+1) \times 1$ дорівнює сумі способів покриття прямокутників розміром $k \times 1$ і $(k-1) \times 1$.

У математичних термінах це можна записати так:

$$f(k+1) = f(k) + f(k-1).$$

Зв'язок із числами Фібоначчі. Ця рекурсивна формула така сама, як і в послідовності чисел Фібоначчі, однак зі зміщеними початковими значеннями. У послідовності Фібоначчі кожне число є сумою двох попередніх:

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2).$$

У нашому випадку кількість способів покриття прямокутника розміром $n \times 1$ дорівнює числу Фібоначчі, але зсунутому на один індекс.

$f(1) = 1$ (це те ж саме, що і F_2 у послідовності Фібоначчі).

$f(2) = 2$ (це те ж саме, що і F_3 у послідовності Фібоначчі).

$f(3) = 3$ (це те ж саме, що і F_4 у послідовності Фібоначчі).

$f(4) = 5$ (це те ж саме, що і F_5 у послідовності Фібоначчі) тощо.

Отже, кількість способів покриття прямокутника розміром $n \times 1$ — це $n + 1$-ше число Фібоначчі.

2. На рис. 1.46 зображена бджола, яка починає рухатися від краю комірок у вулику. Вона може почати з комірки 1 або комірки 2 і рухатися лише вправо (тобто лише до комірки з більшим номером). Є тільки один шлях до комірки 1, але два до комірки 2: безпосередньо або через комірку 1. До комірки 3 можна дістатися через 1, 2, 3; 1, 3 або 2, 3, тобто є три різні шляхи. Визначте, скільки може бути шляхів від початку до клітинки номер n.

Розв'язання

Побудуємо відповідність між цією задачею та попередньою. Зазначимо, що бджола щоразу переміщується на клітинку, номер якої більший за попередній на 1 чи 2, що є аналогічним заповненню прямокутника $1 \times n$ квадратами 1×1 та доміно 1×2. Побудуємо аналогічний розв'язок за допомогою математичної індукції.

База індукції:

• комірка 1 $(n = 1)$: бджола починає рух з комірки 1. Кількість шляхів: $1 = F(2)$;

• комірка 2 $(n = 2)$: бджола може потрапити до комірки 2 відразу або спочатку до комірки 1, а потім до комірки 2. Кількість шляхів: $1 + 1 = 2 = F(3)$.

Припущення індукції. Припустимо, що до всіх клітинок із номером меншим чи рівним n можна потрапити $F(k + 1)$ способами для клітинки k.

Крок індукції. Розглянемо клітинку $n + 1$.

До неї за один хід можна потрапити лише з клітинок n і $n - 1$. Кількість шляхів до клітинки $n + 1$ визначається як сума шляхів до клітинок n та $n - 1$, що відповідає формулі числа Фібоначчі:

$$F(n + 1) = F(n) + F(n - 1).$$

3. Доведіть, що існує $F(n + 2)$ способів розфарбувати ряд із n квадратів у червоний чи коричневий так, щоб жодні два червоні квадрати не мали спільної сторони.

Розв'язання

Використовуємо метод математичної індукції.

База індукції. Для $n = 1$ існує два можливі способи розфарбувати квадрат: у червоний чи коричневий. Отже, кількість способів розфарбувати один квадрат дорівнює $F(3) = 2$.

Припущення індукції. Припустимо, що для ряду з n квадратів кількість допустимих розфарбовувань, де жодні два червоні квадрати не мають спільної сторони, дорівнює $F(n + 2)$.

Крок індукції. Розглянемо ряд із $n + 1$ квадратів. Якщо перший квадрат коричневий, то решту n квадратів можна розфарбувати $F(n + 2)$ способами. Якщо перший квадрат червоний, то другий квадрат обов'язково має бути коричневим.

Решту $n - 1$ квадратів можна розфарбувати $F(n + 1)$ способами.

Отже, загальна кількість способів розфарбувати ряд з $n + 1$ квадратів буде $F(n + 2) + F(n + 1) = F(n + 3)$, що відповідає послідовності Фібоначчі.

4. Доведіть, що $F(1)^2 + F(2)^2 + \dots + F(n)^2 = F(n) \times F(n + 1)$.

Підказка. Подивіться на прямокутник 8×13 з усіма квадратами, що є всередині (*рис. 1.47*). Обчисліть його площу двома різними способами. Узагальніть цей результат за допомогою методу математичної індукції.

Розв'язання

Застосуємо математичну індукцію.

База індукції. Для початку перевіримо рівність для базового випадку $n = 1$. Для $n = 1$ ліва частина рівняння виглядає так:

$$F(1)^2 = 1^2 = 1.$$

Права частина рівняння:

$$F(1) \times F(2) = 1 \times 1 = 1.$$

Оскільки обидві частини рівні, база індукції правдива.

Припущення індукції. Тепер припускаємо, що рівність виконується для деякого натурального числа k. Тобто ми припускаємо, що:

$$F(1)^2 + F(2)^2 + \dots + F(k)^2 = F(k) \times F(k+1).$$

Крок індукції. Потрібно довести, що рівність виконується для $k + 1$. Тобто необхідно довести, що:

$$F(1)^2 + F(2)^2 + \dots + F(k)^2 + F(k+1)^2 = F(k+1) \times F(k+2).$$

Згідно з індуктивним припущенням, сума перших k квадратів чисел Фібоначчі дорівнює $F(k) \times F(k+1)$. Рівняння можна записати так:

$$F(k) \times F(k+1) + F(k+1)^2.$$

Тепер винесемо $F(k+1)$ за дужки:

$$F(k+1) \times (F(k) + F(k+1)).$$

Оскільки $F(k+2) = F(k) + F(k+1)$ за рекурентним співвідношенням для чисел Фібоначчі, то можемо записати вираз так:

$$F(k+1) \times F(k+2).$$

Це збігається з правою частиною рівняння для $k + 1$, що завершує доведення.

5. Доведіть, що сусідні числа Фібоначчі взаємно прості (не мають спільних простих дільників).

Розв’язання

Позначимо найбільший спільний дільник двох чисел a і b як $\text{НСД}(a, b)$.

База індукції. Почнемо з аналізу перших двох чисел Фібоначчі: $F(1) = 1$, $F(2) = 1$. Найбільший спільний дільник для $F(1)$ і $F(2)$ буде $\text{НСД}(1, 1) = 1$, тобто числа взаємно прості.

Припущення індукції. Припустимо, що для деякого числа k числа Фібоначчі $F(k)$ та $F(k+1)$ взаємно прості. Тобто $\text{НСД}(F(k), F(k+1)) = 1$.

Крок індукції. Потрібно довести, що числа $F(k+1)$ і $F(k+2)$ також взаємно прості. Числа Фібоначчі задовольняють рекурентне співвідношення:

$$F(k+2) = F(k+1) + F(k).$$

Тепер обчислимо НСД для $F(k+1)$ і $F(k+2)$:

$$\text{НСД}(F(k+1), F(k+2)) = \text{НСД}(F(k+1), F(k+1) + F(k)).$$

Використовуючи властивість НСД, яка стверджує, що $\text{НСД}(a, a+b) = \text{НСД}(a, b)$, спрощуємо:

$$\text{НСД}(F(k+1), F(k)).$$

За нашим індукційним припущенням, $\text{НСД}(F(k), F(k+1)) = 1$.
Отже,

$$\text{НСД}(F(k+1), F(k+2)) = 1.$$

6. Доведіть, що кожне п'яте число Фібоначчі ділиться на 5 (для кожного n число $F(5n)$ кратне 5). Обґрунтуйте, чи можна узагальнити такий результат.

Розв'язання

Скористаємось методом математичної індукції.

База індукції. Розпочнемо з перевірки базового випадку для $n = 5$: $F(5) = 5$. Оскільки 5 ділиться на 5, базовий випадок справджується.

Припущення індукції. Припустимо, що для якогось цілого числа k число $F(5k)$ ділиться на 5.

Крок індукції. Потрібно довести, що $F(5(k+1))$ також ділиться на 5.

Використаємо рекурентне співвідношення для чисел Фібоначчі:

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2).$$

Якщо маємо довести, що $F(5(k+1))$ ділиться на 5, то виразимо $F(5(k+1))$ через попередні числа Фібоначчі:

$$F(5(k+1)) = F(5k+5) = F(5k+4) + F(5k+3).$$

Далі виразимо $F(5k+4)$ через інші числа Фібоначчі:

$$F(5k+4) = F(5k+3) + F(5k+2).$$

Підставимо це у рівняння для $F(5k+5)$:

$$F(5k+5) = (F(5k+3) + F(5k+2)) + F(5k+3).$$

Спрощуємо:

$$F(5k+5) = 2F(5k+3) + F(5k+2).$$

Тепер виразимо $F(5k+3)$ через попередні числа Фібоначчі:

$$F(5k+3) = F(5k+2) + F(5k+1).$$

Підставимо це в рівняння для $F(5k+5)$:

$$F(5k+5) = 2(F(5k+2) + F(5k+1)) + F(5k+2).$$

Спрощуємо:

$$F(5k+5) = 3F(5k+2) + 2F(5k+1).$$

Винесемо 5 за дужки:

$$F(5k+5) = 5F(5k+1) + 3F(5k).$$

За індукційним припущенням $F(5k)$ ділиться на 5. Крім того, $5F(5k+1)$ одразу ділиться на 5, оскільки кратне 5. Отже, $F(5k+5)$ також ділиться на 5.

За допомогою індукції ми довели, що $F(5n)$ ділиться на 5 для всіх цілих чисел n.

7. Доведіть, що суми біноміальних коефіцієнтів на діагоналях трикутника Паскаля є числами Фібоначчі (*рис. 1.48*).

Розв'язання

Скористаємось методом математичної індукції.

База індукції. Для початку аналізуємо перші дві діагоналі трикутника Паскаля:

1) 0-ва діагональ має лише одне число 1 — число Фібоначчі $F(1) = 1$;

2) 1-ша діагональ також має одне число 1 — число Фібоначчі $F(2) = 1$.

Отже, для перших двох діагоналей сума чисел збігається з першими двома числами Фібоначчі, що й потрібно було довести для цих випадків.

Припущення індукції. Тепер припустимо, що для деякої діагоналі k сума чисел на цій діагоналі дорівнює числу Фібоначчі $F(k)$, а сума чисел на діагоналі $(k+1)$ — числу Фібоначчі $F(k+1)$.

Крок індукції. Тепер потрібно довести, що сума чисел на діагоналі $(k+2)$ дорівнює $F(k+2)$.

У трикутнику Паскаля кожне число отримується додаванням двох верхніх чисел у трикутнику. Отже, числа на кожній діагоналі трикутника Паскаля утворюються додаванням чисел із двох діагоналей, що знаходяться вище (*рис. 2.25*). Це означає, що сума чисел на діагоналі $(k+2)$ — це сума сум чисел на діагоналях k та $(k+1)$.

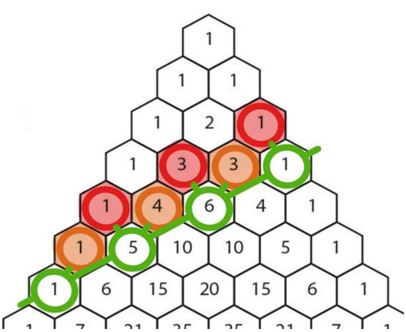


Рис. 2.25. Сума чисел на діагоналі дорівнює сумі чисел на двох попередніх діагоналях

За нашим припущенням, сума на діагоналі k дорівнює $F(k)$, а сума на діагоналі $(k+1)$ дорівнює $F(k+1)$.

Отже, сума чисел на діагоналі $(k+2)$ дорівнює:

$$F(k) + F(k+1) = F(k+2).$$

Тому доведено, що сума чисел на діагоналях трикутника Паскаля завжди є числом Фібоначчі.

2.2.5. Оповідання і моделювання

1. Троє місіонерів і троє людожерів мають перебратися через річку. У них є один човен, у якому поміщаються тільки двоє. Щоб уникнути трагедії, не можна залишати разом більше людожерів, ніж місіонерів. Як місіонерам і людожерам переправитися через річку так, щоб залишитися живими?

Розв'язання

Вважатимемо, що починати пливти слід від лівого берега річки.

Крок 1. 2 людожери перепливають на правий берег.
- Лівий берег: 3 місіонери, 1 людожер.
- Правий берег: 0 місіонерів, 2 людожери.

Крок 2. 1 людожер повертається назад.
- Лівий берег: 3 місіонери, 2 людожери.
- Правий берег: 0 місіонерів, 1 людожер.

Крок 3. 2 людожери перепливають на правий берег.
- Лівий берег: 3 місіонери, 0 людожерів.
- Правий берег: 0 місіонерів, 3 людожери.

Крок 4. 1 людожер повертається назад.
- Лівий берег: 3 місіонери, 1 людожер.
- Правий берег: 0 місіонерів, 2 людожери.

Крок 5. 2 місіонери перепливають на правий берег.
- Лівий берег: 1 місіонер, 1 людожер.
- Правий берег: 2 місіонери, 2 людожери.

Крок 6. 1 місіонер і 1 людожер повертаються назад.
- Лівий берег: 2 місіонери, 2 людожери.
- Правий берег: 1 місіонер, 1 людожер.

Крок 7. 2 місіонери перепливають на правий берег.
- Лівий берег: 0 місіонерів, 2 людожери.
- Правий берег: 3 місіонери, 1 людожер.

Крок 8. 1 людожер повертається назад.
- Лівий берег: 0 місіонерів, 3 людожери.
- Правий берег: 3 місіонери, 0 людожерів.

Крок 9. 2 людожери перепливають на правий берег.
- Лівий берег: 0 місіонерів, 1 людожер.
- Правий берег: 3 місіонери, 2 людожери.

Крок 10. 1 людожер повертається назад.
- Лівий берег: 0 місіонерів, 2 людожери.
- Правий берег: 3 місіонери, 1 людожер.

Крок 11. 2 людожери перепливають на правий берег.
- Лівий берег: 0 місіонерів, 0 людожерів.
- Правий берег: 3 місіонери, 3 людожери.

2. Мисливець повинен перевезти через річку вовка, козу й капусту. Однак човен настільки малий, що в ньому може поміститися мисливець, а з ним або вовк, або коза, або капуста. Вовка не можна залишити з козою, а козу із капустою. Що робити мисливцю? Як перевезти всіх на інший бік річки так, щоб вовк не з'їв козу, а коза не з'їла капусту?

Розв'язання

Вважатимемо, що починати пливти слід від лівого берега річки.

Крок 1. Мисливець перевозить на інший берег козу.
- Лівий берег: вовк, капуста.
- Правий берег: коза.

Крок 2. Мисливець повертається на початковий берег без кози.
- Лівий берег: вовк, капуста.
- Правий берег: коза.

Крок 3. Мисливець перевозить капусту на інший берег, де перебуває коза.
- Лівий берег: вовк.
- Правий берег: коза, капуста.

Крок 4. Мисливець залишає капусту на правому березі, забирає козу назад до лівого берега.
- Лівий берег: вовк, коза.
- Правий берег: капуста.

Крок 5. Мисливець перевозить вовка на правий берег, де вже залишив капусту.
- Лівий берег: коза.
- Правий берег: вовк, капуста.

Крок 6. Мисливець повертається на початковий берег за козою.
- Лівий берег: коза.
- Правий берег: вовк, капуста.

Крок 7. Мисливець перевозить козу на правий берег.
- Лівий берег: порожньо.
- Правий берег: вовк, коза, капуста.

3. Сто в'язнів щойно прибули до в'язниці. Наглядач повідомив їх про те, що від наступного дня кожного з них помістять в ізольовану камеру, тому в'язні не зможуть спілкуватися між собою. Кожного дня наглядач обиратиме одного з ув'язнених навмання і приводитиме його в кімнату для допитів, де є лише лампочка з тумблером. Ув'язнений матиме можливість вмикати й вимикати лампочку за бажанням. Він також може висловити думку про те, що всі ув'язнені уже відвідали кімнату для допитів. Якщо це справді так, то всіх ув'язнених звільнять, але якщо ні, то стратять. Після оголошення повідомлення наглядач іде геть, а в'язні збираються разом, щоб обговорити свої подальші дії. Чи можуть вони домовитися про план, який гарантуватиме їм свободу?

Розв'язання

Щоб гарантувати звільнення всіх в'язнів, можна скористатися наведеною нижче стратегією.

1. Вибір відповідального. Спочатку в'язні обирають одного відповідального, завданням якого є рахувати, скільки в'язнів уже відвідали кімнату для допитів. *Відповідальний* може використовувати лампочку як сигнал.

2. Правила для звичайних в'язнів:

• кожен в'язень, який вперше потрапляє в кімнату для допитів і бачить лампочку *вимкненою, вмикає її;*

• якщо лампочка вже увімкнена чи в'язень потрапляє в кімнату вдруге, він не змінює стан лампочки.

Отже, кожен в'язень має увімкнути лампочку лише раз, щоб сповістити про своє відвідування кімнати.

3. Правила для відповідального:

• кожного разу, коли відповідальний заходить у кімнату для допитів і бачить увімкнену лампочку, він вимикає її та збільшує свій рахунок на 1;

• якщо лампочка вже вимкнена, відповідальний не змінює її стан і не збільшує рахунок.

Відповідальний продовжує вимикати лампочку і збільшувати рахунок щоразу, коли він бачить лампочку ввімкненою, поки його рахунок не стане 99 (це означатиме, що всі інші 99 в'язнів по одному разу увімкнули лампочку). Тоді відповідальний упевнено оголошує, що *всі в'язні вже побували в кімнаті*.

4. Двоє людей одночасно підійшли до річки. Біля берега був човен, у якому лише один міг переправитися на протилежний берег. Однак вони змогли вирішити проблему. Яким чином це можливо зробити?

Відповідь: двоє підійшли до річки з різних берегів.

Список ілюстрацій

С.	Рис.	Підпис до рисунка	Автор / джерело
18	1.8	Приклад гри 2: перший гравець має рахунок 1, а другий — 0	https://aimathcircles.org/wp-content/uploads/2022/07/UKR-Sunflower-Bluebird-Newsletter-1-Playing-With-Triangles.pdf
21	1.9	Фігури для обчислення площі	Укладачі
22	1.10	Фігури для розрізання	https://www.slideshare.net/slideshow/ss-55123167/55123167
24	1.11	Килим навахо	Саллі Фаулер. https://aimathcircles.org/the-sunflower-bluebird/
25	1.12	Квадрат і аркуш паперу	Укладачі
26	1.13	Фігури для задачі 1.5	Укладачі
28	1.14	Правильні квадрати 1×1, 3×3 і два нахилені	Укладачі
30	1.15	Вписаний нахилений квадрат	Укладачі
30	1.16	Вписані у квадрат 4×4 нахилені квадрати	Укладачі
32	1.17	З’єднані по колу середини й вершини	Укладачі
33	1.18	Два нахилені квадрати, вершини яких сполучені з протилежними сторонами	Укладачі

С.	Рис.	Підпис до рисунка	Автор / джерело
49	1.28	Побудова середини відрізка	https://www.miyklas.com.ua/p/geometria/7-klas/kolo-i-krug-geometrichni-pobudovi-24777/zavdannia-na-pobudovu-13634/re-3cd4bba2-94a0-43e7-8095-fc9d70ac1c0c
50	1.29	Побудова бісектриси кута	https://www.miyklas.com.ua/p/geometria/7-klas/kolo-i-krug-geometrichni-pobudovi-24777/zavdannia-na-pobudovu-13634/re-3cd4bba2-94a0-43e7-8095-fc9d70ac1c0c
51	1.30	Японське оригамі. Літачок	https://openbooks.library.umass.edu/thefalconproject/wp-content/uploads/sites/53/2022/07/Audubon-for-Kids-Paper-Airplane-Birds.pdf
51	1.31	Креслення циркулем	https://www.drawingislamicgeometricdesigns.com/blog/a-compass-exercise-precision-revealed
53	1.32	Побудова правильного п’ятикутника за допомогою циркуля і лінійки	https://raisa4u.blogspot.com/2014/04/blog-post_2194.html
54	1.33	Складання п’ятикутника зі смужки паперу	Укладачі
55	1.34	Будинки хоган	Роберто Нутлуїс

С.	Рис.	Підпис до рисунка	Автор / джерело
56	1.35	Побудова правильного шестикутника	https://aimathcircles.org/wp-content/uploads/2022/07/UKR-The-Sunflower-Bluebird-Hogan-House-Axioms.pdf
57	1.36	Коледж Діне та його кампус	https://www.dinecollege.edu/
60	1.37	Квітки, кількість пелюсток яких відповідає числам Фібоначчі	https://aimathcircles.org/the-sunflower-bluebird/
61	1.38	Прямокутник із виділеним квадратом і його діагоналлю	Укладачі
63	1.39	Можливий варіант ходу з камінця 1	Укладачі
64	1.40	Можливі варіанти ходу з камінця 2	Укладачі
64	1.41	Можливі варіанти ходів, починаючи з камінця 3	Укладачі
66	1.42	Способи закладання цеглинок для довжини стіни 1, 2, 3	Укладачі
67	1.43	Шлях між Уманню і Тернополем	Google Maps
68	1.44	Шлях між Сан-Хосе і Кері	Google Maps

С.	Рис.	Підпис до рисунка	Автор / джерело
69	1.45	Розкладання натуральних чисел з використанням послідовності Фібоначчі	https://en.wikipedia.org/wiki/Zeckendorf%27s_theorem
71	1.46	Розташування комірок і шлях бджоли	https://r-knott.surrey.ac.uk/Fibonacci/fibpuzzles.html#beeline
71	1.47	Зв’язок між числами Фібоначчі й квадратами	Укладачі
72	1.48	Діагоналі трикутника Паскаля утворюють числа Фібоначчі	https://www.researchgate.net/figure/Fibonacci-Numbers-and-Pascals-Triangle_fig1_383885109
76	1.49	Картки з цифрами й кольорами	Укладачі
83	2.1	Розбиття неправильних фігур на прямокутники і трикутники для визначення їхньої площі	Укладачі
84	2.2	Варіанти розрізання фігур на 4 однакові	Укладачі
85	2.3	Прямокутні трикутники з цілочисельними катетами і площею 12	Укладачі

С.	Рис.	Підпис до рисунка	Автор / джерело
92	2.12	Квадрати 1×1, що містять більше блакитних точок, ніж рожевих	Укладачі
92	2.13	Квадрати 2×2, що містять більше блакитних точок, ніж рожевих	Укладачі
92	2.14	Квадрати 3×3, у яких блакитних точок більше, ніж рожевих	Укладачі
93	2.15	Перший хід переможної стратегії першого гравця	Укладачі
93	2.16	Приклад ходу, симетричного до попереднього ходу суперника	Укладачі
94	2.17	Перший хід для випадку, коли m і n — числа однакової парності	Укладачі
94	2.18	Перший хід для ситуації, коли m і n різної парності	Укладачі
95	2.19	Побудова рівностороннього трикутника	Укладачі

Список використаних джерел

1. Васильєва Д. В., Василюк Н. І. Збірник задач з математики. 5–9 класи: Наскрізні лінії компетентностей та їх реалізація. Київ : Вид. дім «Освіта», 2017. 112 с.
2. Геометрія. Квести. 5–11 класи / О. Бакал, С. Баранова, В. Волошин та ін. ; упоряд.: О. Семібаламут, І. Кирдей. Київ : Перше вересня, 2017. 112 с.
3. Лема Шпернера. URL: https://adamazzam.wordpress.com/2012/05/18/sperners-lemma (дата звернення: 08.01.2025).
4. Міжнародний день математики. URL: https://www.idm314.org/ (дата звернення: 01.02.2024).
5. Онлайн-енциклопедія цілочисельних послідовностей (OEIS). URL: https://oeis.org/ (дата звернення: 08.01.2025).
6. Alliance of Indigenous Math Circles. *Educational Bulletins for Math Circles*. URL: https://aimathcircles.org/ (дата звернення: 08.01.2025).
7. Erdős P., Gallai T. Gráfok előírt fokszámú pontokkal. *Matematikai Lapok*. 1960. Vol. 11. Pp. 264–274.
8. Gardner M. Chapter 1: The Paradox of the Unexpected Hanging. *The Unexpected Hanging and Other Mathematical Diversions*. Chicago : University of Chicago Press, 1991. Pp. 11–23.
9. Hales A., Jewett R. Regularity and positional games. *Transactions of the American Mathematical Society*. 1963. Vol. 106. Pp. 222–229. DOI: 10.1090/S0002-9947-1963-0143712-1.

10. Huzita H. Axiomatic Development of Origami Geometry. *Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology* / ed. H. Huzita. 1989. Pp. 143–158.
11. Monsky P. On Dividing a Square Into Triangles. *The American Mathematical Monthly.* 1970. Vol. 77. № 2 (Feb.). Pp. 161–164.
12. Polya G. How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method. Princeton : Princeton University Press, 2014. 288 p.
13. Sperner's Lemma / F. E. Su et al. *Math Fun Facts.* URL: https://math.hmc.edu/funfacts/sperners-lemma/ (дата звернення: 08.01.2025).
14. Su F. E. Rental harmony: Sperner's lemma in fair division. *The American Mathematical Monthly.* 1999. Vol. 106. № 10. Pp. 930–942.
15. The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam: A Sourcebook / A. Imhausen et al. ; ed. V. J. Katz. Princeton : Princeton University Press, 2007. *JSTOR*. DOI: https://doi.org/10.2307/j.ctv1qgnq84.
16. The Sunflower Bluebird. URL: https://aimathcircles.org/the-sunflower-bluebird/ (дата звернення: 08.01.2025).
17. Van der Waerden B. L. Beweis einer Baudetschen Vermutung. *Nieuw Archief voor Wiskunde.* 1927. Vol. 15. Pp. 212–216.
18. Wason P. C. Reasoning about a rule. *Quarterly Journal of Experimental Psychology.* 1968. Vol. 20 (3). Pp. 273–281. DOI: https://doi.org/10.1080/14640746808400161.

Навчальне видання

ЯК ЗАЦІКАВИТИ МАТЕМАТИКОЮ

Методичні рекомендації

Укладачі:
***Терлецька** Катерина*
***Дружкова** Марія*
***Шубін** Тетяна*
***Антошина** Катерина*
***Романюк** Ірина*

Редагування: *Н. Гетьман, З. Пономаренко*
Верстання *І. Кирноз*
Дизайн обкладинки *О. Чекановська*

Формат 60×84 1/16. Папір офс. 80 г/м^2.
Друк цифровий. Ум. друк. арк. 7,2.
Наклад 300 пр.

Видавництво: Національний центр «Мала академія наук України»,
Кловський узвіз, буд. 8, м. Київ, 01021
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 6999 від 04.12.2019