

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ЦЕНТР
«МАЛА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ»

М.А.Н.

НАВЧАЛЬНІ ПРОГРАМИ З ПОЗАШКІЛЬНОЇ ОСВІТИ

Дослідницько-експериментальний напрям

● МАТЕМАТИКА

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ЦЕНТР «МАЛА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ»

НАВЧАЛЬНІ ПРОГРАМИ З ПОЗАШКІЛЬНОЇ ОСВІТИ

Дослідницько-експериментальний напрям

Математика

Київ
Національний центр
«Мала академія наук України»
2024

УДК 37.01
Н15

Авторський колектив:

С. О. Довгий, д. фіз.-мат. наук, академік НАН України, А. І. Азаренкова,
К. О. Антошина, Р. Є. Майборода, д. фіз.-мат. наук, професор,
К. В. Терлецька, д. фіз.-мат. наук, Т. Д. Тимошкевич, канд. фіз.-мат. наук

Редакційна колегія:

А. І. Грітчина, канд. пед. наук, О. М. Косьмій, канд. політ. наук, доц.

Рецензенти:

Г. Г. Буланчук — доцентка кафедри комп'ютерних наук секції вищої та прикладної математики Державного вищого навчального закладу «Приазовський державний технічний університет», канд. фіз.-мат. наук;

Г. Е. Самойленко — методистка відділу інноваційної діяльності та дослідно-експериментальної роботи Державної наукової установи «Інститут модернізації змісту освіти»;

Л. В. Розумна — вчителька математики Приватного загальноосвітнього навчального закладу «Фінансово-правовий ліцей»

*Рекомендовано для використання в освітньому процесі
рішенням науково-методичної ради
Національного центру «Мала академія наук України»
(протокол № 3 від 26.06.2024)*

Н15 **Навчальні** програми з позашкільної освіти. Дослідницько-експериментальний напрям. Математика / С. О. Довгий, А. І. Азаренкова, К. О. Антошина та ін. Київ : Національний центр «Мала академія наук України», 2024. — 138 с.

ISBN 978-617-7945-65-8

У збірнику надано навчальні програми з позашкільної освіти науково-дослідницького напрямку, призначені для організації освітньої діяльності у гуртках і секціях наукового відділення математики Малої академії наук України. У розроблених програмах передбачено використання сучасних форм і методів навчання, що сприятиме мотивуванню вихованців до вивчення математики, розвитку ключових компетентностей, формуванню навичок дослідницької діяльності.

Видання буде корисним для педагогів закладів, які організують роботу математичних гуртків, а також усіх, хто цікавиться проблемами позашкільної освіти.

УДК 37.01

© Довгий С. О., Азаренкова А. І.,
Антошина К. О. та ін., 2024

© Національний центр

«Мала академія наук України», 2024

ISBN 978-617-7945-65-8

З М І С Т

Вступ	4
Навчальна програма «Вибрані питання математики» Вищий рівень <i>А. І. Азаренкова</i>	6
Навчальна програма «Прикладна математика» Вищий рівень <i>А. І. Азаренкова</i>	25
Навчальна програма «Статистика» Основний і вищий рівні <i>Р. Є. Майборода</i>	53
Навчальна програма «Нестандартні завдання і головоломки» Початковий рівень <i>К. В. Терлецька, К. О. Антошина</i>	75
Навчальна програма «Математика у мистецтві» Основний рівень <i>К. В. Терлецька, С. О. Довгий</i>	86
Навчальна програма «Математика як інструмент мислення» Початковий рівень <i>Т. Д. Тимошкевич</i>	111
Навчальна програма «Дискретні математичні структури» Вищий рівень <i>К. О. Антошина</i>	123
Відомості про авторів	137

ВСТУП

Сучасна парадигма української освіти трансформується відповідно до суспільно-політичних та соціально-економічних реалій, відіграючи провідну роль у відновленні національної економіки та посиленні спроможності до відбудови держави.

Розуміючи суспільні виклики, заклади освіти спрямовують діяльність відповідно до запитів сьогодення, здійснюють кроки для оновлення методичних і психолого-педагогічних підходів до організації освітнього процесу. Впровадження інновацій в освіті є одним із чинників, що впливає на ефективне подолання освітніх втрат і розривів.

Позашкільна математична освіта базується на компетентнісному та практико-орієнтованому підходах, охоплює всі аспекти математичного навчання, включаючи вивчення математичних концепцій, теорій, методів та їх застосування в різних контекстах. Математика виступає важливим засобом дослідження явищ і процесів навколишнього світу. Освітня діяльність у гуртках спрямована на використання математичних законів для розв'язування проблем, пов'язаних із реальними життєвими ситуаціями, що активізує творче та нестандартне мислення вихованців, надає можливість осягати природні й соціальні явища. Практичне застосування знань під час освітнього процесу спонукає до проєктної, дослідницької, винахідницької діяльності та надає вихованцям можливості для реалізації власних креативних ідей і рішень, що забезпечує формування стійкого інтересу до математики як науки. Особливий акцент у навчальних програмах зроблено на реалізації міжпредметних зв'язків, що розширюють ерудицію, сприяють усвідомленню способів застосування знань з різних дисциплін і галузей.

Пропонований збірник навчальних програм з позашкільної освіти дослідницько-експериментального напрямку орієнтований на формування у вихованців необхідного рівня математичної культури, ключових і дослідницьких компетентностей, розвиток логічного мислення, уваги, вмінь висловлювати власну думку, знаходити креативні рішення для розв'язання проблем, критично оцінювати інформацію, застосовувати творчі та дослідницькі здібності.

Анна Грітчина,
заступниця директора
з методичної роботи НЦ «МАНУ»,
кандидатка педагогічних наук

А. І. Азаренкова

НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА «ВИБРАНІ ПИТАННЯ МАТЕМАТИКИ»

ВИЩИЙ РІВЕНЬ

«Схвалено для використання в освітньому процесі»

*Рішення експертної комісії з позашкільної освіти від 29.03.2023
(протокол № 1)*

*Зареєстровано у Каталозі надання грифів навчальній літературі
та навчальним програмам за № 8.0050–2023*

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Математика є засобом формування не лише освітнього, а й розвивального та інтелектуального потенціалу особистості. Основним завданням вивчення математики є забезпечення необхідного рівня математичної культури для повноцінної участі в повсякденному житті й продовження здобуття освіти, формування математичної компетентності, вміння застосовувати логічне й аналітичне мислення.

Програма «Вибрані питання математики» спрямована на поглиблення знань учнів математики й охоплює питання, які не входять до навчальних програм з математики закладів загальної середньої освіти, знайомить із деякими нестандартними методами, оригінальними ідеями розв'язування задач підвищеного рівня складності й сприяє опануванню методів науково-дослідницької діяльності.

Метою програми є формування математичної компетентності, а також інших ключових компетентностей (пізнавальної, практичної, творчої, соціальної) через науково-дослідницьку роботу з математики.

Для досягнення мети ставляться **завдання**, які полягають у формуванні в учнів таких компетентностей:

- *пізнавальної*: поглиблення знань з математики; розвиток позитивної мотивації до цілеспрямованої пізнавальної та науково-дослідницької діяльності; формування наукового світогляду, уявлень про ідеї та методи математики, її роль у пізнанні дійсності;
- *практичної*: набуття вмінь розв'язувати математичні задачі підвищеного рівня складності; формування навичок застосовувати математичні методи та ідей у повсякденному житті, здатності до науково-дослідницької діяльності в галузі математики; удосконалення вмінь правильно

формулювати й вільно висловлювати свої думки, презентувати отримані результати дослідження та здійснювати публічний виступ;

- *творчої*: розвиток творчих здібностей до проведення пошукового, наукового дослідження в галузі математики; формування логічного й аналітичного мислення;
- *соціальної*: підтримання стійкого інтересу до математики та майбутньої професійної діяльності, пов'язаної з цією наукою; розвиток позитивних якостей емоційно-вольової сфери особистості (наполегливості, цілеспрямованості, здатності аргументовано обстоювати свою думку), творчої ініціативи.

Навчальна програма розрахована на два роки навчання на вищому рівні, при цьому забезпечується дотримання принципів наступності, послідовності, доступності та науковості:

1-й рік — вищий рівень — 216 год на рік (6 год на тиждень);

2-й рік — вищий рівень — 216 год на рік (6 год на тиждень).

Програма вищого рівня призначена для роботи з учнями 9–11 класів віком 14–17 років, які бажають поглибити знання з математики й долучитися до науково-дослідницької діяльності.

Основний зміст програми першого року навчання: закріплення й поглиблення математичних знань; ознайомлення з формами й методами наукових досліджень, науковою термінологією, правилами роботи з літературою й іншими джерелами інформації; з'ясування сутності науково-дослідницької діяльності; опанування вимог до роботи над проектом.

Основний зміст програми другого року навчання: продовження роботи з вдосконалення математичної бази; підготовка вихованців до різних математичних конкурсів; ознайомлення з методами опрацювання результатів пошукової діяльності, вимогами до оформлення робіт, анотацій, виступів, постерів, підготовки звітів і доповідей; визначення можливостей практичного застосування отриманих результатів.

Зміст програми реалізується відповідно до здібностей і вікових особливостей учнів і за допомогою як традиційних форм і методів навчання, так і інтерактивних, дистанційного та змішаного навчання, комп'ютерних і проектних технологій, методів активізації наукової діяльності, стимулювання процесів пізнання. Ефективно впроваджуються різноманітні засоби навчання: наочні посібники, роздатковий матеріал, технічні засоби. Окрім цього, заняття побудовано за принципом розумного поєднання і чергування різних видів діяльності, що дає змогу зберегти інтерес учнів до математичних наук та якісного поглиблення знань.

Програма передбачає застосування групової й індивідуальної форми роботи з можливістю використання платформ для дистанційного

навчання. Індивідуалізація і диференціація процесу роботи гуртка надає можливість участі слухачів у науково-освітніх заходах змагального характеру вже з першого року навчання.

Програма може бути застосована під час реалізації дистанційної форми навчання. Для цього передбачено використання різноманітних технічних засобів (комп'ютер, ноутбук), а також програмного забезпечення: для налагодження дистанційного зв'язку («Zoom», «Google Meet»); віртуальні дошки для спільної роботи («Mural», «Miro», «Lino», «Padlet»); для виконання інтерактивних завдань або контролювання рівня знань («Kahoot!», «Mentimeter», «LearningApps», «Educandy», «Purposegames», «Flippity» тощо). Перелік інструментів не є вичерпним і може змінюватися відповідно до навчальних цілей і можливостей закладу.

Контролювання знань учнів відбувається шляхом проведення письмових контрольних робіт, тестування, представлення рефератів або виступів на семінарах, конференціях, участі у диспутах, конкурсах, олімпіадах, Всеукраїнському конкурсі-захисті науково-дослідницьких робіт учнів – членів МАН України.

За цією програмою можна проводити заняття у групах індивідуального навчання відповідно до Положення про порядок організації індивідуальної та групової роботи в позашкільних навчальних закладах, затвердженого наказом Міністерства освіти і науки від 11.08.2004 № 651.

Розподіл годин за темами орієнтовний. Керівник гуртка, зважаючи на рівень підготовки й інтереси вихованців, може вносити зміни й доповнення до змісту і порядку тем, самостійно визначати кількість годин, необхідну для опанування навчального матеріалу, і вносити у програму відповідні корективи.

Перелік обладнання в програмі подано як орієнтовний – відповідно до можливостей закладу освіти.

Вищий рівень, перший рік навчання НАВЧАЛЬНО-ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН

№ з/п	Тема	Кількість годин		
		теоретичних	практичних	усього
1.	Вступ	1	2	3
2.	Наука і науково-дослідницька діяльність	6	9	15
3.	Елементи теорії множин	3	6	9
4.	Елементи математичної логіки	3	6	9

№ з/п	Тема	Кількість годин		
		теоретичних	практичних	усього
5.	Математична мозаїка (математичні софізми, ребуси, загадки)	3	6	9
6.	Цілі числа. Подільність цілих чисел	6	9	15
7.	Принцип Діріхле	2	4	6
8.	Діофантові рівняння	4	8	12
9.	Основи комбінаторики	6	9	15
10.	Багаточлени. Метод невизначених коефіцієнтів	3	6	9
11.	Алгебраїчні рівняння, нерівності та їх системи	4	8	12
12.	Функції та їх графіки	4	8	12
13.	Найпростіші функціональні рівняння	3	6	9
14.	Основні методи доведення нерівностей	3	6	9
15.	Послідовності й прогресії. Метод математичної індукції та його модифікації	3	6	9
16.	Текстові задачі	3	6	9
17.	Планіметричні задачі	3	9	12
18.	Розміщення фігур на площині, розрізання та розфарбовування фігур	3	6	9
19.	Графи та їх використання під час розв'язування задач	2	4	6
20.	Основні методи розв'язування олімпіадних задач. Інваріанти. Принцип крайнього. Ігри двох осіб	6	6	12
21.	Конференції, лекторії, конкурси, тематичні заходи	—	12	12
22.	Підсумок	1	2	3
Разом		72	144	216

ЗМІСТ ПРОГРАМИ

1. Вступ (3 год)

Теоретична частина. Мета і завдання роботи гуртка. План роботи гуртка на навчальний рік. Правила безпеки життєдіяльності й поведінки в закладі освіти. Правила санітарії, гігієни й безпечної роботи за комп'ютером. Облаштування робочого місця учня. Організаційні питання.

Практична частина. Тестове контролювання знань вихованців з математики. Круглий стіл «Актуальні проблеми сучасної математики».

2. Наука і науково-дослідницька діяльність (15 год)

Теоретична частина. Поняття про науку. Роль науки в суспільстві, її значення. Проблеми сучасної математичної науки. Поняття про дослідницьку діяльність. Наукове дослідження як форма існування і розвитку науки. Види науково-дослідницьких робіт. Науково-дослідницька робота (дослідницький проєкт) та її складові частини. Обрання теми. Форми й методи наукових досліджень (спостереження, експеримент, індуктивні й дедуктивні методи). Методи збирання інформації, роботи з літературою та іншими інформаційними джерелами.

Основні вимоги до оформлення дослідницького проєкту, дослідницької роботи, постера. Структура дослідницької роботи: титульний аркуш, анотація, зміст, перелік умовних позначень і скорочень, вступ, основна частина, висновки, список використаних джерел і літератури, додатки.

Практична частина. Визначення теми науково-дослідницької роботи, методів дослідження залежно від специфіки роботи учня. Використання різних джерел інформації з тематики дослідження. Проведення науково-дослідницької діяльності за індивідуальними планами учнів і завданнями керівника гуртка.

3. Елементи теорії множин (9 год)

Теоретична частина. Множина. Елементи множини. Види множин (порожня множина, скінченні й нескінченні, впорядковані й неупорядковані множини). Способи задання множин. Підмножина. Операції з множинами (об'єднання, переріз, різниця, доповнення). Кількість підмножин скінченної множини. Поділ на класи. Діаграми Ейлера – Венна. Зліченність множин. Взаємно-однозначна відповідність (бієкція).

Практична частина. Розв'язування задач і вправ на основні операції з множинами, підрахунок кількості підмножин скінченної множини. Використання діаграм Ейлера – Венна під час розв'язування задач. Формула включення-виключення. Розв'язування задач на встановлення взаємно-однозначної відповідності між елементами множин.

4. Елементи математичної логіки (9 год)

Теоретична частина. Історія логіки та її розвиток. Основні поняття логіки. Висловлювання й форми висловлювань. Предикати. Істинні та хибні твердження. Умовивід. Слідування, рівносильність, загальність та існування. Зміст і обсяг поняття. Закон тотожності. Логічні закони. Дедукція та індукція. Аналогія. Метод від супротивного. Квантори. Методи винахідництва. Гіпотеза.

Практична частина. Розв'язування логічних задач. Операції з висловлюваннями та предикатами. Доведення тотожностей. Розв'язування задач методами повного та неповного перебору. Розв'язування задач методом від супротивного. Розв'язування нестандартних задач.

5. Математична мозаїка (математичні софізми, ребуси, загадки) (9 год)

Теоретична частина. Математичні ребуси та загадки. Листок Мебіуса. Магічні квадрати. Софізми й парадокси. Послідовність Фібоначчі. Геометрія орнаментів і паркетів.

Практична частина. Математичні ребуси й загадки. Розв'язування олімпіадних задач на пошук суперечностей і закономірностей. Задачі з поліміно. Три визначні задачі давнини. Дослідження геометрії орнаментів, їх побудова.

6. Цілі числа. Подільність цілих чисел (15 год)

Теоретична частина. Подільність і остачі. Китайська теорема про остачі. Прості й складені числа. Основна теорема арифметики. Конгруенції. Періодичність останньої цифри під час зведення до степеня. Ознаки подільності. Найменше спільне кратне (НСК), найбільший спільний дільник (НСД). Алгоритм Евкліда. Десятковий запис числа. Останні цифри точного квадрата.

Практична частина. Дії з цілими числами. Знаходження найбільшого спільного дільника (НСД) та найменшого спільного кратного (НСК), використання алгоритму Евкліда. Задачі з простими числами, задачі на десятиковий запис числа. Дослідження властивостей конгруенцій, розв'язування задач на їх використання. Різні задачі на подільність.

7. Принцип Діріхле (6 год)

Теоретична частина. Принцип Діріхле та його узагальнення. Принцип Діріхле і подільність цілих чисел.

Практична частина. Розв'язування задач на використання принципу Діріхле. Задачі на подільність, геометричні задачі. Розв'язування олімпіадних задач.

8. Діофантові рівняння (12 год)

Теоретична частина. Діофантові рівняння першого степеня. Основні методи розв'язування діофантових рівнянь вищих степенів (розкладання на множники, використання подільності, виділення цілої частини, виділення повного квадрата, метод спроб, використання симетричності, метод нескінченного спуску.

Практична частина. Розв'язування діофантових рівнянь різними методами. Розв'язування задач на складання діофантових рівнянь.

9. Основи комбінаторики (15 год)

Теоретична частина. Основні правила комбінаторики (правило суми та правило добутку). Комбінаторні задачі на безпосередній перебір. Сполуки без повторів елементів: перестановка, розміщення, комбінації. Властивості комбінацій. Трикутник Паскаля. Біном Ньютона. Властивості біноміальних коефіцієнтів. Правило рівності. Підрахунок двома способами.

Практична частина. Розв'язування комбінаторних задач. Використання повного перебору, основних правил комбінаторики, сполук без повторів елементів, правила рівності, підрахунку двома способами. Розв'язування рівнянь і нерівностей, що містять комбінаторні вирази. Використання бінома Ньютона. Дослідження властивостей біноміальних коефіцієнтів і трикутника Паскаля.

10. Багаточлени. Метод невизначених коефіцієнтів (9 год)

Теоретична частина. Кільце багаточленів. Подільність багаточленів. Теорема Безу та її наслідки. Схема Горнера. Корені багаточлена, кратні корені. Метод невизначених коефіцієнтів.

Практична частина. Розкладання багаточленів на множники. Використання теореми Безу та її наслідків. Знаходження цілих і раціональних коренів багаточленів. Використання методу невизначених коефіцієнтів.

11. Алгебраїчні рівняння, нерівності та їх системи (12 год)

Теоретична частина. Лінійні рівняння і нерівності з параметром. Квадратний тричлен. Квадратні рівняння з параметром. Основні методи розв'язування рівнянь вищих степенів (метод заміни змінних, розкладання на множники, підстановка, використання властивостей функції). Узагальнений метод інтервалів. Ірраціональні рівняння і нерівності. Нестандартні методи розв'язування рівнянь (виділення повного квадрата, використання методу невизначених коефіцієнтів, розв'язування рівнянь з коефіцієнтами).

Практична частина. Розв'язування рівнянь, нерівностей та їх систем різними методами. Рівняння і нерівності з модулем та параметром.

12. Функції та їх графіки (12 год)

Теоретична частина. Елементарні функції, їх властивості та графіки. Перетворення графіків функцій. Композиція функцій. Складені функції. ГМТ. Дослідження властивостей функцій (без використання похідної).

Практична частина. Побудова графіків функцій методом геометричних перетворень та іншими методами, використання операцій з графіками (додавання, віднімання, множення й ділення графіків). Знаходження області визначення та множини значень функції, найбільшого й найменшого її значень. Дослідження на парність. Побудова графіків функцій з модулем. Виконання вправ зі складеними функціями. Побудова ГМТ.

13. Найпростіші функціональні рівняння (9 год)

Теоретична частина. Загальні відомості про функціональні рівняння. Метод підстановок. Застосування поняття групи.

Практична частина. Розв'язування функціональних рівнянь методом підстановок. Застосування поняття групи. Розгляд інших методів.

14. Основні методи доведення нерівностей (9 год)

Теоретична частина. Числові нерівності та їх властивості. Методи доведення нерівностей. Нерівність Коші, нерівність між середніми, нерівність Коші — Буняковського, нерівність обернених величин. Геометричні нерівності. Метод підсилення.

Практична частина. Доведення нерівностей різними методами.

15. Послідовності й прогресії. Метод математичної індукції та його модифікації (9 год)

Теоретична частина. Числові послідовності, способи задання, властивості (монотонність, обмеженість). Границя послідовності. Арифметична й геометрична прогресії. Метод математичної індукції.

Практична частина. Розв'язування задач підвищеного рівня складності на арифметичну й геометричну прогресії. Обчислення сум. Знаходження границі послідовності. Використання методу математичної індукції. Розв'язування олімпіадних задач.

16. Текстові задачі (9 год)

Теоретична частина. Задачі на переливання та зважування. Задачі на рух, сумісну роботу, концентрацію та відсотковий вміст. Логічні задачі.

Практична частина. Розв'язування задач на складання рівнянь, нерівностей та їх систем. Математичне моделювання. Задачі з недостатніми й надлишковими даними. Задачі на знаходження оптимального варіанта.

17. Планіметричні задачі (12 год)

Теоретична частина. Основні теоретичні положення планіметрії. Перетворення фігур на площині. Переміщення, гомотетія, подібність, інверсія. Визначувані точки та лінії трикутника. Цікаві теореми геометрії (теореми Птолемея, Чеви, Менелая та інші).

Практична частина. Розв'язування геометричних задач різними методами (геометричних побудов, допоміжного кола, методами площ, перетворень тощо).

18. Розміщення фігур на площині, розрізання та розфарбовування фігур (9 год)

Теоретична частина. Теорема Жордана. Опуклі фігури. Використання розфарбовування під час розв'язування задач підвищеного рівня складності. Покриття та розрізання фігур.

Практична частина. Розв'язування задач на розрізання. Використання розфарбовування. Розв'язування задач підвищеного рівня складності.

19. Графи та їх використання під час розв'язування задач (6 год)

Теоретична частина. Теорія графів. Основні поняття (вершини, ребра, степінь вершин, дерево, цикл, шлях). Орієнтований граф. Доповнення графа. Теорема Ейлера.

Практична частина. Використання графів під час розв'язування різних задач (зокрема, задач з економічним змістом, олімпіадних задач). Задачі на використання теореми Ейлера.

20. Основні методи розв'язування олімпіадних задач. Інваріанти. Принцип крайнього. Ігри двох осіб (12 год)

Теоретична частина. Методи розв'язування олімпіадних задач. Парність, інваріант, півінваріант. Правило крайнього. Вступ до теорії ігор. Ігри для двох. Оптимальна стратегія.

Практична частина. Розв'язування олімпіадних задач різної тематики.

21. Конференції, лекторії, конкурси, тематичні заходи (12 год)

Практична частина. Захист науково-дослідницьких проєктів. Участь у наукових конференціях, конкурсах, олімпіадах, тематичних заходах. Зустрічі з науковцями. Наукові читання, лекторії.

22. Підсумок (3 год)

Теоретична частина. Підбиття підсумків роботи гуртка за навчальний рік.

Практична частина. Завдання на літні канікули.

ПРОГНОЗОВАНИЙ РЕЗУЛЬТАТ

Вихованці мають знати:

- основні етапи науково-дослідницької діяльності;
- поняття про науку, форми та методи наукових досліджень;
- елементи теорії множин і математичної логіки;
- поняття про цілі числа та їх подільність;
- принцип Діріхле;
- основи комбінаторики;
- алгебраїчні рівняння, нерівності та їх системи;
- основні методи доведення нерівностей.

Вихованці повинні вміти:

- виконувати основні операції з різними множинами;
- розв'язувати задачі підвищеного рівня складності на арифметичну та геометричну прогресії;
- знаходити границі послідовності;
- використовувати метод математичної індукції;
- розв'язувати задачі на складання рівнянь, нерівностей та їх систем;
- здійснювати математичне моделювання;
- розв'язувати задачі з недостатніми та надлишковими даними;
- розв'язувати геометричні задачі різними методами (геометричних побудов, допоміжного кола, методами площ, перетворень тощо);
- розв'язувати задачі на розрізання.

У вихованців мають сформуватися такі компетентності:

- *пізнавальна*: формування наукового світогляду, уявлень про ідеї та методи математики, її роль у пізнанні дійсності; зацікавлення математикою і майбутньою професійною діяльністю, що пов'язана з цією наукою;
- *практична*: опанування навичок застосування математичних методів та ідей у повсякденному житті; використання різних джерел для пошуку наукової інформації; здатність до побудови математичних моделей реальних об'єктів;
- *творча*: набуття досвіду застосування творчого підходу під час розв'язування математичних задач підвищеного рівня складності;
- *соціальна*: розвиток здатності працювати у команді й спільно виконувати навчальні завдання.

Вищий рівень, другий рік навчання НАВЧАЛЬНО-ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН

№ з/п	Тема	Кількість годин		
		теоретичних	практичних	усього
1.	Вступ	1	2	3
2.	Наука і науково-дослідницька діяльність	3	12	15
3.	Комбінаторика	3	9	12
4.	Основи теорії ймовірностей	3	9	12
5.	Математичні методи оброблення результатів. Основи математичної статистики	3	6	9
6.	Тригонометричні й обернені тригонометричні функції	6	9	15
7.	Показникові й логарифмічні рівняння, нерівності та їх системи	3	6	9
8.	Елементи математичного аналізу. Диференціальне й інтегральне числення	3	9	12
9.	Функції та графіки. Застосування похідної для дослідження властивостей функції	3	9	12
10.	Доведення нерівностей	3	6	9
11.	Рівняння, нерівності та їх системи з модулем і параметром	3	9	12
12.	Функціональні рівняння	3	6	9
13.	Задачі з цілою і дробовою частинами числа	3	6	9
14.	Комплексні числа та їх застосування	3	6	9
15.	Методи розв'язування геометричних задач	3	9	12
16.	Стереометричні задачі	3	12	15
17.	Геометричні задачі на комбінації тіл	3	6	9

№ з/п	Тема	Кількість годин		
		теоретичних	практичних	усього
18.	Геометричні задачі на екстремуми	3	6	9
19.	Задачі підвищеного рівня складності, нестандартні задачі	—	9	9
20.	Конференції, лекторії, конкурси, тематичні заходи	3	9	12
21.	Підсумок	1	2	3
Разом		59	157	216

ЗМІСТ ПРОГРАМИ

1. Вступ (3 год)

Теоретична частина. Мета і завдання роботи гуртка. План роботи гуртка на навчальний рік. Правила безпеки життєдіяльності й поведінки в закладі освіти. Правила санітарії, гігієни й безпечної роботи за комп'ютером. Облаштування робочого місця учня. Організаційні питання.

Практична частина. Вхідне тестування. Диспут «Актуальні проблеми наукових досліджень у галузі математики».

2. Наука і науково-дослідницька діяльність (15 год)

Теоретична частина. Особливості розвитку сучасної науки. Практичне значення наукових досліджень. Організація науково-дослідницької діяльності. Можливості практичного застосування результатів наукових досліджень. Форми оприлюднення результатів. Використання технічних засобів. Наукова термінологія.

Ознайомлення з програмами для створення презентації, їх інструментами. Організація представлення й захисту дослідницького проєкту. Вимоги до доповіді, постерного захисту, наукової конференції. Структура доповіді. Правила складання й оформлення презентацій, оформлення постера.

Підготовка до виступу. Загальні правила ведення дискусії. Ораторське мистецтво. Поради доповідачеві.

Практична частина. Визначення завдань науково-дослідницької діяльності, обрання методів дослідження, конкретизація мети. Виконання науково-дослідницької роботи (дослідницького проєкту) за індивідуальними планами. Написання й оформлення дослідницької роботи. Підготовка до захисту.

3. Комбінаторика (12 год)

Теоретична частина. Повторення основних відомостей з комбінаторики. Кортєж. Сполуки з повторенням елементів. Формула включення-виключення. Кулі та перегородки. Рекурентні співвідношення.

Практична частина. Розв'язування логічних задач, розв'язування комбінаторних задач (комбінаторно-логічних, комбінаторно-геометричних). Використання формули включення-виключення, методу куль і перегородок. Пошук рекурентних співвідношень, дослідження та доведення рекурентних формул.

4. Основи теорії ймовірностей (12 год)

Теоретична частина. Стохастичний експеримент. Елементарна подія. Множина елементарних подій. Види подій. Ймовірність події. Класична і статистична ймовірність. Центр розподілу ймовірностей (математичне сподівання). Умовні ймовірності. Ймовірність добутку та суми подій. Повторні незалежні випробування. Формула Бернуллі. Формула Баєса. Закон великих чисел. Оцінювання розсіювання ймовірностей.

Практична частина. Обчислення ймовірності випадкових подій. Розв'язування різних задач на обчислення ймовірностей.

5. Математичні методи оброблення результатів. Основи математичної статистики (9 год)

Теоретична частина. Способи опрацювання даних. Середнє значення, мода та медіана. Відсоткові розрахунки. Способи аналізу даних: порівняльний, системний. Основні поняття математичної статистики. Генеральна сукупність і вибірка. Частота. Розподіл частот. Гістограма. Числові характеристики дискретної випадкової величини. Математичне сподівання. Математичне моделювання процесів.

Практична частина. Дії з наближеними значеннями. Обчислення похибок наближення, визначення точності наближення. Розв'язування задач на відсоткові розрахунки. Опрацювання даних і побудова гістограм. Розв'язування прикладних задач.

6. Тригонометричні й обернені тригонометричні функції (15 год)

Теоретична частина. Радіанна міра кута. Тригонометричні функції, їх властивості й графіки. Графіки гармонічних коливань. Обернені тригонометричні функції. Основні методи розв'язування тригонометричних рівнянь, нерівностей та їх систем. Деякі спеціальні способи перетворення тригонометричних виразів.

Практична частина. Перетворення виразів, що містять тригонометричні функції, обернені тригонометричні функції. Розв'язування тригонометричних рівнянь, нерівностей та їх систем. Рівняння та нерівності, що містять обернені тригонометричні функції. Дослідження періодичності функцій. Побудова графіків гармонічних коливань, графіків обернених тригонометричних функцій.

7. Показникові й логарифмічні рівняння, нерівності та їх системи (9 год)

Теоретична частина. Показникова і логарифмічна функції, їх властивості й графіки. Логарифм, його властивості. Основні методи розв'язування показникових і логарифмічних рівнянь, нерівностей, їх систем. Натуральні логарифми.

Практична частина. Перетворення виразів, що містять логарифми, степені та корені. Розв'язування показникових, логарифмічних рівнянь, нерівностей, їх систем.

8. Елементи математичного аналізу. Диференціальне й інтегральне числення (12 год)

Теоретична частина. Границя функції. Неперервність функції. Операції з неперервними функціями. Асимптоти до графіка функції. Похідна. Її геометричний і механічний зміст. Теореми про похідні. Похідна складеної функції. Первісна і невизначений інтеграл. Визначений інтеграл.

Практична частина. Обчислення границі функції. Дослідження функції на неперервність. Знаходження асимптот. Дослідження точок розриву. Знаходження й обчислення похідних функцій. Знаходження первісних функцій. Знаходження інтегралів різними методами. Обчислення площ і об'ємів за допомогою визначеного інтеграла.

9. Функції та графіки. Застосування похідної для дослідження властивостей функції (12 год)

Теоретична частина. Застосування похідної для дослідження властивостей функції. Теореми Ферма й Лагранжа. Дотична до графіка функції. Застосування похідної для розв'язування рівнянь і нерівностей.

Практична частина. Дослідження функції на монотонність, екстремуми, опуклість. Побудова графіків функцій. Розв'язування задач на знаходження найбільшого і найменшого значень. Задачі на дотичну. Розв'язування рівнянь і нерівностей методами математичного аналізу.

10. Доведення нерівностей (9 год)

Теоретична частина. Повторення основних методів доведення нерівностей. Нерівність Єнсена. Використання похідної та інтеграла для доведення нерівностей.

Практична частина. Доведення нерівностей різними методами, застосування методів математичного аналізу.

11. Рівняння, нерівності та їх системи з модулем і параметром (12 год)

Теоретична частина. Модуль числа і його властивості. Рівняння й нерівності з модулем. Метод інтервалів. Узагальнена теорема Вієта. Методи розв'язування рівнянь і нерівностей з параметром.

Практична частина. Дослідження коренів квадратного тричлена. Застосування теореми Вієта для розв'язування цілого раціонального рівняння. Розв'язування тригонометричних, логарифмічних, показникових, ірраціональних рівнянь, нерівностей, їх систем з модулем і параметром.

12. Функціональні рівняння (9 год)

Теоретична частина. Методи математичного аналізу під час розв'язування функціональних рівнянь. Диференціальні рівняння I та II порядку й методи їх розв'язування.

Практична частина. Розв'язування функціональних рівнянь різними методами. Розв'язування диференціальних рівнянь і задач на складання диференціальних рівнянь.

13. Задачі з цілою і дробовою частинами числа (9 год)

Теоретична частина. Ціла й дробова частини числа, їх властивості. Графіки функцій, що містять цілу і дробову частини числа. Рівняння з цілою і дробовою частинами та їх системи, способи розв'язання.

Практична частина. Розв'язування рівнянь, що містять цілу і дробову частини числа, та їх систем. Побудова графіків функцій, пов'язаних із функцією антьє.

14. Комплексні числа та їх застосування (9 год)

Теоретична частина. Розширення поняття числа. Комплексні числа. Алгебраїчна і тригонометрична форми комплексного числа. Дії з комплексними числами. Формула Муавра. Формула Ейлера. Показникова форма комплексного числа. Логарифм комплексного числа. Комплексні

корені багаточлена. Розв'язування алгебраїчних рівнянь на множині комплексних чисел.

Практична частина. Дії з комплексними числами в алгебраїчній і тригонометричній формах. Розв'язування квадратних рівнянь з комплексними коефіцієнтами. Дії з комплексними числами в показниковій формі. Застосування комплексних чисел у тригонометрії та геометрії. Розв'язування рівнянь на множині комплексних чисел.

15. Методи розв'язування геометричних задач (12 год)

Теоретична частина. Систематизація методів розв'язування геометричних задач. Координати й вектори. Геометричні перетворення. Координатно-векторний метод розв'язання геометричних задач. Метод перетворень.

Практична частина. Розв'язування задач методом координат. Розв'язування задач векторним методом. Методи побудови зображень (позиційні задачі стереометрії). Розв'язування задач методом побудови проєктувальних прямих. Розв'язання задач за допомогою симетрії. Застосування гомететії та повороту для розв'язування задач. Застосування методу відповідності й методу слідів для побудови перерізів багатогранників.

16. Стереометричні задачі (15 год)

Теоретична частина. Паралельність і перпендикулярність у просторі. Кути й відстані в просторі. Призма, піраміда, їх властивості. Круглі тіла.

Практична частина. Розв'язування задач на знаходження відстаней у просторі. Розв'язування задач на обчислення відстані між мимобіжними прямими. Розв'язування задач на знаходження кутів у просторі.

17. Геометричні задачі на комбінації тіл (9 год)

Теоретична частина. Комбінації тіл: комбінації круглих тіл, комбінації багатогранників з круглими тілами, різні комбінації. Взаємне розташування елементів тіл у комбінаціях фігур.

Практична частина. Розв'язування задач на комбінації різних фігур.

18. Геометричні задачі на екстремуми (9 год)

Теоретична частина. Застосування похідної та інтеграла для розв'язання геометричних задач.

Практична частина. Планіметричні задачі на екстремуми. Стереометричні задачі на екстремуми.

19. Задачі підвищеного рівня складності, нестандартні задачі (9 год)

Теоретична частина. Принципи розв'язування задач підвищеного рівня складності, нестандартних типів задач.

Практична частина. Математичний бій (на основі задач підвищеного рівня складності).

20. Конференції, лекторії, конкурси, тематичні заходи (12 год)

Практична частина. Участь у наукових конференціях, конкурсах, олімпіадах, тематичних заходах. Зустрічі з науковцями. Наукові читання, лекторії.

21. Підсумок (3 год)

Теоретична частина. Підбиття підсумків роботи гуртка.

Практична частина. Презентація найкращих науково-дослідницьких робіт (проектів). Поради й рекомендації щодо подальшої науково-дослідницької роботи.

ПРОГНОЗОВАНИЙ РЕЗУЛЬТАТ

Вихованці мають знати:

- основні етапи науково-дослідницької діяльності;
- математичні методи оброблення результатів дослідження;
- алгоритми розв'язування основних (базових) задач з тем курсу;
- типи текстових задач і методи їх розв'язання;
- основні математичні поняття та основні розділи математики;
- основні види рівнянь і нерівностей, методи їх розв'язання;
- елементарні функції та їх властивості;
- основні методи розв'язання олімпіадних задач.

Вихованці повинні вміти:

- виконувати основні операції з різними множинами;
- розв'язувати рівняння, нерівності та їх системи;
- будувати графіки функцій різними методами;
- розв'язувати завдання з модулем і параметром;
- застосовувати різні методи для розв'язання геометричних задач;
- доводити нерівності;
- оцінювати точність наближень, похибки обчислень;
- використовувати теоретичні знання для розв'язання практичних задач;
- аналізувати інформацію, доходити висновків.

У вихованців мають сформуватися такі компетентності:

- *пізнавальна*: поглиблення знань з математики; розвиток позитивної мотивації до цілеспрямованої пізнавальної та науково-дослідницької діяльності;
- *практична*: опанування вмінь застосовувати математичні методи та ідеї у повсякденному житті; розвиток здатності до систематизації та класифікації математичних об'єктів; набуття навичок розв'язувати математичні задачі підвищеного рівня складності, здійснювати науково-дослідницьку діяльність в галузі математики; розвиток уміння правильно формулювати й вільно висловлювати свої думки, презентувати отримані результати дослідження, брати участь у наукових дискусіях;
- *творча*: набуття досвіду реалізації творчих здібностей під час проведення пошукового, наукового дослідження в галузі математики; формування логічного й аналітичного мислення;
- *соціальна*: розвиток стійкого інтересу до математики та майбутньої професійної діяльності, пов'язаної з цією наукою; формування позитивних якостей емоційно-вольової сфери особистості (наполегливості, цілеспрямованості, здатності аргументовано обстоювати свою думку), творчої ініціативи.

ОРІЕНТОВНИЙ ПЕРЕЛІК ОБЛАДНАННЯ

Обладнання	Кількість, шт.
Персональний комп'ютер	за кількістю учнів
Екран для демонстрації	1
Мультимедійний проєктор	1
Інтерактивна дошка	1
Принтер	1
Сканер	1
Калькулятор	за кількістю учнів
Папір друкарський	у разі потреби
Ручки кулькові	у разі потреби
Олівці креслярські	у разі потреби
Лінійки	у разі потреби
Скріпки, кнопки	у разі потреби
Теки	у разі потреби

ЛІТЕРАТУРА

1. Білоус С. Ю. Як розвинути в учня якості дослідника. Харків : Видавнича група «Основа», 2004. 157 с.
2. Гайштут О. Г., Литвиненко Г. М. Алгебра. Розв'язування задач та вправ. Київ : Магістр-S, 1997. 255 с.
3. Назаренко О. М., Назаренко Л. Д. Тисяча і один приклад. Рівності і нерівності : посібник для абітурієнтів. Суми : Слобожанщина, 1994. 272 с.
4. Одарченко Н. І., Бондар О. В. Збірник задач зі спецкурсу «Вибрані розділи математики» : навч. посіб. Суми : СумДУ, 2008. 171 с.
5. Перехейда О. М., Ушаков Р. П. Доведення нерівностей. Харків : Видавнича група «Основа», 2003. 96 с.
6. Ясінський В. В. Алгебра. Київ : ІДП НТУУ «КПІ», 2002. 75 с.
7. Ясінський В. В. Математика : навч. посіб. для слухачів ФДП НТУУ «КПІ» / за ред. член-кор. НАН України В. С. Мельника. Київ : НТУУ «КПІ», 2006. 368 с.

А. І. Азаренкова

НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА «ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА»

ВИЩИЙ РІВЕНЬ

«Схвалено для використання в освітньому процесі»

*Рішення експертної комісії з позашкільної освіти від 11.03.2024
(протокол № 1)*

*Зареєстровано у Каталозі надання грифів навчальній літературі
та навчальним програмам за № 8.0002–2024*

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Перехід на нові освітні стандарти передбачає зростання прикладної спрямованості освіти взагалі й математики зокрема. На сьогодні основними завданнями навчання математики є забезпечення достатнього рівня математичних знань, формування й розвиток високого рівня математичної культури, необхідних для активної участі в розв'язанні проблем повсякденного життя, освіти впродовж життя, успішної трудової діяльності, що передбачає використання математичного мислення — уміння класифікувати об'єкти, встановлювати закономірності, знаходити зв'язки між різними явищами, ухвалювати рішення. Сучасну науку характеризує інтенсивне застосування математичних методів у різних її галузях. Прикладна спрямованість математики демонструє її визначну роль у житті людини, спонукає до поглибленого вивчення предмета, сприяє формуванню наукового світогляду.

Навчальна програма «Прикладна математика» розроблена з дотриманням вимог законів України «Про освіту», «Про позашкільну освіту», Положення про позашкільний навчальний заклад, Положення про порядок організації індивідуальної та групової роботи в позашкільних навчальних закладах, Типових навчальних планів для організації навчально-виховного процесу в позашкільних навчальних закладах системи Міністерства освіти і науки України. У програмі враховано норми державних стандартів загальної середньої освіти й рекомендації Концепції розвитку природничо-математичної освіти (STEM-освіти), вона ґрунтується на сучасних інноваційних методах навчання (контекстному, імітаційному, проблемному тощо), технологіях (групових, мультимедійних, мережевих, ігрових, інтерактивних, технологіях індивідуалізації процесу навчання) і міжпредметних зв'язках.

Універсальність математичних методів дає змогу відобразити зв'язок теоретичного матеріалу різних галузей знань з їх практичним значенням.

Навчальна програма передбачає наявність у вихованців достатнього рівня математичної підготовки та спрямована на поглиблення їх математичних знань з орієнтацією на застосування набутих знань у наукових дослідженнях у різних сферах (математика, фізика, економіка, інформатика, біологія, соціологія, екологія тощо).

Мета програми — формування у вихованців предметних і дослідницьких компетентностей, що забезпечать використання основних математичних методів для розв'язання різних практичних і теоретичних проблем, задач прикладного характеру у процесі освітньої діяльності в гуртку дослідницько-експериментального напрямку.

Завданнями програми є формування у вихованців таких компетентностей:

- *пізнавальної*: розвивати навички пізнавальної діяльності на основі інтеграції знань, використання отриманої інформації для розв'язання прикладних, дослідницьких завдань у різних галузях; формувати науковий світогляд;
- *практичної*: розвивати навички аналізувати й оцінювати складні проблеми; формувати здатність здійснювати самостійний пошук рішень, висувати гіпотези щодо оптимального розв'язання завдань засобами математики, моделювати процеси та ситуації із застосуванням математичного апарату, використовувати математичні знання і методи для розв'язання широкого спектра науково-дослідницьких проблем із дотриманням принципів академічної доброчесності;
- *творчої*: формувати творчий підхід до виконання дослідницьких завдань, розв'язання задач прикладного характеру; розвивати навички логічного й аналітичного мислення, розуміння суперечностей, генерування ідей для реалізації творчого потенціалу, проектування та здійснення творчої діяльності самостійно;
- *соціальної*: формувати стійкий інтерес до математики та пов'язаної з нею професійної діяльності, здатність знаходити рішення для реалізації власних ідей; розвивати організаційні навички, уміння ефективно співпрацювати для досягнення визначених цілей; формувати позитивні якості емоційно-вольової сфери особистості.

Навчальна програма призначена для роботи з вихованцями старшого шкільного віку (15–17 років), які виявляють бажання поглибити знання з математики, опанувати методи математичного моделювання й долучитися до активної науково-дослідницької діяльності.

Програмою передбачено два роки навчання:

1-й рік — вищий рівень — 216 год на рік (6 год на тиждень);

2-й рік — вищий рівень — 216 год на рік (6 год на тиждень).

Програму розроблено з урахуванням принципів наступності, послідовності, доступності, науковості й використання міжпредметних

зв'язків, що реалізуються у процесі інтеграції й координації знань, забезпечують формування у вихованців системи політехнічних знань і наукового світогляду.

Програма охоплює низку тем зі шкільного курсу математики з акцентом на їх прикладну спрямованість (рівняння, нерівності, функції, похідна тощо), а також матеріал, що опрацьовується недостатньо чи зовсім не вивчається в закладах загальної середньої освіти, але має важливе прикладне значення (функційні рівняння, графи, основи криптографії, інваріант й інші). Є теми, що пропонуються до розгляду оглядово на першому році та розширено на другому році навчання (комбінаторика, теорія ймовірностей, математична статистика).

Зміст програми першого року навчання спрямований на удосконалення й поглиблення математичних знань; ознайомлення з формами й методами наукових досліджень, науковою термінологією, правилами роботи з науковими та іншими джерелами інформації, вимогами до роботи над дослідницьким проєктом; розкриття сутності науково-дослідницької діяльності; опанування найпростіших методів математичного моделювання; використання програмних засобів для опрацювання результатів досліджень. Перевага надається використанню готових алгоритмів під час розв'язування прикладних і практичних задач (зокрема, на складання рівнянь, нерівностей і їх систем, вимірювання на місцевості).

Основний зміст програми другого року навчання передбачає продовження роботи з удосконалення й поглиблення математичних знань; опанування методів математичного і комп'ютерного моделювання, основ програмування; ознайомлення з різними методами опрацювання результатів пошукової діяльності, вимогами до оформлення результатів науково-дослідницької діяльності з дотриманням академічної доброчесності, вимогами до написання анотацій, виступів, підготовки постерів, презентацій, звітів, доповідей; визначення можливостей практичного застосування отриманих результатів. Також заплановано розв'язування прикладних задач з використанням основних методів математичного моделювання.

Зміст програми реалізується з огляду на індивідуальні здібності та вікові особливості вихованців за допомогою як традиційних форм і методів навчання, так й інноваційних методів активізації пізнавальної діяльності вихованців, комп'ютерних і проєктних технологій, технологій дистанційного та змішаного навчання, методів стимулювання пізнання. Використовуються різноманітні засоби навчання: наочні посібники, роздатковий матеріал, технічні засоби. Окрім того, заняття побудовано за принципом раціонального поєднання й чергування видів діяльності,

що дає змогу зберегти інтерес вихованців до математики й інших наук, спонукає до усвідомлення необхідності поглиблення знань.

Програма передбачає застосування групової й індивідуальної форм роботи з використанням платформ для дистанційного навчання та індивідуальної роботи з окремими вихованцями під час консультацій. Індивідуалізація і диференціація, що застосовуються в процесі освітньої діяльності, дають можливість вихованцям брати участь у науково-освітніх конкурсних заходах із першого року навчання.

Формувальне оцінювання рівня знань вихованців відбувається за результатами письмових робіт, тестування, виступів на семінарах і конференціях, участі в диспутах, предметних олімпіадах, Всеукраїнському конкурс-захисті науково-дослідницьких робіт вихованців — членів МАН України, інших конкурсах.

Індивідуальна робота за програмою організовується відповідно до Положення про порядок організації індивідуальної та групової роботи в позашкільних навчальних закладах, затвердженого наказом Міністерства освіти і науки від 11.04.2004 № 651 (зі змінами, внесеними згідно з наказом Міністерства освіти і науки України від 10.12.2008 № 1123).

Перелік обладнання у програмі подано як орієнтовний — з урахуванням можливостей закладу освіти.

Вищий рівень, перший рік навчання НАВЧАЛЬНО-ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН

№ з/п	Тема	Кількість годин		
		теоретичних	практичних	усього
1.	Вступ	1	2	3
2.	Поняття про моделювання. Прикладна задача	2	4	6
3.	Теорія множин. Елементи математичної логіки	2	4	6
4.	Елементи комбінаторики та теорії ймовірностей	3	9	12
5.	Елементи математичної статистики. Діаграми	3	6	9
6.	Відсоткові розрахунки. Прикладні задачі з елементарної математики економічного змісту	3	9	12
7.	Числові нерівності. Дії з наближеними величинами. Елементи теорії похибок	3	6	9

№ з/п	Тема	Кількість годин		
		теоретичних	практичних	усього
8.	Подільність цілих чисел. Прикладні задачі на складання діофантових рівнянь	3	6	9
9.	Багаточлени. Раціональні рівняння, нерівності, їх системи як математичні моделі реальних явищ	3	9	12
10.	Функційні й нефункційні залежності. Елементарні функції у прикладних задачах	3	9	12
11.	Математична індукція	2	4	6
12.	Системи числення. Алгоритми. Поняття про задачі з програмування	2	4	6
13.	Інваріант. Ігри двох осіб. Пошук виграшних стратегій	2	4	6
14.	Графи у прикладних задачах	3	6	9
15.	Обчислення сум. Послідовності та прогресії у прикладних задачах	3	6	9
16.	Прикладні задачі з елементарної математики фізичного, біологічного й хімічного змісту	3	6	9
17.	Планіметричні задачі практичного і прикладного змісту	3	9	12
18.	Розміщення фігур на площині. Розрізання і розфарбовування фігур	2	4	6
19.	Елементи криптографії. Приклади шифрування інформації методами елементарної математики	2	4	6
20.	Основи науково-дослідницької діяльності. Індивідуальний дослідницький проект. Дослідницька робота	12	32	54
21.	Підсумок	—	3	3
Разом		60	156	216

ЗМІСТ ПРОГРАМИ

1. Вступ (3 год)

Теоретична частина. Мета і завдання роботи гуртка. План роботи гуртка на навчальний рік. Правила безпеки життєдіяльності й поведінки в закладі. Правила безпечної роботи за комп'ютером. Організаційні питання.

Практична частина. Зустріч із колишніми вихованцями гуртка. Обговорення теми «У світі немає місця для непривабливої математики» (Р. Харді).

2. Поняття про моделювання. Прикладна задача (6 год)

Теоретична частина. Моделювання як метод і процес дослідження об'єктів пізнання. Основні поняття й терміни. Типи моделей. Поняття про математичне моделювання, його переваги. Види математичних моделей, вимоги до них, методи моделювання. Основні етапи моделювання. Прикладна задача, її сутність, формулювання й формалізація. Основні методи розв'язування прикладних і практичних задач.

Практична частина. Формулювання прикладної задачі. Приклади формалізації. Створення математичної моделі (визначення компонентів, об'єкта моделювання, його властивостей, основних залежностей між складовими частинами), формулювання гіпотез щодо можливого методу розв'язання. Представлення дослідженого у вигляді математичних залежностей і відношень: виразів, рівнянь, функцій тощо. Інтерпретація результатів.

Розв'язування задач на обчислення значень величин, що зустрічаються у практичній діяльності, використання відомих формул, що виражають зв'язки між величинами (залежність відстані від часу, часу від швидкості, маси речовини від об'єму; визначення площ фігур, об'ємів тіл, ціни та вартості товарів, маси й молярної маси хімічних речовин тощо).

Розв'язування прикладних задач побутового характеру методами повного і неповного перебору, найпростіших задач на знаходження оптимального варіанта. Розв'язування задач на переливання та зважування.

3. Теорія множин. Елементи математичної логіки (6 год)

Теоретична частина. Основні поняття теорії множин (множина, елементи множини, види множин: порожня множина, підмножина, скінченні й нескінченні, упорядковані й неупорядковані множини). Способи задання множин. Операції з множинами (об'єднання, переріз, різниця, доповнення). Основні закони операцій з множинами. Універсальна множина. Кількість підмножин скінченної множини. Взаємно-однозначна відповідність (бієкція). Розбиття на класи. Діаграми Ейлера – Венна. Злічені множини.

Логіка, її розвиток. Основні поняття логіки. Висловлювання та форми висловлювання. Прості й складні висловлювання. Алгебра висловлювань. Предикати, операції з ними. Квантори. Істинні й хибні твердження. Умовивід. Слідування, рівносильність, загальність та існування. Логічні операції. Зміст і обсяг поняття. Основні закони традиційної логіки. Закон тотожності. Логічні закони. Дедукція й індукція. Вивідність із формули. Метатеорема дедукції. Аналогія. Заперечення. Метод від супротивного. Методи винахідництва. Гіпотеза. Поняття алгоритму.

Практична частина. Виконання вправ і розв'язування задач на основні операції з множинами, підрахунок кількості підмножин скінченної множини. Розв'язування логічних, прикладних задач за допомогою діаграм Ейлера — Венна. Використання формули включень-виключень. Розв'язування прикладних задач на встановлення взаємно-однозначної відповідності між елементами множин.

Визначення істинності й хибності висловлювань. Застосування логіки предикатів. Розв'язування задач практичного змісту на пошук суперечностей і закономірностей. Розв'язування задач методом від супротивного. Розв'язування дослідницьких задач (формулювання, доведення, перевірка гіпотез). Наведення прикладів застосування дедуктивних й індуктивних методів міркувань. Прикладні задачі з недостатніми й надлишковими даними, аналіз очікуваних результатів.

4. Елементи комбінаторики та теорії ймовірностей (12 год)

Теоретична частина. Комбінаторика, комбінаторний аналіз. Основні правила комбінаторики (правило суми й правило добутку). Комбінаторні задачі. Безпосередній перебір. Сполуки без повторень елементів: перестановки, розміщення, комбінації. Властивості комбінацій. Трикутник Паскаля. Біном Ньютона. Властивості біноміальних коефіцієнтів. Правило рівності. Підрахунок двома способами. Елементарні випадкові події. Вірогідна й неможлива події. Імовірність випадкової події. Класична й статистична ймовірність. Використання комбінаторики для обчислення ймовірностей випадкових подій.

Практична частина. Розв'язування прикладних задач на визначення кількості варіантів, способів, можливостей, маршрутів тощо. Використання різних методів: повного перебору, основних правил комбінаторики, формул для обчислення сполук без повторень елементів, правила рівності, підрахунку двома способами. Розв'язування задач і виконання вправ на біном Ньютона. Дослідження властивостей біноміальних коефіцієнтів, властивостей трикутника Паскаля. Представлення й обговорення результатів.

Розв'язування задач на обчислення ймовірностей випадкових подій. Визначення частоти події експериментально-статистичними методами, використання формули класичної ймовірності, формул і правил комбінаторики. Розгляд, обговорення й пояснення парадоксів теорії ймовірностей: парадокс підкидання монети, парадокс днів народження, парадокс хлопчика і дівчинки («діти містера Сміта»), парадокс Монті Голла, парадокс двох конвертів.

5. Елементи математичної статистики. Діаграми (9 год)

Теоретична частина. Початкові відомості математичної статистики. Генеральна сукупність і вибірка. Варіанта, її частота й відносна частота. Розмах вибірки. Міри центральної тенденції: середнє значення, мода і медіана. Етапи статистичного дослідження. Діаграми, їх види. Гістограма.

Практична частина. Розв'язування прикладних задач на читання, побудову, інтерпретацію таблиць і діаграм. Побудова найпростіших математичних моделей експериментально-статистичними методами. Моделювання прикладів статистичних досліджень. Визначення мети дослідження, методів збирання інформації. Здійснення збирання даних, опрацювання інформації, обчислення частоти й відносної частоти варіанти вибірки, визначення мір центральної тенденції. Побудова різних видів діаграм. Представлення результатів, формулювання висновків і розроблення рекомендацій.

6. Відсоткові розрахунки. Прикладні задачі з елементарної математики економічного змісту (12 год)

Теоретична частина. Відсоткові розрахунки. Формула простих і складних відсотків. Елементи теорії економічних знань, основні поняття економіки. Математичне моделювання простих фінансових операцій (банківські операції, оплата послуг, оплата товару тощо). Економіко-математичні моделі. Бізнес-проєкти (основні терміни, основні економічні показники, методологія їх визначення). Планування бізнес-ідей, етапи роботи. Індивідуальні й колективні бізнес-проєкти, їх фінансова частина та розрахунок бізнес-плану. Методи кількісного оцінювання проєктних ризиків.

Практична частина. Розв'язування прикладних задач на відсотки різними способами (використання означення відсотка, правил знаходження відсотків від числа, числа за його відсотком, відсоткового співвідношення; складання пропорції, логічних міркувань).

Розв'язування прикладних задач економічного змісту з використанням відсотків: визначення заробітної плати, плану виробництва, відсотків за банківськими вкладами, відсотків за кредитами, обчислення прибутків,

оцінювання акційних пропозицій під час здійснення покупок тощо. Моделювання простих фінансових операцій (сплата комунальних послуг, розрахунок сімейного бюджету, кошторисів витрат на ремонт, подорожі тощо). Планування й аналіз підприємницьких і соціальних проєктів. Розроблення та розрахунок індивідуальних, колективних бізнес-планів, їх презентація, аналіз результатів, висування ідей щодо вдосконалення проєктів.

7. Числові нерівності. Дії з наближеними величинами. Елементи теорії похибок (9 год)

Теоретична частина. Числові нерівності, їх властивості. Операції з нерівностями. Дії з наближеними величинами. Оцінювання значень виразів. Джерела виникнення похибок. Абсолютна й відносна похибки. Похибки обчислень і похибки наближень (округлень). Методи доведення нерівностей. Синтетичний, аналітичний і геометричний методи. Класичні нерівності: нерівність Коші, нерівність Коші — Буняковського, нерівність між середніми. Нерівність обернених величин. Геометричні нерівності. Методи підсилення та від супротивного.

Практична частина. Виконання вправ на застосування властивостей числових нерівностей. Оцінювання значень виразів. Розв'язування практичних задач, що передбачають вимірювання, обчислення значень величин. Визначення похибок обчислень.

Доведення нерівностей різними методами: за допомогою означення, зведення до очевидної нерівності, використання класичних нерівностей, допоміжних нерівностей, застосування методів від супротивного і підсилення, геометричних міркувань. Пошук опорних нерівностей. Розв'язування прикладних задач на використання методів оцінювання значень величин, обрання оптимальних варіантів шляхом прикидки, оцінювання за допомогою нерівностей і їх властивостей.

8. Подільність цілих чисел. Прикладні задачі на складання діофантових рівнянь (9 год)

Теоретична частина. Цілі числа. Подільність цілих чисел. Подільність й остачі. Китайська теорема про остачі. Прості й складені числа. Основна теорема арифметики. Конгруенції, їх властивості. Періодичність останньої цифри під час зведення до натурального степеня. Останні цифри точного квадрата. Ознаки подільності.

Найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне у прикладних задачах. Алгоритм Евкліда.

Діофантові рівняння першого степеня. Основні методи розв'язування діофантових рівнянь вищих степенів (розкладання на множники,

використання подільності та симетричності, виділення цілої частини й повного квадрата, методи спроб і нескінченного спуску). Діофантові рівняння як математичні моделі прикладних задач.

Практична частина. Розв'язування прикладних задач на використання ознак подільності, найбільшого спільного дільника та найменшого спільного кратного (задачі на частини, розподіл предметів, визначення можливості зустрічі рухомих об'єктів тощо).

Розв'язування прикладних задач на складання діофантових рівнянь і їх систем.

9. Багаточлени. Раціональні рівняння, нерівності, їх системи як математичні моделі реальних явищ (12 год)

Теоретична частина. Багаточлени, їх роль і міжпредметне значення в розв'язуванні практичних задач. Подільність багаточленів. Теорема Безу, її наслідки. Схема Горнера. Корені багаточлена, кратні корені. Метод невизначених коефіцієнтів. Цілі раціональні рівняння. Симетричні багаточлени, їх застосування.

Алгебраїчні рівняння, нерівності, їх системи як математичні моделі реальних явищ. Основні методи розв'язування рівнянь вищих степенів (методи заміни змінних, розкладання на множники, підстановок, використання властивостей функції). Узагальнений метод інтервалів. Нестандартні методи розв'язування рівнянь (виділення повного квадрата, оцінювання значень лівої й правої частин рівняння, використання методу невизначених коефіцієнтів для розкладання на множники, розв'язування рівнянь з коефіцієнтами).

Практична частина. Ділення багаточленів різними способами. Застосування схеми Горнера. Розв'язування задач на застосування теореми Безу та її наслідків. Знаходження цілих і раціональних коренів багаточленів. Розв'язування рівнянь, нерівностей і їх систем різними методами. Прикладні задачі на використання лінійних і квадратичних залежностей між величинами. Розв'язування стандартних прикладних задач на складання рівнянь, нерівностей, систем рівнянь та/або нерівностей: задач на рух (прямолінійний, рівномірний), сумісну роботу, концентрацію, відсотковий вміст тощо.

10. Функційні й нефункційні залежності. Елементарні функції у прикладних задачах (12 год)

Теоретична частина. Елементарні функції, їх властивості та графіки. Перетворення графіків функцій. Композиція функцій. Складені функції. Загальні властивості функції. Квадратний тричлен і квадратична функція.

Розміщення коренів квадратного тричлена відносно заданої точки. Застосування властивостей квадратного тричлена у прикладних задачах.

Функційний аналіз. Графічні методи. Графік рівняння з двома змінними. Перетворення графіків рівнянь. Нерівності з двома змінними. Геометричне місце точок.

Практична частина. Побудова графіків функцій методом геометричних перетворень й іншими методами, використання операцій з графіками (додавання, віднімання, множення й ділення графіків). Дослідження властивостей функцій (без використання похідної). Побудова графіків функцій із модулем. Побудова графіків рівнянь з двома змінними. Побудова геометричних місць точок. Виконання вправ на визначення типу залежності між величинами (функційна, нефункційна; лінійна, квадратична, дробова; пряма чи обернена пропорційність тощо). Виконання вправ на побудову графічних ілюстрацій, що складаються з частин графіків заданих рівнянь, розв'язування оберненої задачі. Розв'язування прикладних задач на читання, побудову, інтерпретацію, аналізування графіків.

Дослідження умов розміщення коренів квадратного тричлена відносно заданої точки. Графічні методи розв'язування рівнянь і нерівностей із параметром. Розв'язування прикладних задач на застосування властивостей квадратного тричлена, задач на оптимізацію.

11. Математична індукція (6 год)

Теоретична частина. Аксиома індукції. Індуктивний метод доведення тверджень. Повна і неповна індукція. Метод математичної індукції та його модифікації, їх застосування в дослідницьких задачах. Застосування методу математичної індукції в математиці. Застосування методу математичної індукції у фізиці, біології.

Практична частина. Виконання вправ на застосування методу математичної індукції під час доведення тотожностей, нерівностей, у задачах на подільність, геометричних задачах, задачах на обчислення сум. Використання методу математичної індукції для доведення гіпотез у математиці, фізиці, біології.

12. Системи числення. Алгоритми. Поняття про задачі з програмування (6 год)

Теоретична частина. Системи числення. Позиційні й непозиційні системи числення, їх використання. Десятковий запис числа. Використання систем числення в обчислювальній техніці. Поняття про числові автомати, способи кодування двійкових чисел. Поняття алгоритму. Приклади алгоритмів. Алгоритмічні мови. Алгоритми роботи з величинами.

Алгоритми збирання інформації. Елементи теорії ігор. Початкові відомості про задачі програмування.

Практична частина. Записування чисел у різних системах числення. Виконання найпростіших операцій із числами двійкової системи.

Побудова блок-схем, математичних алгоритмів розв'язування найпростіших задач з програмування.

13. Інваріант. Ігри двох осіб. Пошук виграшних стратегій (6 год)

Теоретична частина. Поняття інваріанта, півінваріанта. Інваріанти в математиці й фізиці. Встановлення інваріантних властивостей у прикладних задачах. Задачі на ігри двох осіб, використання інваріантів для пошуку й побудови виграшних стратегій.

Практична частина. Визначення інваріантних властивостей під час розв'язування прикладних задач. Розв'язування прикладних задач з використанням інваріанта і півінваріанта. Розв'язування задач на пошук стратегій, побудова алгоритмів до задач.

14. Графи у прикладних задачах (9 год)

Теоретична частина. Теорія графів. Основні поняття (вершини, ребра, степінь вершин, дерево, цикл, шлях). Деякі види графів. Орієнтований граф. Доповнення графа. Основні теореми теорії графів. Теорема Ейлера. Класичні задачі з теорії графів. Алгоритми теорії графів. Методи обходу графів. Пошук у глибину. Топологічне сортування. Пошук мінімального кістякового дерева на графі. Пошук найкоротших шляхів на графі. Алгоритм Прима. Алгоритм Дейкстри. Алгоритм Флойда. Застосування графів у робототехніці.

Практична частина. Використання графів для розв'язування логічних задач. Розв'язування задач із використанням теореми Ейлера. Пошук найкоротших шляхів на графі. Розв'язування прикладних задач економічного змісту за допомогою графів.

15. Обчислення сум. Послідовності та прогресії у прикладних задачах (9 год)

Теоретична частина. Послідовності як вид дискретно заданих функцій. Властивості (монотонність, обмеженість). Поняття про границю послідовності. Арифметична й геометрична прогресії. Застосування методу математичної індукції для дослідження властивостей числових послідовностей. Задачі на обчислення сум. Рекурентні відношення. Числа Фібоначчі, Каталана, Белла, Стірлінга, їх властивості та використання. Шляхи на решітці. Поняття про діаграми Юнга.

Практична частина. Розв'язування прикладних задач на арифметичну і геометричну прогресії (задачі біологічного змісту про розмноження бактерій, фізичного змісту про вільне падіння тіла, економічного змісту про розподіл спадщини тощо).

Розв'язування прикладних задач на побудову числових конструкцій, числових послідовностей. Використання методу математичної індукції для дослідження властивостей цих послідовностей.

Дослідження властивостей і закономірностей послідовностей чисел Фібоначчі, Каталана. Побудова різних моделей послідовності чисел Каталана. Розбиття числа. Побудова найпростіших діаграм Юнга.

16. Прикладні задачі з елементарної математики фізичного, біологічного й хімічного змісту (9 год)

Теоретична частина. Основні методи елементарної математики, що використовуються під час розв'язування прикладних задач фізичного, біологічного, хімічного змісту (аналітичні, графічні методи, використання функційного, комбінаторного аналізу).

Практична частина. Розв'язування різних прикладних задач засобами елементарної математики (задачі на прямолінійний рух об'єктів, рух колом, складнішими траєкторіями, рух назустріч, у різних напрямках, рух з додатковими умовами; задачі на концентрацію та відсотковий вміст речовин, на суміші й сплави, поширення інфекцій, на арифметичні ряди бінарного поділу прокаріотів, зростання популяцій, задачі побутового змісту тощо).

17. Планіметричні задачі практичного і прикладного змісту (12 год)

Теоретична частина. Огляд основних теоретичних положень планіметрії. Перетворення фігур на площині: переміщення, гомотетія, подібність, інверсія. Рівні та подібні фігури. Визначні точки й лінії трикутника. Цікаві теореми геометрії (теореми Птолемея, Чеви, Менелая та інші). Методи розв'язування планіметричних задач: геометричних перетворень, симетрій, площ, координат, векторний метод, допоміжних побудов, допоміжного елемента, алгебраїчні методи тощо.

Практична частина. Розв'язування прикладних задач на застосування різних геометричних методів (подібності, симетрій, геометричних побудов тощо). Використання геометричних фігур під час побудови математичних моделей. Прикладні задачі на обчислення й оцінювання площ. Виконання практичних робіт на знаходження відстаней до недоступних предметів, висоти недосяжних об'єктів тощо.

18. Розміщення фігур на площині. Розрізання і розфарбовування фігур (6 год)

Теоретична частина. Теорема Жордана. Опуклі фігури. Проблема Гільберта розбиття на частини. Покриття та розрізання фігур. Геометрія орнаментів і паркетів.

Використання розфарбовування під час розв'язування задач. Проблема «чотирьох фарб».

Практична частина. Розв'язування задач на розрізання. Дослідження можливості розбиття фігури на обумовлені частини, підрахунок кількості розбиттів. Розв'язування прикладних задач методом розфарбовування, використання шахової дошки. Розв'язування задач поліміно. Дослідження геометрії орнаментів, їх побудова.

19. Елементи криптографії. Приклади шифрування інформації методами елементарної математики (6 год)

Теоретична частина. Роль і місце криптографії у сфері інформаційної безпеки. Задачі з криптографії. Класичні техніки шифрування. Шифри підстановок. Вимоги до сучасних криптосистем. Популярні шифри (пар, ROT13, Цезаря, Віженера, чотирьох квадратів та інші).

Поняття про симетричні шифри. Застосування теорії чисел у криптографії.

Практична частина. Виконання вправ на шифрування інформації за допомогою шифрів перестановок, Цезаря.

20. Основи науково-дослідницької діяльності. Індивідуальний дослідницький проєкт. Дослідницька робота (54 год)

Теоретична частина. Наука. Роль науки в суспільстві, її значення. Проблеми сучасної математичної науки. Наукові дослідження українських учених у галузі прикладної математики.

Наукове дослідження як форма існування та розвитку науки. Види науково-дослідницьких робіт.

Наукова проблема. Етапи роботи над проблемою. Форми й методи наукових досліджень (спостереження, експеримент, індуктивні й дедуктивні методи). Джерела наукової інформації у галузі математики. Методи роботи з науковими й іншими джерелами інформації.

Мала академія наук України. Науково-дослідницька діяльність вихованців — членів МАН України. Індивідуальний дослідницький проєкт. Індивідуальний дослідницький проєкт із прикладної математики, його особливості й структура. Дослідницька робота з математики. Основні вимоги до оформлення дослідницької роботи вихованців — членів МАН України.

Сучасні інформаційні технології. Методи опрацювання інформації. Програмне забезпечення й інформаційна безпека. Текстові й графічні редактори, електронні таблиці, вебдокументи, браузері. Засоби опрацювання текстової, графічної, числової інформації. Можливості опрацювання числової інформації засобами Excel. Роль сучасних інформаційних технологій у науково-дослідницькій діяльності.

Академічна доброчесність. Дотримання принципів академічної доброчесності у процесі науково-дослідницької діяльності.

Практична частина. Обрання теми дослідницької роботи. Визначення рівня розроблення наукової проблеми. Робота з інформаційними джерелами з обраної теми (пошук, аналіз, систематизація).

Планування етапів роботи над дослідженням з обраної теми. Проходження всіх етапів дослідницької роботи: визначення об'єкта, предмета, мети й завдань; обрання методів дослідження. Робота над вступом і змістом основної частини. Опрацювання числової інформації засобами Excel.

Представлення й обговорення результатів.

21. Підсумок (3 год)

Практична частина. Аналіз виконання завдань дослідницької роботи. Проєкт-презентація «Мої наукові досягнення». Визначення завдань для подальшої роботи над дослідженням.

ПРОГНОЗОВАНИЙ РЕЗУЛЬТАТ

У вихованців мають сформуватися такі компетентності:

- *пізнавальна:* використання знань для розв'язування пізнавальних, прикладних і дослідницьких завдань у галузі прикладної математики; розширення математичної обізнаності;
- *практична:* володіння навичками розв'язування прикладних задач із застосуванням теоретичних знань у галузі прикладної математики; формування навичок роботи з науковою інформацією для виконання завдань науково-дослідницької діяльності; здійснення самостійного пошуку засобів оптимального розв'язання завдань і проблем;
- *творча:* використання творчого підходу до застосування математичних знань для розв'язання прикладних, творчих, дослідницьких завдань і навичок логічного й аналітичного мислення для генерування творчих ідей;
- *соціальна:* знаходження власних шляхів втілення висунутих ідей; володіння культурою міжособистісної взаємодії для досягнення визначених цілей; організування науково-дослідницької діяльності.

Вищий рівень, другий рік навчання НАВЧАЛЬНО-ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН

№ з/п	Тема	Кількість годин		
		теоретичних	практичних	усього
1.	Вступ	1	2	3
2.	Комбінаторика. Комбінаторно-логічні та комбінаторно-геометричні методи розв'язування прикладних задач	3	6	9
3.	Основи теорії ймовірностей	3	6	9
4.	Основи математичної статистики. Узагальнення. Математичне моделювання	3	9	12
5.	Поняття про лінійну алгебру. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь	3	6	9
6.	Векторна алгебра. Застосування векторів у задачах фізичного змісту	2	4	6
7.	Поняття про методи оптимізації. Задачі з лінійного програмування	2	4	6
8.	Тригонометричні й обернені тригонометричні функції у прикладних задачах. Гармонічні коливання	2	4	6
9.	Показникові та логарифмічні функції, рівняння, нерівності, їх системи у прикладних задачах	2	4	6
10.	Елементи математичного аналізу. Диференціальне числення	2	4	6
11.	Функції та графіки. Похідна в дослідженнях властивостей функції. Похідна в задачах з оптимізації	3	6	9
12.	Інтегральне числення. Обчислення площ та об'ємів	3	6	9
13.	Використання диференціального й інтегрального числень у фізиці, економіці, біології, статистиці	3	6	9

№ з/п	Тема	Кількість годин		
		теоретичних	практичних	усього
14.	Рівняння, нерівності та їх системи з модулем і параметром. Графічні методи. Функціональні рівняння	2	4	6
15.	Приклади моделювання процесів навколишнього світу за допомогою найпростіших диференціальних рівнянь і їх систем	3	6	9
16.	Зображення просторових фігур на площині. Перетворення простору. Позиційні задачі. Прикладні стереометричні задачі	3	6	9
17.	Геометричні задачі прикладного змісту на комбінації тіл. Проблема розбиття простору	3	6	9
18.	Прикладні геометричні задачі на екстремуми	2	4	6
19.	Програмування мовою Python	3	9	12
20.	Математичні основи криптографії	2	4	6
21.	Індивідуальний дослідницький проект. Постерний захист. Наукова конференція	9	48	57
22.	Підсумок	—	3	3
Разом		59	157	216

ЗМІСТ ПРОГРАМИ

1. Вступ (3 год)

Теоретична частина. Мета і завдання роботи гуртка. План роботи гуртка на навчальний рік. Правила безпеки життєдіяльності та поведінки в навчальному закладі. Правила безпечної роботи за комп'ютером. Організаційні питання.

Математика і сучасний світ. Видатні вчені-математики. Внесок українських вчених у розвиток математики.

Практична частина. Диспут «Прикладна значущість математики. Роль наукових досліджень у галузі математики для розвитку людства».

2. Комбінаторика. Комбінаторно-логічні та комбінаторно-геометричні методи розв'язування прикладних задач (9 год)

Теоретична частина. Теоретичні основи комбінаторики, її застосування. Кортеж. Сполуки з повторенням елементів. Формула включень-виключень. Кулі та перегородки. Рекурентні співвідношення. Комбінаторно-логічні та комбінаторно-геометричні методи розв'язування задач.

Практична частина. Розв'язування прикладних задач з використанням комбінаторно-логічних, комбінаторно-геометричних методів. Використання формули включень-виключень, методу куль і перегородок. Пошук рекурентних співвідношень, дослідження та доведення рекурентних формул.

3. Основи теорії ймовірностей (9 год)

Теоретична частина. Стохастичний експеримент. Елементарна подія. Простір елементарних подій. Види подій. Ймовірність події. Класична, статистична і геометрична ймовірності. Центр розподілу ймовірностей (математичне сподівання). Умовні та незалежні події. Ймовірність добутку і суми подій. Формула Баєса. Формула повної ймовірності. Повторні незалежні випробування. Формула Бернуллі. Закон великих чисел. Формули Пуассона та Лапласа.

Практична частина. Обчислення ймовірності випадкових подій. Застосування правил операцій над подіями. Розв'язування різних прикладних задач на обчислення ймовірностей.

4. Основи математичної статистики. Узагальнення. Математичне моделювання (12 год)

Теоретична частина. Способи опрацювання даних. Способи аналізу даних: порівняльний, системний. Основні поняття математичної статистики. Генеральна сукупність і вибірка. Частота. Розподіл частот. Гістограма. Дискретні та неперервні випадкові величини. Числові характеристики дискретної випадкової величини, математичне сподівання, дисперсія. Нерівність Чебишова та закон великих чисел. Розподіл Пуассона. Неперервні випадкові величини, їх характеристики. Функція розподілу, щільність розподілу. Математичне сподівання та дисперсія неперервної випадкової величини. Оцінювання розсіювання ймовірностей. Нормальний розподіл.

Поняття про кореляційно-регресивний аналіз. Методи апроксимації. Метод найменших квадратів. Метод Монте-Карло.

Узагальнення як метод наукового пошуку. Математичне моделювання процесів.

Практична частина. Дії з наближеними величинами. Проведення статистичних розрахунків й аналізу даних. Характеристики випадкових величин. Визначення числових характеристик неперервної випадкової величини. Опрацювання даних і побудова гістограм. Моделювання задач на розподіл ймовірностей випадкової дискретної величини. Визначення числових характеристик дискретної випадкової величини та їх аналіз. Розв'язування завдань із визначенням напрямів і можливостей узагальнення.

5. Поняття про лінійну алгебру. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (9 год)

Теоретична частина. Основні поняття лінійної алгебри. Матриці та дії з ними. Обернена матриця. Визначники. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь і методи їх розв'язування. Застосування матриць для моделювання мереж, випуску продукції, кодування і декодування повідомлень.

Практична частина. Операції з матрицями. Обчислення визначників. Розв'язування систем лінійних рівнянь методами Крамера і Гауса. Застосування систем рівнянь у криптографії. Моделювання процесів за допомогою систем лінійних рівнянь.

6. Векторна алгебра. Застосування векторів у задачах фізичного змісту (6 год)

Теоретична частина. Поняття вектора в математиці й фізиці. Операції з векторами. Скалярний, векторний і змішаний добуток векторів, їх застосування. Базис. Векторна алгебра в картинках. Центр мас системи матеріальних точок. Система супутникової навігації. Вектори у фізиці.

Практична частина. Розв'язування задач на дії з векторами. Виконання різних вправ на застосування векторів. Визначення координат центра мас системи точок. Використання векторів для доведення нерівностей. Моделювання у фізиці за допомогою векторів.

7. Поняття про методи оптимізації. Задачі з лінійного програмування (6 год)

Теоретична частина. Старовинні екстремальні задачі, їх формалізація. Основні етапи розв'язування екстремальних задач. Умови існування розв'язків. Чисельні методи оптимізації.

Математична модель задачі з лінійного програмування, лінійна оптимізація. Графічне представлення лінійної програми з двома змінними. Множина допустимих розв'язків. Цільова функція. Двоїсті задачі з лінійного програмування.

Практична частина. Розв'язування найпростіших задач з оптимізації. Розв'язування задач з лінійного програмування.

8. Тригонометричні й обернені тригонометричні функції у прикладних задачах. Гармонічні коливання (6 год)

Теоретична частина. Тригонометричні функції, їх властивості та графіки. Графіки гармонічних коливань. Обернені тригонометричні функції. Обґрунтування фізичних явищ і процесів різної природи (механічних, оптичних, електричних тощо), що відбуваються за законом гармонічних коливань. Пояснення закону заломлення світла за допомогою тригонометричних функцій.

Практична частина. Дослідження періодичності функцій. Побудова графіків гармонічних коливань, графіків обернених тригонометричних функцій. Математичний аналіз механічних, оптичних, електричних явищ (райдуга, міраж, сила Лоренца) за допомогою тригонометричних функцій.

9. Показникові та логарифмічні функції, рівняння, їх системи в прикладних задачах (6 год)

Теоретична частина. Показникова й логарифмічна функції, їх властивості та графіки. Натуральні логарифми. Природні фізичні, біологічні, хімічні процеси, що описуються показниковою (розмноження бактерій, дріжджів, кроликів, розпад і новоутворення тощо) або логарифмічною (визначення величини землетрусу, інтенсивності звуку, місткості легенів людини тощо) функціями. Поняття нормального розподілу.

Практична частина. Аналіз і математичне обґрунтування зазначених процесів. Розв'язування прикладних задач на залежність між величинами, що описуються показниковою або логарифмічною функціями. Задачі, математичними моделями яких є показникові або логарифмічні рівняння й нерівності.

10. Елементи математичного аналізу. Диференціальне числення (6 год)

Теоретична частина. Границя функції. Неперервність функції. Операції з неперервними функціями. Асимптоти до графіка функції. Похідна. Її геометричний і механічний зміст. Теореми про похідні. Похідна складеної функції.

Практична частина. Дослідження функції на неперервність. Знаходження асимптот. Дослідження точок розривання. Знаходження й обчислення похідних функцій.

11. Функції та графіки. Похідна в дослідженнях властивостей функції. Похідна в задачах з оптимізації (9 год)

Теоретична частина. Застосування похідної до дослідження властивостей функції. Теореми Ферма і Лагранжа. Дотична до графіка функції.

Застосування похідної до розв'язування рівнянь і нерівностей. Поняття про задачі з оптимізації.

Практична частина. Дослідження функції на монотонність, екстремуми, опуклість. Побудова графіків функцій. Розв'язування простих задач на знаходження найбільшого й найменшого значень. Задачі на дотичну. Розв'язування рівнянь і нерівностей методами математичного аналізу.

12. Інтегральне числення. Обчислення площ та об'ємів (9 год)

Теоретична частина. Первісна та невизначений інтеграл. Визначений інтеграл, його застосування для обчислення площ і об'ємів.

Практична частина. Знаходження первісних. Знаходження інтегралів різними методами. Обчислення площ та об'ємів за допомогою визначеного інтеграла. Розв'язування прикладних задач на обчислення площ і об'ємів.

13. Використання диференціального й інтегрального числень у фізиці, економіці, біології, статистиці (9 год)

Теоретична частина. Диференціальне й інтегральне числення, їх використання у фізиці, біології, економіці, статистиці. Розгляд основних фізичних моделей застосування похідної та інтегралу (задачі про переміщення точки, роботу змінної сили, імпульс сили, тиск рідини на стінки пробірки, задачі на знаходження маси неоднорідного стрижня, обчислення електричного заряду, визначення центра маси системи точок). Задачі з економіки, які розв'язуються методами математичного аналізу (визначення продуктивності праці, задачі про середні та граничні витрати виробництва, попит на товари й послуги, задачі на оптимальність різних параметрів продукції, її обсяг тощо).

Практична частина. Моделювання у прикладних задачах за допомогою похідної та інтегралів. Застосування диференціального й інтегрального числення під час розв'язування фізичних задач, економічних задач. Задачі на використання методів математичного аналізу в біології, статистиці.

14. Рівняння, нерівності та їх системи з модулем і параметром. Графічні методи. Функціональні рівняння (6 год)

Теоретична частина. Модуль числа, його властивості. Рівняння й нерівності з модулем. Метод інтервалів. Узагальнення методів розв'язування рівнянь і нерівностей із параметром. Основні методи розв'язування функціональних рівнянь (методи Коші, підстановок, застосування поняття групи, елементів математичного аналізу: методи граничного переходу, диференціювання). Рекурентні співвідношення та функціональні рівняння. Функціональні рівняння на множині натуральних чисел, множині цілих чисел, у класі багаточленів.

Практична частина. Дослідження коренів квадратного тричлена. Застосування теореми Вієта для цілого раціонального рівняння. Розв'язування тригонометричних, логарифмічних, показникових, ірраціональних рівнянь, нерівностей, їх систем з модулем і параметром.

Розв'язування функціональних рівнянь методом підстановок, застосування поняття групи. Розв'язування функціональних рівнянь з використанням границі функції, похідної, інших методів.

15. Приклади моделювання процесів навколишнього світу за допомогою найпростіших диференціальних рівнянь і їх систем (9 год)

Теоретична частина. Диференціальні рівняння. Основні поняття. Загальний розв'язок диференціального рівняння. Теорема й задача Коші. Види диференціальних рівнянь. Диференціальні рівняння I та II порядку.

Диференціальні рівняння з відокремленими змінними. Поняття про однорідні диференціальні рівняння. Диференціальні рівняння руху матеріальної точки. Найпростіші диференціальні рівняння у прикладних задачах фізичного, біологічного, економічного змісту. Закон радіоактивного розпаду. Закон охолодження Ньютона — Ріхмана. Вільне падіння під дією гравітації.

Практична частина. Розв'язування диференціальних рівнянь з відокремленими змінними, задач на складання таких рівнянь (на залежність атмосферного тиску від висоти, кількості бактерій від часу тощо). Найпростіші математичні моделі популяційної динаміки. Модель Мальтуса, рівняння Ферхюльста.

16. Зображення просторових фігур на площині. Перетворення простору. Позиційні задачі. Прикладні стереометричні задачі (9 год)

Теоретична частина. Паралельність і перпендикулярність у просторі. Кути та відстані у просторі. Призма, піраміда, їх властивості. Круглі тіла. Систематизація методів розв'язування геометричних задач. Методи побудови зображень (позиційні задачі зі стереометрії). Розв'язування задач методом побудови проєктувальних прямих. Розв'язування задач за допомогою симетрії. Застосування гомотетії та повороту під час розв'язування задач. Застосування методу відповідності й методу слідів під час побудови перерізів багатогранників.

Практична частина. Розв'язування задач на знаходження відстаней у просторі. Розв'язування задач на обчислення відстані між мимобіжними прямими. Розв'язування задач на знаходження кутів у просторі.

Розв'язування стереометричних задач різними методами, позиційних задач, задач на побудову пласких перерізів багатогранників. Розв'язування прикладних стереометричних задач.

17. Геометричні задачі прикладного змісту на комбінації тіл. Проблема розбиття простору (9 год)

Теоретична частина. Комбінації: круглих тіл, багатогранників з круглими тілами, різні комбінації тіл. Взаємне розташування елементів тіл у комбінаціях фігур. Третя проблема Гільберта про розрізання багатогранників, шляхи дослідження та можливість розв'язання.

Практична частина. Розв'язування задач на комбінації різних фігур, дослідницьких задач на розбиття. Моделювання розбиттів геометричних тіл за допомогою комп'ютерних програм.

18. Прикладні геометричні задачі на екстремуми (6 год)

Теоретична частина. Застосування похідної й інтегралу під час розв'язування геометричних задач на дослідження екстремальних значень.

Практична частина. Планіметричні задачі на екстремуми. Стереометричні задачі на екстремуми (визначення найбільшого чи найменшого значень певної геометричної величини — площі, об'єму; оптимальних розмірів об'єктів — будівель, басейнів, ділянок тощо).

19. Програмування мовою Python (12 год)

Теоретична частина. Початкові налаштування, завантаження Python. Середовище програмування Python. Робота з файлами, виправлення помилок. Типи задач.

Практична частина. Виконання завдань для формування початкових практичних навичок у створенні програм на прикладі програмування мовою Python (дії з типами даних, використання як калькулятора, задачі з послідовностями, на обчислення арифметичних дій з числами, знаходження площ багатокутників, обчислення вартості товарів, задання рівняння кола і прямої тощо).

20. Математичні основи криптографії (6 год)

Теоретична частина. Загальні проблеми захисту інформації. Коди, шифри, криптографічні системи, криптографічні алгоритми, цифрові підписи, криптоаналіз. Математичні способи шифрування і дешифрування інформації. Застосування деяких розділів теорії чисел для безпечного шифрування, передавання та дешифрування повідомлень.

Практична частина. Розгляд деяких прикладів шифрів і методів шифрування (шифри заміни, перестановки, схема шифрування Ель-Гамалія). Виконання вправ на шифрування повідомлень, створення прикладів простих криптографічних систем з відкритим ключем математичними

методами (використання матриць, рівнянь і систем рівнянь, властивостей простих чисел, подільності, теорії лишків тощо).

21. Індивідуальний дослідницький проєкт. Постерний захист. Наукова конференція (57 год)

Теоретична частина. Формулювання прикладної задачі, формалізація. Вимоги до математичної моделі. Визначення компонентів, об'єкта моделювання, його властивостей, основних залежностей між складниками. Формулювання гіпотез щодо можливого методу розв'язання. Представлення дослідженого у виді математичних залежностей і відношень: виразів, рівнянь, функцій тощо. Інтерпретація результатів.

Практична частина науково-дослідницького проєкту з прикладної математики, вимоги до реалізації, апробації та представлення результатів. Формулювання висновків до дослідницької роботи. Вимоги до оформлення літератури й інших використаних джерел. Вимоги державних стандартів щодо оформлення текстових документів і звітів у сфері науки й техніки. Необхідність дотримання таких вимог й академічної доброчесності.

Формат представлення результатів науково-дослідницької роботи. Постер. Вимоги до оформлення. Програма для створення плакатів на платформі «Canva», створення публікацій за допомогою системи «Microsoft Publisher». Створення презентацій з використанням різних інструментів («Canva», «Google Slides», «Vyond»), сервісів («PowerPoint», «Prezi», «Google Presentations», «Piktochart», «Playbuzz», «Project», «Moovly») та за допомогою штучного інтелекту.

Наукова доповідь, структура та вимоги до неї. Мультимедійна презентація до доповіді. Дискусія, правила ведення дискусії.

Практична частина. Проведення статистичного дослідження з обраної тематики, опрацювання та представлення результатів.

Робота над змістом дослідницької роботи: оформлення тексту відповідно до норм і вимог. Редагування дослідницької роботи. Робота над висновками. Оформлення списку джерел.

Підготовка доповіді, постера, мультимедійної презентації. Виконання вправ на розвиток мовлення. Підготовка до ведення дискусії.

Виконання інтерактивної вправи «Наукова дискусія». Виступи з доповідями. Робота над запитаннями до доповіді та відповідями на них.

Виконання інтерактивної вправи «Я — опонент». Підготовка до публічного виступу. Створення постера, презентації про результати дослідницької роботи за допомогою комп'ютерних технологій.

Зустрічі з науковцями. Підготовка матеріалів до участі в наукових конференціях, конкурсах, тематичних заходах науково-дослідницького спрямування.

22. Підсумок (3 год)

Практична частина. Підбиття підсумків роботи за індивідуальними дослідницькими проектами. Поради й рекомендації щодо подальшої науково-дослідницької діяльності.

ПРОГНОЗОВАНИЙ РЕЗУЛЬТАТ

У вихованців мають сформуватися такі компетентності:

- *пізнавальна:* застосування алгоритмів дій для планування, аналізу й самооцінювання пізнавальної діяльності; використання сучасних методів і засобів розв'язання прикладних і дослідницьких завдань у математичній галузі; умотивованість до науково-дослідницької діяльності на основі інтеграції знань;
- *практична:* застосування основних методів розв'язування задач на моделювання процесів і явищ, прикладних задач; володіння навичками написання, оформлення та презентування дослідницької роботи; використання математичних знань і методів для розв'язання визначених завдань із дотриманням принципів академічної доброчесності;
- *творча:* використання творчих підходів до застосування теоретичних знань на практиці, креативних ідей у розв'язанні практичних, прикладних, творчих і дослідницьких завдань з обраної теми наукового дослідження;
- *соціальна:* володіння якостями емоційно-вольової сфери, що забезпечують досягнення визначених цілей; розуміння важливості стійкого інтересу до математики як засобу особистісного розвитку; виявлення активної позиції в пізнавальній, освітній, науковій діяльності.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Авдеева Т. В., Шраменко В. М. Лінійна алгебра в задачах та прикладах : збірник задач. Київ : НТУУ «КПІ», 2016. 206 с.
2. Азаренкова А. І. Математична освіта вихованців наукових секцій Малої академії наук України / упоряд.: О. В. Лісовий, С. О. Лихота. Київ : ТОВ «Праймдрук», 2011. 138 с.
3. Азаренкова А. І. Організація гурткової роботи з математики в закладах позашкільної освіти. *Освіта обдарованих (заняття, програми для обдарованих дітей, елективні курси, факультативи)* / уклад.:

- К. Г. Постова, Г. В. Онопченко, О. В. Онопченко. Київ : Інститут обдарованої дитини НАПН України, 2020. С. 4–41.
4. Басанько А. М., Романенко А. О. За лаштунками підручника з математики : зб. розвивальних задач для вихованців. Київ : Генеза, 2017. 160 с.
 5. Биковська О. В. Позашкільна освіта: сучасні теоретико-методичні основи. *Освіта*. 2016. № 34–35. С. 4–5.
 6. Биковська О. В. Створюємо дитині можливість набувати особистісний досвід організації своєї самостійної діяльності. *Освіта*. 2015. № 40–41. С. 2–3.
 7. Копорх К. М., Собкович Р. І. Задачі та вправи для практичних занять з аналітичної геометрії : навч. посіб. Частина 1 : Векторна алгебра. Геометричні образи рівнянь першого степеня із двома та трьома змінними. Івано-Франківськ : ПП Бойчук А. Б., 2016. 115 с.
 8. Косьмій О. М. Особливості взаємодії суб'єктів освітнього процесу в Україні. *Соціально-гуманітарні науки та сучасні виклики* : матеріали II Всеукраїнської наукової конференції (26–27 травня 2017 р., м. Дніпро). Частина II / наук. ред.: О. Ю. Висоцький. Дніпро : СПД «Охотнік», 2017. 250 с.
 9. Кукуш О., Ушаков Р. Математичний гурток. 10–11 класи. Числа. Послідовності. Функції. Харків : Вид. група «Основа», 2018. 118 с.
 10. Лисогор Т. О., Штонда О. Г. Математична індукція як інструмент вивчення квантової механіки. *Наука та освіта в дослідженнях молодих учених* : матеріали IV Міжнародної конференції молодих учених. Харків : Харків. нац. пед. ун-т ім. Г. С. Сковороди, 2023. С. 131–133.
 11. Литовченко О. В. Підходи до класифікації компетентностей особистості як результату освіти. *Формування базових компетентностей у вихованців позашкільних навчальних закладів* : матеріали міжнародної наук.-практ. конференції (25–27 лютого 2013 року, м. Київ) / за ред.: І. Д. Беха, С. Л. Дахнова, С. Г. Мартової, В. В. Мачуського. Київ : ПП «Гранмна», 2013. С. 54–56.
 12. Лопушанський В. М., Бродська О. О. Основи наукових досліджень : навч. посіб. Дрогобич : Видавничий відділ ДДПУ імені Івана Франка, 2014. 154 с.
 13. Навчальні програми з позашкільної освіти. Дослідницько-експериментальний напрям. Математика. Фізика і астрономія / А. І. Азаренкова, О. А. Андреев, М. А. Віднічук та ін.; відп. за вип. Т. В. Пещеріна. Київ : Національний центр «Мала академія наук України», 2021. 74 с.
 14. Назаренко О. М., Панченко Т. І. Математичні гуртки. Теорія чисел. Суми : Видавництво Сумського державного університету, 2000. 203 с.
 15. Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк М. О. Диференціальні рівняння в задачах : навч. посіб. Київ : Либідь, 2003. 505 с.

16. Скляр І. В. Теорія графів у школі. Задачі : навч. посіб. Київ : Редакції газет природничо-математичного циклу, 2015. 128 с.
17. Терехова Л. Путівник з академічної доброчесності для позашкілля. Київ : Academic IQ, 2022. 86 с.
18. Фільштинський В. А., Бережний А. В. Математичні основи криптографії : конспект лекцій. Суми : Сумський державний університет, 2011. 138 с.
19. Швець В. Т. Теорія ймовірностей і математична статистика. Одеса : Вид. ВМВ, 2018. 218 с.
20. Шкільняк С. С. Математична логіка. Основи теорії алгоритмів : навч. посіб. Київ : Персонал, 2009. 208 с.
21. Ядренко М. Й. Принцип Діріхле. Харків : Вид. група «Основа», 2005. 96 с.
22. Ясінський В. В. Геометричні перетворення в задачах математичних олімпіад : практикум із розв'язування геометричних задач. Київ : Редакції газет природничо-математичного циклу, 2012. 128 с.
23. Ясінський В. В. Олімпіадна математика: функціональні рівняння, метод математичної індукції. Харків : Вид. група «Основа», 2005. 96 с.

СПИСОК ДОДАТКОВИХ ДЖЕРЕЛ

1. Безущак О. О., Ганюшкін О. Г., Кочубінська Є. А. Завдання до практичних занять з лінійної алгебри. Київ : КНУ, 2016. 251 с.
2. Гайштут О. Г., Ушаков Р. П., Шамович О. А. Математика : довідник для абітурієнтів та вихованців загальноосвітніх навчальних закладів. Київ : Літера ЛТД, 2013. 624 с.
3. ДСТУ 8302:2015 «Інформація та документація. Бібліографічне посилання. Загальні положення та правила складання». Київ : ДП «УкрНДНЦ», 2016. 17 с.
4. Капіносов А. М. Математика: комплексна підготовка до зовнішнього незалежного оцінювання / А. М. Капіносов, Г. І. Білоусова, А. Я. Гап'юк та інші. Тернопіль : Підручники і посібники, 2013. 468 с.
5. Клочко І. Я. Математика : тестові завдання. Тернопіль : Навчальна книга — Богдан, 2013, 184 с.
6. Клочко І. Я. Посібник з математики для школярів і абітурієнтів. Тернопіль : Навчальна книга — Богдан, 2007. II частина. 224 с.
7. Кривошея І. М., Збожинська Т. С. Задачі міжнародних математичних чемпіонатів : навч.-метод. посібник. 2-ге вид. переробл. і доповн. Вінниця : ТОВ «Нілан-ЛТД», 2015. 172 с.
8. Ладогубець Т. С., Фіногенов О. Д. Математичне моделювання: комп'ютерний практикум : навч. посіб. Київ : НТУУ «КПІ ім. І. Сікорського», 2018. 58 с.

9. Лиходєєва Г. В., Пастирєва К. Ю. Диференціальні рівняння: працюємо самостійно : навч. посіб. Київ : Центр учбової літератури, 2020. 144 с.
10. Логіка : збірник задач / уклад.: В. О. Геращенко. 2-ге вид., переробл. і доповн. Харків : Торсінг плюс, 2011. 384 с.
11. Лукаш О. В., Пресс Е. М. Розв'язуємо задачі з параметром. Харків : Вид. група «Основа», 2006. 144 с.
12. Семенов В. О. Доведення нерівностей. Числові послідовності: скінченні суми і добутки. Харків : Вид. група «Основа», 2009. Книга 2. 176 с.
13. Федак І. В. Олімпіади з математики: 1987–2016 роки. Завдання, відповіді. Харків : Видавнича група «Основа», 2017. 239 с.
14. Філон Л. Г., Шидловська Л. М. Елементарна математика. Частина 1 : Арифметика. Алгебра. Чернігів : ЧНПУ імені Т. Г. Шевченка, 2016. 68 с.
15. Чарін В. С. Лінійна алгебра : підручник. Київ : Техніка, 2004. 413 с.
16. Шевцов С. О., Грудкіна Н. С. Розв'язання задач з економіки методами математичного аналізу : посібник до практичних занять і самостійної роботи. Краматорськ : ДДМА, 2019. 55 с.
17. Ясінський В. В. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язування. Тернопіль : Навчальна книга — Богдан, 2012. 208 с.

Р. Є. Майборода

НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА «СТАТИСТИКА»

ОСНОВНИЙ І ВИЩИЙ РІВНІ

«Схвалено для використання в освітньому процесі»

*Рішення експертної комісії з позашкільної освіти від 29.03.2023
(протокол № 1)*

*Зареєстровано у Каталозі надання грифів навчальній літературі
та навчальним програмам за № 8.0015–2023*

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Знання статистики забезпечує можливість якісно аргументувати свою думку під час дискусій, вербалізувати дійсність, розвивати творчий і науковий потенціал особистості.

Організація роботи гуртків і секцій зі статистики у закладах поза-шкільної освіти дослідницько-експериментального напрямку сприятиме розумінню учнів важливості цього навчального предмета для реалізації особистості в суспільстві, формуванню вмінь правильно збирати, опрацьовувати й аналізувати статистичні дані, розвивати необхідний рівень культури статистичного мислення для повноцінного використання вихованцями отриманих знань у повсякденному житті та під час навчальної діяльності.

Навчальна програма «Статистика» спрямована на отримання вихованцями знань зі статистики та теорії ймовірностей. Програма охоплює питання, які не входять у навчальні програми з математики закладів загальної середньої освіти, знайомить із деякими нестандартними методами, оригінальними ідеями щодо розв'язування задач та сприяє опануванню статистичних методів науково-дослідницької діяльності.

Метою програми є формування в учнівської молоді компетентностей під час вивчення статистики та ймовірнісного моделювання засобами науково-дослідницької діяльності.

Основні **завдання** полягають у формуванні таких компетентностей:

- *пізнавальної*: засвоювати та поглиблювати знання зі статистики, теорії ймовірностей, основ науково-дослідницької діяльності; вивчати основні поняття, що застосовуються у цих галузях; опановувати принципи статистичного дослідження та класифікації, методи проведення імітаційного експерименту і дослідження, методи статистичного оброблення даних,

техніки статистичного оцінювання невідомих параметрів, ймовірнісні розподіли та визначати можливості їх практичного застосування; формувати науковий світогляд, розуміння його ролі у пізнанні дійсності;

- *практичної*: набувати навичок розв'язування задач з теоретичної та прикладної статистики, вмінь будувати ймовірнісні моделі реальних об'єктів, підраховувати основні дескриптивні статистики, будувати класифікатори за навчальною вибіркою, досліджувати дані методами кластерного аналізу, інтерпретувати результати візуалізації даних, здійснювати статистичне оцінювання невідомих параметрів, визначати точність статистичних оцінок, планувати й реалізовувати дослідницький проєкт, аналізувати інформацію, доходити висновків за результатами проведення дослідницької діяльності, дотримуватися вимог академічної доброчесності та етики, оформлювати статистичне дослідження, презентувати отримані результати;

- *творчої*: формувати стійкий інтерес до статистики й теорії ймовірностей; розвивати логічне та ймовірнісне мислення, ораторську майстерність, творчі здібності, уяву, фантазію, творчий підхід до виконання навчальних завдань; активізувати потребу у творчій самореалізації; розвивати здатність працювати з різними джерелами для пошуку наукової інформації зі статистики та теорії ймовірностей, висувати та перевіряти гіпотези; збільшувати зацікавленість науково-дослідницькою діяльністю в галузі статистики;

- *соціальної*: посилювати мотивацію до проведення пошуку та дослідження в галузі статистики; набувати навичок формулювати й висловлювати свої думки, аргументовано дискутувати, умінь захищати дослідницьку роботу перед аудиторією; формувати наукову та дослідницьку ініціативність, стійкий інтерес до статистики як професійної діяльності; розвивати позитивні якості емоційно-вольової сфери особистості (наполегливість, цілеспрямованість, здатність аргументовано обстоювати власну позицію).

Навчальна програма розрахована на два роки навчання:

1-й рік — основний рівень — 216 год на рік (6 год на тиждень);

2-й рік — вищий рівень — 324 год на рік (9 год на тиждень).

Програма призначена для роботи з учнями віком 14–17 років. Кількісний склад навчальної групи — 10–15 вихованців.

Зміст програми спрямований на ознайомлення з основними методами та підходами до статистичного аналізу даних, ймовірнісним описом випадкових явищ, а також на залучення вихованців до дослідницької діяльності.

На основному рівні передбачається засвоєння вихованцями знань з основ статистики та теорії ймовірностей; форм і методів проведення наукових досліджень; наукової термінології; правил роботи з літературою та іншими джерелами інформації; окреслення сутності науково-дослідницької діяльності.

На вищому рівні учні поглиблюють знання щодо: статистичного аналізу даних і ймовірнісного моделювання випадкових явищ; методів опрацювання результатів пошукової діяльності; вимог до оформлення робіт, анотацій, виступів, постерів, підготовки звітів та доповідей; визначення можливостей практичного застосування отриманих результатів.

Зміст програми реалізовується відповідно до здібностей і вікових особливостей вихованців, за допомогою традиційних форм і методів навчання, інтерактивних методів дистанційного та змішаного навчання, комп'ютерних та проектних технологій, методів активізації наукової діяльності вихованців і стимулювання процесів пізнання. Ефективно впроваджуються різноманітні засоби навчання: наочні посібники, роздатковий матеріал, технічні засоби. Під час проведення занять за цією програмою передбачено поєднання і чергування різних видів діяльності з метою посилення інтересу вихованців до якісного поглиблення знань зі статистики.

Програма передбачає застосування в освітньому процесі групової та індивідуальної форм роботи з можливістю використання платформ для дистанційного навчання. Індивідуалізація і диференціація процесу роботи гуртка надає можливість участі вихованців у організаційно-масових заходах змагального характеру вже з першого року навчання.

Контролювання знань вихованців відбувається під час виконання індивідуальних завдань зі статистичного аналізу даних, тестування, представлення рефератів або виступів на заняттях, конференціях, участі у диспутах, конкурсах, Всеукраїнському конкурсі-захисті науково-дослідницьких робіт учнів — членів МАН України тощо.

За цією програмою можна проводити заняття у групах індивідуального навчання відповідно до Положення про порядок організації індивідуальної та групової роботи в позашкільних навчальних закладах, затвердженого наказом Міністерства освіти і науки від 11.08.2004 № 651.

Перелік обладнання в програмі подано як орієнтовний — відповідно до можливостей освітнього закладу.

Основний рівень, перший рік навчання НАВЧАЛЬНО-ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН

№ з/п	Тема	Кількість годин		
		теоретичних	практичних	усього
1.	Вступ	1	2	3
2.	Статистика: її місце у системі наукового знання та роль у житті людей і суспільній діяльності	2	4	6
3.	Статистичні дані й математичні моделі	2	4	6

№ з/п	Тема	Кількість годин		
		теоретичних	практичних	усього
4.	Статистичне прогнозування. Метод найменших квадратів	2	4	6
5.	Мова статистичного програмування R	5	7	12
6.	Дескриптивні статистики одновимірних даних	4	8	12
7.	Візуалізація розподілу одновимірних даних	3	3	6
8.	Опис залежностей: кореляція Пірсона	2	4	6
9.	Візуалізація кореляцій	2	4	6
10.	Рангові кореляції	3	3	6
11.	Значущість кореляцій. Перевірка гіпотез	2	4	6
12.	Основні поняття теорії ймовірностей	6	6	12
13.	Умовні ймовірності. Формула Баєса	3	3	6
14.	Дискретні розподіли: біноміальний, геометричний, Пуассонів	3	3	6
15.	Неперервні розподіли. Щільність і математичне сподівання	2	4	6
16.	Рівномірний, нормальний та експоненційний розподіли	3	3	6
17.	Візуальний аналіз розподілу даних	2	4	6
18.	Оцінювання параметрів: метод моментів	3	3	6
19.	Метод найбільшої вірогідності	2	4	6
20.	Основні напрями статистичних досліджень	3	3	6
21.	Науково-дослідницька робота зі статистики	7	11	18
22.	Проведення статистичного дослідження	10	20	30

№ з/п	Тема	Кількість годин		
		теоретичних	практичних	усього
23.	Оформлення, аналіз і обговорення результатів роботи	8	10	18
24.	Організаційно-масові заходи	4	8	12
25.	Підсумок	1	2	3
Разом		85	131	216

ЗМІСТ ПРОГРАМИ

1. Вступ (3 год)

Теоретична частина. Мала академія наук у системі освіти та виховання учнівської молоді України.

Мета і завдання роботи гуртка. План роботи гуртка на навчальний рік. Правила безпеки життєдіяльності й поведінки в закладі освіти. Облаштування робочого місця, організація роботи.

Практична частина. Тестування знань вихованців з математики. Круглий стіл «Статистика та її практичне застосування».

2. Статистика: її місце у системі наукового знання та роль у житті людей і суспільній діяльності (6 год)

Теоретична частина. Історія та розвиток статистики як науки. Статистичні методи у природничих та суспільних науках. Роль і значення статистики в суспільстві. Економічна і медична статистика. Статистика у страхуванні. Науки про випадкові явища: теорія ймовірностей, статистика, машинне навчання — спільне й відмінне.

Проблеми сучасної статистичної науки. Статистичне наукове дослідження як форма існування і розвитку науки.

Основні аспекти організації статистики в Україні. Міжнародні статистичні організації.

Практична частина. Підготовка реферату, презентації, виступу. Захист реферату. Аналіз проведеної роботи.

3. Статистичні дані й математичні моделі (6 год)

Теоретична частина. Випадкові явища у природі та суспільстві. Теорія ймовірностей і теорія випадкових процесів як основа математичного моделювання випадкових явищ. Використання математичних моделей для прогнозування, класифікації, аналізу ризиків. Необхідність статистичних даних для розроблення моделей випадкових явищ. Джерела випадково-

сті у статистичних даних: сутнісна випадковість явища, похибки вимірювання, неповнота інформації, вибірковість обстеження. Методи отримання статистичних даних: експеримент, спостереження, обстеження.

Практична частина. Виконання творчих завдань. Ознайомлення з темами актуальних статистичних досліджень, визначними науковцями галузі (К. Пірсон, Ч.Е. Спірмен, Р. Фішер, М.Д. Кендалл, М.П. Кравчук, Й.І. Гіхман, А.В. Скороход, В.С. Королук, А.Я. Дороговцев та ін.). Робота над планом проведення спостереження. Визначення мети, об'єкта, предмета дослідження. Тренінг з окреслення організаційних питань, на які потрібно отримати відповідь у процесі статистичного дослідження.

4. Статистичне прогнозування. Метод найменших квадратів (6 год)

Теоретична частина. Поняття про статистичне прогнозування. Підгонка експериментальних кривих. Регресійні моделі. Проста лінійна регресія. Оцінювання методу найменших квадратів для коефіцієнтів регресії. Прогноз і залишки в лінійній моделі. Коефіцієнт детермінації моделі як характеристика якості прогнозу. Відображення регресії на діаграмах розсіювання. Викиди та їх вплив на модель. Лінеаризація регресійних залежностей за допомогою функціональних перетворень. Поняття про множинну регресію.

Практична частина. Побудова регресійних моделей на основі реальних даних із навчальних прикладів та даних, зібраних вихованцями.

5. Мова статистичного програмування R (12 год)

Теоретична частина. Загальні характеристики мови статистичного програмування R та систем її реалізації. Інсталяція на комп'ютері, елементарні навички роботи. Типи та структури даних у мові статистичного програмування R, використання їх для представлення статистичних даних. Робота з векторами, матрицями та фреймами даних. Функції та їх застосування у статистичному обробленні. Створення власних функцій.

Практична частина. Написання простих скриптів у системі мови статистичного програмування R, що реалізують різні техніки статистичного оброблення та візуалізації даних.

6. Дескриптивні статистики одновимірних даних (12 год)

Теоретична частина. Основні статистики середнього положення та розкиду. Властивості еківаріантності та інваріантності стосовно додавання та множення. Вибірки та способи їх отримання. Поняття забрудненої вибірки, викиду та робастності дескриптивної статистики. Застосування дескриптивних статистик у різних задачах опису даних.

Практична частина. Порівняння кількох наборів реальних даних за допомогою дескриптивних статистик. Використання мови статистичного програмування R для обчислень дескриптивних статистик за даними різної структури.

7. Візуалізація розподілу одновимірних даних (6 год)

Теоретична частина. Різні засоби візуалізації даних: гістограми абсолютних та відносних частот, «скриньки з вусами», емпіричні функції розподілу, функції виживання. Використання засобів візуалізації для порівняння розподілів кількох наборів даних. Особливості форми розподілу: асиметрія, мультимодальність, розподіли з важкими хвостами.

Практична частина. Аналіз за допомогою візуалізації у системі мови статистичного програмування R фінансово-економічних даних і даних медико-біологічних досліджень.

8. Опис залежностей: кореляція Пірсона (6 год)

Теоретична частина. Необхідність побудови міри залежності між змінними. Кореляція Пірсона як міра лінійної регресійної залежності. Інші характеристики коефіцієнта кореляції Пірсона. Його основні властивості. Обмеженість коефіцієнта кореляції Пірсона з виявлення нелінійних залежностей.

Практична частина. Обчислення коефіцієнтів кореляції Пірсона та кореляційної матриці для різних наборів реальних даних. Інтерпретація та опис результатів.

9. Візуалізація кореляцій (6 год)

Теоретична частина. Техніка візуалізації кореляцій за допомогою карт кореляції й кореляційних мереж. Різні представлення залежностей між змінними на картах кореляцій. Виділення кластерів сильно корельованих змінних.

Практична частина. Візуалізація наборів даних за допомогою мови статистичного програмування R. Аналіз та інтерпретація результатів.

10. Рангові кореляції (6 год)

Теоретична частина. Поняття рангу об'єкта у вибірці за змінною. Зв'язані ранги. Коефіцієнти кореляції Спірмена і Кендалла. Основні властивості коефіцієнтів кореляції Спірмена і Кендалла.

Практична частина. Використання коефіцієнтів кореляції Спірмена і Кендалла для аналізу даних психологічних досліджень (рольові ґратки). Графічне відображення результатів досліджень.

11. Значущість кореляцій. Перевірка гіпотез (6 год)

Теоретична частина. Важливість задачі на перевірку наявності або відсутності залежності за статистичними даними та її особливості. Перевірка значущості кореляції як задача на перевірку статистичної гіпотези. Основна гіпотеза й альтернатива. Помилки першого і другого роду. Обрання стандартного рівня значущості. Досягнуті рівні значущості та їх використання для перевірки гіпотез.

Практична частина. Перевірка наявності або відсутності залежності за статистичними даними. Перевірка значущості кореляцій. Перевірка гіпотез за допомогою використання досягнутих рівнів значущості.

12. Основні поняття теорії ймовірностей (12 год)

Теоретична частина. Випадкові події та їх ймовірності. Класичне і геометричне означення ймовірностей. Статистична інтерпретація ймовірності. Ймовірності перетину й об'єднання подій. Незалежні події.

Практична частина. Визначення ймовірностей подій за різними ознаками й на основі комбінаторних розрахунків. Застосування комбінаторних розрахунків у фізиці, біології, аналізі надійності та інших наукових і прикладних дослідженнях.

13. Умовні ймовірності. Формула Баєса (6 год)

Теоретична частина. Поняття умовної ймовірності, його зв'язок з незалежністю випадкових подій і прогнозуванням. Формула Баєса та її використання у задачах з генетичного аналізу і для розрахунку ризиків.

Практична частина. Розрахунок умовних ймовірностей за формулою Баєса.

14. Дискретні розподіли: біноміальний, геометричний, Пуассонів (6 год)

Теоретична частина. Поняття дискретної випадкової величини. Серії незалежних випробувань. Біноміальний розподіл кількості успіхів у серії. Випробування до першого успіху і геометричний розподіл. Пуассонів розподіл як розподіл рідкісних подій.

Закон великих чисел. Статистичний зміст і формальне означення математичного сподівання дискретної випадкової величини. Математичне сподівання для біноміального, геометричного та Пуассонового розподілів.

Практична частина. Задачі на обчислення ймовірностей подій з використанням біноміального, геометричного та Пуассонового розподілів.

15. Неперервні розподіли. Щільність і математичне сподівання (6 год)

Теоретична частина. Поняття неперервної випадкової величини. Щільність розподілу як границя гістограм. Розрахунок ймовірностей потрапляння в інтервал за допомогою інтегралів від щільності розподілу, геометрична інтерпретація. Математичне сподівання абсолютно неперервної випадкової величини. Дисперсія. Генерація псевдовипадкових послідовностей із заданим розподілом у мові статистичного програмування R.

Практична частина. Обчислення ймовірнісних характеристик різних випадкових величин.

16. Рівномірний, нормальний та експоненційний розподіли (6 год)

Теоретична частина. Рівномірний розподіл і його застосування для опису кутових спостережень. Поняття про центральну граничну теорему і нормальний розподіл. Експоненційний розподіл, властивість відсутності післядії. Застосування експоненційного розподілу в задачах зі статистики тривалості життя.

Практична частина. Розрахунок ймовірностей, пов'язаних з неперервними розподілами, математичних сподівань і дисперсій у системі мови статистичного програмування R.

17. Візуальний аналіз розподілу даних (6 год)

Теоретична частина. Візуалізація розподілу за допомогою гістограм та відображення щільності теоретичного розподілу. Вплив викидів. Інтерпретація результатів.

Практична частина. Аналіз розподілів реальних даних і модельованих за допомогою генераторів випадкових чисел.

18. Оцінювання параметрів: метод моментів (6 год)

Теоретична частина. Загальна схема методу моментів для оцінювання невідомих параметрів розподілу. Оцінювання параметрів стандартних розподілів. Модель суміші двох компонент з нормальним розподілом. Оцінювання параметрів методом моментів. Характеристики точності статистичної оцінки: зміщення і дисперсія. Довірчі інтервали на основі точкових оцінок.

Практична частина. Застосування методу моментів для оцінювання параметрів розподілу реальних і модельованих даних.

19. Метод найбільшої вірогідності (6 год)

Теоретична частина. Загальна схема методу найбільшої вірогідності для оцінювання невідомих параметрів розподілу. Застосування методу

найбільшої вірогідності для неперервних і дискретних спостережень. Оцінювання параметрів стандартних розподілів. Можливості методу найбільшої вірогідності під час оцінювання параметрів у моделі суміші двох гаусових розподілів.

Практична частина. Реалізація методу найбільшої вірогідності у системі мови статистичного програмування R. Застосування оцінок найбільшої вірогідності до реальних даних статистичних досліджень. Порівняння точності різних оцінок на модельованих даних.

20. Основні напрями статистичних досліджень (6 год)

Теоретична частина. Особливості статистичних досліджень у різних прикладних галузях. Соціологічна й економічна статистика. Статистика в епідеміології. Статистика маркетингових і фінансових досліджень.

Практична частина. Обговорення особливостей індивідуальних статистичних досліджень учасниками гуртка.

21. Науково-дослідницька робота зі статистики (18 год)

Теоретична частина. Науково-дослідницька робота в Малій академії наук. Всеукраїнський конкурс-захист науково-дослідницьких робіт учнів — членів Малої академії наук України. Науково-дослідницька робота (дослідницький проект) зі статистики та її компоненти. Обрання теми.

Планування наукового дослідження, визначення мети, напряму роботи й обсягу планованих етапів. Перегляд планів і структури дослідження залежно від досягнутих результатів. Виокремлення невирішених питань, визначення можливостей їх розв'язання.

Дослідницька робота та її структура: титульний аркуш, анотація, зміст, перелік умовних позначень і скорочень, вступ, основна частина, висновки, список використаних джерел і літератури, додатки.

Відповідність напряму дослідницької роботи й виду наукової публікації.

Практична частина. Планування науково-дослідницької роботи зі статистики. Визначення теми науково-дослідницької роботи. Використання різних джерел інформації з теми роботи вихованця. Обговорення процесу роботи й поточних результатів у доповідях і дискусіях. Опрацювання наукової літератури зі статистики. Перевірка на відповідність напряму дослідницької роботи.

Методи збирання інформації, роботи з літературою та іншими джерелами інформації.

22. Проведення статистичного дослідження (30 год)

Теоретична частина. Статистичне дослідження. Етапи статистичного дослідження. Структура наукового дослідження у галузі статистики.

Форми та методи статистичних досліджень. Висування й перевірка гіпотези. Методи статистичного оброблення даних під час проведення статистичного дослідження.

Практична частина. Виконання вправ на висування та перевірку гіпотези. Ознайомлення з методами статистичного оброблення даних під час проведення статистичного дослідження. Проведення власного статистичного дослідження.

23. Оформлення, аналіз і обговорення результатів роботи (18 год)

Теоретична частина. Основні вимоги до змісту, структури й стилю звіту про дослідницьку роботу. Оформлення графічного матеріалу і таблиць. Формулювання висновків і результатів дослідження. Повнота, стислість, об'єктивність і коректність висновків. Вимоги й стандарти щодо оформлення покликань на літературні джерела та їх бібліографічних описів. Основні вимоги до оформлення науково-дослідницької роботи (проєкту), дослідницької роботи, постера.

Захист. Етапи захисту. Підготовка і презентація доповіді. Аналіз проведеної роботи.

Практична частина. Написання дослідницької роботи. Перевірка на відповідність виду наукової публікації. Підготування доповіді. Попередні обговорення у гуртку. Підготовка до захисту. Обговорення й аналіз проведеної роботи.

24. Організаційно-масові заходи (12 год)

Теоретична частина. Правила поведінки під час організаційно-масових заходів: екскурсій, олімпіад, конкурсів, турнірів, тематичних заходів тощо. Умови участі в організаційно-масових заходах різних рівнів (Міжнародний математичний конкурс «Кенгуру», Всеукраїнський конкурс командних головоломок, Всеукраїнський турнір юних математиків тощо).

Практична частина. Розгляд та обговорення наукових публікацій на статистичну тематику. Зустрічі з науковцями, які проводять статистичні дослідження. Наукові читання, лекторії з історії статистики. Захист науково-дослідницьких проєктів. Участь в учнівських наукових конференціях, конкурсах, тематичних заходах з питань статистики.

25. Підсумок (3 год)

Теоретична частина. Підбиття підсумків роботи гуртка за навчальний рік. Поради щодо подальшої роботи. Відзначення найкращих вихованців.

Практична частина. Планування подальшої роботи з проведення статистичних досліджень.

ПРОГНОЗОВАНИЙ РЕЗУЛЬТАТ

Вихованці мають знати:

- основні поняття статистики, теорії ймовірностей та основ науково-дослідницької діяльності;
- принципи статистичного дослідження;
- алгоритми розв'язування основних (базових) задач з тем програми;
- основні методи дескриптивної статистики;
- основні техніки статистичного оцінювання невідомих параметрів;
- основні ймовірнісні розподіли та їх практичне застосування;
- основні методи програмування у системі мови статистичного програмування R.

Вихованці мають уміти:

- застосовувати теоретичні знання під час розв'язування практичних задач;
- підраховувати основні дескриптивні статистики;
- інтерпретувати результати візуалізації даних;
- здійснювати статистичне оцінювання невідомих параметрів;
- будувати й використовувати довірчі інтервали;
- оцінювати точність статистичних оцінок;
- аналізувати інформацію, доходити висновків;
- представляти результати дослідницької діяльності.

У вихованців мають сформуватися такі компетентності:

- уміння розв'язувати задачі з прикладної та теоретичної статистики;
- навички з побудови ймовірнісних моделей реальних об'єктів;
- здатність до науково-дослідницької діяльності в галузі статистики;
- уміння працювати з різними джерелами для пошуку наукової інформації зі статистики та теорії ймовірностей;
- здатність висувати й перевіряти гіпотези;
- навички систематизації та класифікації даних статистичного дослідження;
- наукова і дослідницька ініціативність для участі в учнівських наукових конференціях, конкурсах, тематичних заходах.

Вищий рівень, другий рік навчання НАВЧАЛЬНО-ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН

№ з/п	Тема	Кількість годин		
		теоретичних	практичних	усього
1.	Вступ	1	2	3
2.	Баєсова класифікація	5	10	15

№ з/п	Тема	Кількість годин		
		теоретичних	практичних	усього
3.	Оцінювання щільності розподілу	5	7	12
4.	Алгоритми баєсової класифікації	6	9	15
5.	Зміщені вибіркові процедури	5	7	12
6.	Корекція вибіркового зміщення	6	6	12
7.	Базові алгоритми кластерного аналізу	6	12	18
8.	Алгоритми ієрархічного кластерного аналізу	5	7	12
9.	Ланцюги Маркова	5	7	12
10.	Процеси Маркова	6	6	12
11.	Теорія масового обслуговування	6	6	12
12.	Моделювання залежностей у часових рядах	5	7	12
13.	Задача з пошуку моментів зміни у часових рядах	6	6	12
14.	Прикладні задачі з аналізу і сегментації часових рядів	8	10	18
15.	Імітаційний експеримент	6	6	12
16.	Імітаційне моделювання складних систем	5	7	12
17.	Академічна доброчесність під час проведення і написання статистичного дослідження	8	10	18
18.	Пошук наукової інформації та збирання даних для статистичного дослідження	9	12	21
19.	Проведення науково-дослідницької роботи	9	21	30
20.	Оформлення й аналіз результатів роботи	7	20	27
21.	Захист дослідницької роботи	4	8	12
22.	Організаційно-масові заходи	5	7	12
23.	Підсумок	1	2	3
Разом		129	195	324

ЗМІСТ ПРОГРАМИ

1. Вступ (3 год)

Теоретична частина. Мета і завдання роботи гуртка. План роботи гуртка на навчальний рік. Правила безпеки життєдіяльності й поведінки в закладі освіти. Правила санітарії, гігієни та безпечної роботи за комп'ютером. Облаштування робочого місця учня. Організаційні питання.

Прикладна частина. Обговорення результатів самостійної роботи влітку. Диспут «Актуальні питання статистичних досліджень». Обговорення можливих змін тем дослідницьких робіт учасників.

2. Баєсова класифікація (15 год)

Теоретична частина. Статистична класифікація та її завдання. Баєсів підхід до характеристики якості класифікатора. Побудова баєсового класифікатора. Приклади застосування баєсових класифікаторів у наукових дослідженнях і практичній діяльності.

Практична частина. Аналіз можливостей побудови баєсових класифікаторів у різних прикладних задачах.

3. Оцінювання щільності розподілу (12 год)

Теоретична частина. Гістограмне і ядерне оцінювання щільності. Використання параметрів згладжування для отримання оптимальних оцінок. Техніка кросвалідації для обрання параметрів згладжування.

Практична частина. Реалізація оцінювання щільності у системі мови статистичного програмування R. Оцінювання щільності за реальними та модельованими даними.

4. Алгоритми баєсової класифікації (15 год)

Теоретична частина. Навчальна вибірка. Емпірично-баєсова класифікація. Метод найближчого сусіда та лінійний дискримінантний аналіз як приклади емпірично-баєсової класифікації. Класифікація багатовимірних даних.

Практична частина. Реалізація алгоритмів емпірично-баєсової класифікації в системі мови статистичного програмування R. Аналіз реальних і модельованих даних за допомогою алгоритмів класифікації.

5. Зміщені вибіркові процедури (12 год)

Теоретична частина. Генеральна сукупність і вибірка. Вибіркова процедура. Просте випадкове відбирання. Зміщена вибіркова процедура. Приклад: парадокс інспектора.

Практична частина. Аналіз вибіркових процедур на наявність чи відсутність зміщення.

6. Корекція вибіркового зміщення (12 год)

Теоретична частина. Оцінювання за зміщеною вибіркою. Корекція зміщення за допомогою навантажень Горвіца — Томпсона. Оцінювання ймовірності потрапляння у вибірку як функції від досліджуваної змінної.

Практична частина. Аналіз модельованих і реальних даних, отриманих за зміщеними вибірковими процедурами.

7. Базові алгоритми кластерного аналізу (18 год)

Теоретична частина. Алгоритми навчання без вчителя. Поняття про задачу кластеризації. Різні підходи до визначення поняття кластера. Алгоритми кластеризації із заданою кількістю кластерів. Порівняння різних кластеризацій, характеристики якості. Міри близькості та віддаленості об'єктів, відстані у просторі об'єктів. Ієрархічна кластеризація (класифікація), її застосування. Дендрограми ієрархічної кластеризації. Візуалізація результатів кластеризації за допомогою багатовимірного шкалування.

Практична частина. Порівняння роботи різних алгоритмів кластеризації на модельованих та реальних статистичних даних.

8. Алгоритми ієрархічного кластерного аналізу (12 год)

Теоретична частина. Міри близькості та віддаленості об'єктів, відстані у просторі об'єктів. Ієрархічна кластеризація (класифікація), її застосування. Дендрограми ієрархічної кластеризації. Візуалізація результатів кластеризації за допомогою багатовимірного шкалування.

Практична частина. Порівняння роботи різних алгоритмів ієрархічної кластеризації й багатовимірного шкалування на модельованих і реальних статистичних даних.

9. Ланцюги Маркова (12 год)

Теоретична частина. Марківська властивість випадкової послідовності. Ланцюг Маркова. Рівняння Колмогорова. Класифікація ланцюгів Маркова. Стаціонарний стан, ергодична теорія.

Практична частина. Розрахунки ймовірностей для ланцюгів Маркова. Експериментальна перевірка ергодичності.

10. Процеси Маркова (12 год)

Теоретична частина. Марківська властивість випадкового процесу. Процеси розмноження та загибелі. Їх застосування для моделювання фізичних, біологічних і соціальних процесів.

Практична частина. Побудова математичних моделей різних процесів на основі процесів Маркова і дослідження їх стохастичної динаміки.

11. Теорія масового обслуговування (12 год)

Теоретична частина. Задачі з теорії масового обслуговування. Приклади розрахунків характеристик систем масового обслуговування за допомогою теорії процесів Маркова. Імітаційне моделювання систем масового обслуговування.

Практична частина. Імітаційне моделювання системи масового обслуговування, порівняння її параметрів з теоретично розрахованими.

12. Моделювання залежностей у часових рядах (12 год)

Теоретична частина. Задачі з аналізу часових рядів. Моделі залежності спостережень у часових рядах. Процеси авторегресії й ковзного середнього. Статистичний аналіз авторегресійних процесів.

Практична частина. Статистичний аналіз реальних даних на основі моделей авторегресії – ковзного середнього.

13. Задача з пошуку моментів зміни у часових рядах (12 год)

Теоретична частина. Задача на сегментацію експериментальних кривих. Алгоритми пошуку моментів зміни. Питання обрання оптимального алгоритму.

Практична частина. Реалізація алгоритмів пошуку моментів зміни у системі мови статистичного програмування R. Перевірка якості алгоритмів на модельованих даних.

14. Прикладні задачі з аналізу і сегментації часових рядів (18 год)

Теоретична частина. Сегментація багатовимірних часових рядів. Поєднання методів кластерного аналізу з методами пошуку моментів зміни. Сегментація авторегресійних послідовностей.

Практична частина. Застосування алгоритмів сегментації з використанням кластерного аналізу й авторегресійних моделей до реальних статичних даних.

15. Імітаційний експеримент (12 год)

Теоретична частина. Поняття про імітаційний експеримент. Ключова роль імітаційних експериментів у сучасній статистиці. Побудова імітаційного експерименту. Визначення характеристик якості статистичного алгоритму. Інтерпретація результатів імітаційного експерименту.

Презентування результатів експерименту. Приклади проведення імітаційних експериментів.

Практична частина. Розроблення планів імітаційних експериментів для індивідуальної дослідницької діяльності та їх обговорення.

16. Імітаційне моделювання складних систем (12 год)

Теоретична частина. Імітаційне моделювання залежностей між елементами системи. Аналіз стохастичної динаміки імітаційної моделі. Налаштування імітаційної моделі за статистичними даними.

Практична частина. Проведення імітаційних експериментів з моделями реальних складних систем.

17. Академічна доброчесність під час проведення і написання статистичного дослідження (18 год)

Теоретична частина. Академічна доброчесність. Дотримання академічної доброчесності під час наукового дослідження. Етичні питання збирання даних. Анонімізація даних в етичному та статистичному аспекті. Поєднання даних анонімного та неанонімного досліджень. Етичні стандарти під час проведення статистичного аналізу даних: обрання основної та альтернативної гіпотези, стандартного рівня значущості, алгоритмів оцінювання та перевірки гіпотез. Проблема пі-хакінгу (англ. *p-hacking, data fishing* – маніпулювання даними) і контролювання потужності тестів на стадії планування та завершення дослідження. Відбирання і перетворення даних: етичний аспект. Етика презентування результатів дослідження.

Практична частина. Виконання роботи з науковою літературою з теми індивідуального дослідження. Збирання даних. Поєднання різних типів даних для проведення дослідження. Обговорення дотримання академічної доброчесності у контексті індивідуальних дослідницьких проєктів.

18. Пошук наукової інформації та збирання даних для статистичного дослідження (21 год)

Теоретична частина. Необхідність аналізу літературних джерел з обраної тематики. Засоби добирання першоджерел в інтернеті, пошукові машини. Пошук за ключовими словами, авторами, покликаннями на літературу. Основні рекомендації щодо роботи й опрацювання інформаційних джерел. Складання тез, анотацій, конспектів під час опрацювання літературних джерел. Узагальнення та систематизація зібраної інформації з теми дослідження на основі опрацьованих джерел. Питання збирання даних в інтернеті, мережеві засоби збирання статистичної

інформації. Збирання даних шляхом опитувань. Оформлення, зберігання й опис зібраних даних.

Практична частина. Опрацювання наукової літератури з теми дослідження. Проведення аналізу першоджерел і збирання даних для індивідуального дослідницького проєкту. Обговорення результатів.

19. Проведення науково-дослідницької роботи (30 год)

Теоретична частина. Способи висування та перевірки гіпотези. Методи статистичного оброблення даних під час проведення статистичного дослідження. Наукова публікація. Види наукової публікації: теоретична стаття, методичні рекомендації, прикладне дослідження, опис програмної реалізації, популяризація. Відповідність напряму дослідницької роботи жанру планованої публікації.

Наукове дослідження. Перегляд планів і структури дослідження залежно від досягнутих результатів. Виокремлення невирішених питань, визначення можливостей їх розв'язання.

Практична частина. Виконання вправ на висування та перевірку гіпотези. Ознайомлення з методами статистичного оброблення даних під час проведення статистичного дослідження.

Перегляд досягнутих результатів індивідуального дослідження. Обговорення процесу роботи й поточних результатів у доповідях і дискусіях.

Перевірка на відповідність напряму дослідницької роботи й виду наукової публікації.

20. Оформлення й аналіз результатів роботи (27 год)

Теоретична частина. Основні вимоги до оформлення дослідницьких робіт (змісту, структури, стилю). Оформлення графічного матеріалу і таблиць. Формулювання висновків і результатів дослідження. Повнота, стислість, об'єктивність і коректність висновків. Вимоги й стандарти щодо оформлення покликань на літературні джерела та їх бібліографічні описи. Алгоритм проведення аналізу результатів роботи.

Практична частина. Оформлення та редагування результатів роботи. Попередні обговорення результатів роботи.

21. Захист дослідницької роботи (12 год)

Теоретична частина. Підготовка до захисту, його етапи. Створення мультимедійної презентації: принципи, вимоги, рекомендації. Технічні засоби оформлення мультимедійних презентацій. Доповідь: структура і зміст доповіді для захисту. Постер і постерна доповідь. Основні реко-

мендації щодо створення постера. Рекомендації з підготовки та виголошення доповіді, ведення дискусії.

Практична частина. Складання плану доповіді. Написання доповіді. Створення візуального супроводу доповіді. Публічний захист дослідницьких робіт.

22. Організаційно-масові заходи (12 год)

Теоретична частина. Правила поведінки під час організаційно-масових заходів: екскурсій, олімпіад, конкурсів, турнірів, тематичних заходів тощо. Умови участі в організаційно-масових заходах вихованців гуртка зі статистики: наукових читаннях, лекторіях, учнівських наукових конференціях, конкурсах, тематичних заходах.

Практична частина. Зустрічі з працівниками статистичних органів, науковцями, викладачами, які займаються питаннями сучасної статистики. Наукові читання, лекторії з найважливіших теоретичних і практичних питань статистики, моніторингу, сучасних інформаційних технологій, всеукраїнських і міжнародних проєктів і програм у галузі статистики. Участь в учнівських наукових конференціях, конкурсах, тематичних заходах з питань статистики.

23. Підсумок (3 год)

Теоретична частина. Підбиття підсумків роботи гуртка протягом року.

Практична частина. Поради й рекомендації для продовження роботи.

ПРОГНОЗОВАНИЙ РЕЗУЛЬТАТ

Вихованці мають знати:

- основні принципи статистичної класифікації;
- зміщені вибіркові процедури й корекції;
- алгоритми кластерного аналізу;
- процеси Маркова і теорію масового обслуговування;
- методи проведення імітаційного експерименту;
- основи науково-дослідницької діяльності;
- методи роботи й опрацювання інформаційних джерел;
- методи досліджень у галузі статистики;
- способи висування та перевірки гіпотези;
- методи статистичного оброблення даних під час проведення статистичного дослідження.

Вихованці мають уміти:

- застосовувати алгоритми статистичної класифікації;
- досліджувати дані методами кластерного аналізу;
- розв'язувати статистичні задачі з практичним змістом;
- представляти результати дослідницької діяльності;
- підраховувати основні дескриптивні статистики;
- інтерпретувати результати візуалізації даних;
- здійснювати статистичне оцінювання невідомих параметрів;
- будувати класифікатори за навчальною вибіркою;
- проводити імітаційні експерименти;
- досліджувати дані методами кластерного аналізу;
- оцінювати точність статистичних оцінок;
- використовувати теоретичні знання і застосовувати їх у розв'язку практичних задач;
- вести первинну документацію дослідження;
- проводити статистичне оброблення первинних даних;
- аналізувати отримані дані й доходити відповідних висновків;
- презентувати результати проведеної роботи;
- брати участь у диспутах;
- оформлювати результати проведеної науково-дослідницької роботи;
- проводити й захищати дослідницьку роботу (проєкт).

У вихованців мають сформуватися такі компетентності:

- здатність до науково-дослідницької діяльності в галузі статистики;
- здатність використовувати статистичні методи й теорії, застосовувати статистичні моделі під час вивчення природничих (фізики, астрономії, географії, економіки, хімії, біології) та інших навчальних предметів;
- уміння працювати з різними джерелами для пошуку наукової інформації зі статистики та теорії ймовірностей;
- уміння висувати й перевіряти гіпотези;
- здатність до систематизації та класифікації даних статистичного дослідження;
- уміння розв'язувати задачі з прикладної та теоретичної статистики;
- здатність до побудови ймовірнісних моделей реальних об'єктів;
- досягнення поставленої мети з дотриманням вимог академічної доброчесності та етики;
- здатність досліджувати, інтерпретувати й оцінювати результати;
- сформованість стійкого інтересу до статистики як професійної діяльності;
- здатність застосовувати статистичний апарат для розв'язання практичних задач;

- уміння планувати й реалізовувати власний науково-дослідницький проєкт;
- навички роботи з науковою і довідковою літературою;
- удосконалення навичок із захисту дослідницької роботи;
- вивчення проблем з різних поглядів, порівняння різних позицій і підходів під час їх розв'язання й роботи над проєктом;
- удосконалення навичок із захисту науково-дослідницької роботи (проєкту);
- наукова і дослідницька ініціативність для участі в конференціях, конкурсах, тематичних заходах.

ОРІЄНТОВНИЙ ПЕРЕЛІК ОБЛАДНАННЯ

Обладнання	Кількість, шт.
Персональний комп'ютер	за кількістю вихованців
Екран для демонстрації	1
Мультимедійний проєктор	1
Інтерактивна дошка	1
Принтер	1
Сканер	1
Програмне забезпечення: інтерпретатор мови статистичного програмування R, RStudio	за кількістю вихованців
Папір друкарський	у разі потреби
Ручки кулькові	у разі потреби
Олівці креслярські	у разі потреби
Лінійки	у разі потреби
Скріпки, кнопки	у разі потреби
Теки	у разі потреби

ЛІТЕРАТУРА

1. Артем'єва О. О., Литвинчова Г. А., Лихота С. О. Програми з позашкільної освіти : дослідницько-експериментальний напрям. Основи науково-дослідницької діяльності. Київ : НЦ «МАНУ», 2019. 48 с.
2. Білоус С. Ю. Як розвинути в учня якості дослідника. Харків : Видавнича група «Основа», 2004. 157 с.
3. Канеман Д. Мислення швидко і повільне. Київ : Наш формат, 2018. 480 с.
4. Карташов М. В. Імовірність, процеси, статистика. Київ : ВПЦ «Київський університет», 2007. 494 с.

5. Кузьменко О. Сутність та напрями розвитку STEM-освіти. *Наукові записки. Серія: Проблеми методики фізико-математичної і технологічної освіти*. Вип. 9 (III). С. 188–190.
6. Майборода Р. Є. Комп'ютерна статистика. Київ : ВПЦ «Київський університет», 2019. 589 с.
7. Майборода Р. Є. Парадокси статистики. *У світі математики*. 2021. № 1(25). С. 24–34.
8. Майборода Р. Є. Регресія: лінійні моделі. Київ : ВПЦ «Київський університет», 2007. 296 с.
9. Майборода Р. Є. У пошуках кримінальної ймовірності. *У світі математики*. 2009. № 4. С. 1–12.
10. Майборода Р. Є. Що таке теорія масового обслуговування. *У світі математики*. 1997. № 2. Т. 3. С. 1–16.
11. Ядренко М. Й. Випадкова величина. *У світі математики*. 2003. № 2. Т. 9. С. 12–14.
12. Ядренко М. Й. Ймовірність випадкової події. *У світі математики*. 2002. № 3. Т. 8. С. 12–19.
13. Ядренко М. Й. Стохастичний експеримент. Випадкові події. *У світі математики*. 2002. № 2. Т. 8. С. 18–23.
14. Finkelstein M. O. Basic concepts of probability and statistics in law. New York : Springer, 2009. 172 p.
15. Huff D., Geis I. How to Lie with Statistics. New York : WWNorton, 2010. 114 p.

К. В. Терлецька, К. О. Антошина

НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА «НЕСТАНДАРТНІ ЗАВДАННЯ І ГОЛОВОЛОМКИ»

ПОЧАТКОВИЙ РІВЕНЬ

«Схвалено для використання в освітньому процесі»

Рішення експертної комісії з позашкільної освіти від 13.12.2023

(протокол № 4)

*Зареєстровано у Каталозі надання грифів навчальній літературі
та навчальним програмам за № 8.0088-2023*

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Українська держава приділяє особливу увагу розвитку системи освіти, завданнями якої є поєднання предметної та ключових компетентностей, що забезпечує засвоєння знань, розвиток вмінь і навичок їх застосування у повсякденному житті, формування цінностей і виваженого ставлення до навколишньої дійсності.

Математика є важливим засобом дослідження явищ і процесів навколишнього світу. Використання її законів для розв'язування проблем, пов'язаних із реальними життєвими ситуаціями, сприяє формуванню у вихованців інтересу до математики як науки, активізує їх творче та нестандартне мислення, надає можливість досягти природні й соціальні явища.

Під час організації освітнього процесу важливим є пошук нового й ефективного інструментарію, що сприяв би формуванню необхідних сучасній людині компетентностей. Розвиток у вихованців логічного мислення, уваги, зосередженості, формування вмінь висловлювати власну думку, знаходити креативні рішення для розв'язання проблем, критично оцінювати інформацію, ефективно співпрацювати для досягнення визначеної мети є умовою для самореалізації у майбутньому.

Важливим є створення умов для забезпечення пізнавальних потреб і запитів сучасної молоді, виявлення її потенціалу, набуття знань і формування навичок їх використання в освітній діяльності та у повсякденному житті.

Застосування головоломок в освітньому процесі сприяє формуванню у вихованців математичного мислення (логічного, просторового, абстрактного, аналітичного, критичного), здатності генерувати ідеї, створювати моделі для реалізації поставлених завдань, шукати закономір-

ності та доходити логічних висновків, знаходити принципово нові підходи до вирішення проблем. Така стратегія навчання забезпечує глибоке розуміння концепції математичної науки. Вихованці мають можливість усвідомити, що математика — це не окремі теорії, набір стандартних методів, фіксованих фактів і формул, а інструмент, що дає можливість осмислити навколишній світ, бо вона спрямована на встановлення закономірностей, залежностей, зв'язків між об'єктами, ознайомлює з такими математичними явищами, як невизначеність і залежність, що лежать в основі багатьох життєвих ситуацій.

Прикладне застосування математики є актуальним сьогодні, на що вказують, зокрема, результати міжнародного оцінювання PISA, яким встановлено здатність дітей 15 років використовувати навчальні здобутки в різноманітних життєвих ситуаціях. Тому в навчальній програмі акцент зроблено на розв'язанні цікавих практичних задач, а не на застосуванні абстрактних математичних шаблонів. Програма спрямована на підготовку вихованців до науково-дослідницької діяльності в галузі точних і прикладних наук.

Метою програми є формування у вихованців предметної та ключових компетентностей у процесі розв'язання нестандартних задач.

Основні **завдання** полягають у формуванні таких компетентностей:

- *пізнавальної*: опанувати знання з математики та усвідомлювати її роль у природничих науках;
- *практичної*: формувати навички застосовувати набуті знання для розв'язування задач; розвивати логічне мислення, вміння користуватися методами індукції й дедукції, аналізу й синтезу, доходити висновків й робити узагальнення;
- *творчої*: розвивати творчі здібності у процесі розв'язання задач із відкритими умовами (шукати власний підхід до проблеми, контрінтуїтивне рішення; поєднувати різні методи розв'язання задач тощо);
- *соціальної*: удосконалювати навички для самореалізації (об'єктивне оцінювання себе і своїх знань; тайм-менеджмент; вміння чітко висловлювати свої думки, об'єднувати зусилля для досягнення мети тощо) та наполегливість під час розв'язання складних задач.

Реалізація мети й завдань забезпечить формування: *креативності* — здатності до продукування принципово нових ідей; *абстрагування* — здатності виділяти в процесі пізнання несуттєві властивості для знаходження суттєвих, закономірних ознак; *комунікативності* — здатності встановлювати й підтримувати контакти з іншими людьми, розуміти й бути зрозумілим у спілкуванні; *критичного мислення* — здатності розрізняти хибні та істинні твердження, що є важливим у сучасному інфор-

маційному просторі; *прототипування* — здатності створювати моделі процесу / механізму для перевірки базової функціональності; *ініціативності / підприємливості* — здатності генерувати ініціативи щодо вирішення проблеми, прогнозувати правильну відповідь, керувати групою (спонукати, переконувати й залучати до пошуку різних підходів до розв'язання); розвиток навичок *пошуку інформації* — здатності знаходити джерела інформації; опанування методу *брейншторму* — здатності брати активну участь у мозковому штурмі — обговоренні, під час якого генерується максимальна кількість підходів до вирішення проблеми.

Зміст програми спрямовано на формування умінь і навичок застосування математичних понять, процедур, фактів та інструментів для розв'язання різних проблем — від абстрактних, математичних до проблем і викликів реального життя, що передбачає застосування математики в життєвому контексті.

Навчальна програма розрахована на один рік навчання на початковому рівні. Загальна кількість навчального часу становить 72 год на рік (2 год на тиждень).

Освітній процес організовується з використанням таких форм і методів навчання, як: лекції, дискусії, інтерактивні ігри, практикуми з розв'язання задач, командні змагання. Теоретичний матеріал подається з елементами проблемних питань і застосуванням презентаційних матеріалів.

Практична частина занять спрямована на розвиток умінь і навичок комунікації та формування командної стратегії розв'язання задач. Важливим елементом є конкурси командних головоломок.

Навчальна програма передбачає інтерактивні, групові, індивідуальні форми роботи й може бути реалізована в очному, дистанційному або змішаному режимах навчання. Під час освітнього процесу застосовуються навчальні платформи, програмне забезпечення, відкриті освітні ресурси.

Змістом програми передбачено реалізацію міжпредметних зв'язків, що сприяють формуванню у вихованців інтелектуальних вмінь і навичок, розширюють їх ерудицію, сприяють усвідомленню необхідності застосування знань з інших предметів.

Визначення рівня сформованості навичок і вмінь відбувається за результатами виконання тестових, творчих завдань, участі в конкурсах дослідницького спрямування та роботи над розв'язанням науково-дослідницьких завдань.

Контроль та оцінювання рівня знань здійснюється за результатами виконання тестових завдань, участі в математичних змаганнях.

Індивідуальна робота організовується відповідно до Положення про порядок організації індивідуальної та групової роботи у позашкільних навчальних закладах.

Початковий рівень НАВЧАЛЬНО-ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН

№ з/п	Тема	Кількість годин		
		теоретичні	практичні	усього
1.	Вступ	1	1	2
2.	Головоломки	1	1	2
3.	Ребуси. Кросворди. Друдли	1	2	3
4.	Пазли, танграм, пентаміно, стомахіон. Головоломки із сірниками	2	2	4
5.	Розпізнавання закономірностей	1	2	3
6.	Загадки «так – ні»	1	2	3
7.	Парадокси як головоломки. Ілюзії та неможливі фігури	1	2	3
8.	Математичні головоломки. Нестандартні задачі	1	2	3
9.	«Лицарі і брехуни»	2	2	4
10.	Задачі на зважування та переливання	1	2	3
11.	Магічні квадрати. Судоку. Кен-кен	1	2	3
12.	Числові ребуси з квадратами. Криптарифми	1	2	3
13.	Гра в 15	1	2	3
14.	Кубик Рубіка	1	2	3
15.	Теорія графів у головоломках	1	2	3
16.	Шифри та коди	1	1	2
17.	Математичні ігри	1	1	2
18.	Пакування	1	1	2
19.	Топологічні головоломки	1	2	3
20.	Математичні парадокси. Математичні фокуси	1	2	3
21.	Геометричні головоломки	1	1	2
22.	Теорема Піфагора	1	1	2

№ з/п	Тема	Кількість годин		
		теоретичні	практичні	усього
23.	Математика і мистецтво. Сангаку	1	2	3
24.	Конкурси головоломок	—	4	4
25.	Математичні квести	—	2	2
26.	Математичні руханки	—	1	1
27.	Підсумок	—	1	1
Разом		25	47	72

ЗМІСТ ПРОГРАМИ

1. Вступ (2 год)

Теоретична частина. Мета і завдання роботи гуртка. План роботи гуртка на навчальний рік.

Практична частина. Ігри: «Угадай 2/3 середнього», «Найменше унікальне натуральне число», «Слова». Аналіз результатів ігор.

2. Головоломки (2 год)

Теоретична частина. Головоломки. Хронологічний опис історії головоломок.

Типи головоломок. Класифікація головоломок за способом взаємодії. Видатні люди у світі головоломок.

Практична частина. Розв'язування головоломок з історичних джерел.

3. Ребуси. Кросворди. Друдли (3 год)

Теоретична частина. Ребуси. Історія ребусів. Принципи розв'язання ребусів.

Кросворди. Коротка історія кросвордів.

Друдли.

Практична частина. Командна робота з розгадування ребусів і кросвордів.

Створення друдлів. Конкурс друдлів.

4. Пазли, танграм, пентаміно, стомахіон. Головоломки із сірниками (4 год)

Теоретична частина. Історія пазлів, танграма, пентаміно, стомахіону. Підходи до їх створення та розв'язання.

Вимірювання параметрів і спроби узагальнення елементів головоломок. Головоломки із сірниками, їх історія, принципи розв'язання.

Практична частина. Складання головоломок. Дослідження геометрії отриманих фігур. Створення власних пазлів, силуетів для головоломок, таких як танграм, пентаміно, стомахіон. Конкурс зі складання головоломок із сірниками.

5. Розпізнавання закономірностей (3 год)

Теоретична частина. Закономірності. Закономірності в житті. Хибні закономірності.

Головоломки на знаходження закономірностей.

Практична частина. Розв'язання головоломок на знаходження закономірностей. Мініолімпіада з розв'язання головоломок на знаходження закономірностей. Складання головоломок.

6. Загадки «так – ні» (3 год)

Теоретична частина. Загадки «так – ні». Основні прийоми для їх розгадування.

Правила постановки запитань і надання відповідей.

Причинно-наслідкові зв'язки з отриманої інформації.

Практична частина. Гра «так – ні». Відпрацювання правил постановки запитань і надання відповідей. Виконання завдань на побудову причинно-наслідкових зв'язків з отриманої інформації.

7. Парадокси як головоломки. Ілюзії та неможливі фігури (3 год)

Теоретична частина. Парадокси. Апорії Зенона, парадокс Рассела, парадокс Тесея. Історія ілюзій і неможливих фігур.

Практична частина. Дискусія. Виявлення в навколишньому світі прикладів парадоксів Рассела й Тесея, дихотомії Зенона.

Пошук суперечливих доволишніх явищ. Створення графічних ілюзій і неможливих фігур.

8. Математичні головоломки. Нестандартні задачі (3 год)

Теоретична частина. Три основні правила розв'язання математичних головоломок. Підходи до розв'язання нестандартних задач (на прикладі задач про середню швидкість, земний екватор, каву з молоком).

Практична частина. Розв'язання популярних нестандартних задач про лотоси, сходи, вирубування лісів, день народження Шеріл тощо.

9. «Лицарі і брехуни» (4 год)

Теоретична частина. Задачі типу «Лицарі і брехуни». Базові алгоритми й підходи до їх розв'язування.

Формальний підхід до логіки. Приклади коректного логічного наслідку і побудови заперечень.

Правило *modus tollens* на діаграмі Ойлера.

Логіка й числення висловлювань. Інтерпретації висловлювань, таблиці істинності.

Практична частина. Розв'язування задач типу «Лицарі і брехуни». Мініолімпіада з розв'язування задач «Лицарі і брехуни».

Практика формалізації логічних висловлювань. Виконання завдань на побудову заперечень і складання таблиць істинності. Розв'язування задач «Лицарі і брехуни» за допомогою числення висловлювань.

10. Задачі на зважування та переливання (3 год)

Теоретична частина. Основні відомості про задачі на зважування та переливання. Базові алгоритми й підходи до їх розв'язання. Приклади задач на зважування та переливання.

Практична частина. Розв'язування задач на зважування та переливання. Мініолімпіада з розв'язування задач на зважування та переливання.

11. Магічні квадрати. Судоку. Кен-кен (3 год)

Теоретична частина. Історія магічних квадратів і судоку. Основні ідеї та труднощі під час розв'язання судоку. Різновиди судоку. Приклади розв'язання судоку та головоломки кен-кен.

Практична частина. Розв'язування різних типів судоку різної складності й головоломок кен-кен.

12. Числові ребуси з квадратиками. Криптарифми (3 год)

Теоретична частина. Числові ребуси з квадратиками, приклади їх розв'язання.

Криптарифми. Приклад розв'язання криптарифму Дьюдені.

Практична частина. Розв'язування числових ребусів з квадратиками.

Розв'язування криптарифмів. Мініолімпіада з розв'язування числових ребусів і криптарифмів.

13. Гра в 15 (3 год)

Теоретична частина. Історія гри в 15. Стратегії гри. Математичні результати, пов'язані з грою в 15.

Практична частина. Складання класичної гри в 15. Перевірка розв'язку за допомогою математики.

Розташовування фішок на полі в незвичному порядку.

14. Кубик Рубіка (3 год)

Теоретична частина. Історія кубика Рубіка. Складність математичного опису головоломки, міжнародна нотація.

Алгоритми складання кубика.

Різновиди кубика Рубіка.

Практична частина. Відпрацювання алгоритмів складання кубика Рубіка. Створення візерунків на гранях кубика.

Конкурс зі складання кубика на швидкість.

15. Теорія графів у головоломках (3 год)

Теоретична частина. Історичний огляд теорії графів. Мотивація і зручність поняття графа як схематичного зображення взаємозв'язків. Ілюстрація зв'язних, незв'язних графів. Приклади застосування графів у житті. Графовий підхід до головоломок. Теорема Ойлера та лема про рукостикання, їх застосування.

Практична частина. Головоломок на обведення фігур. Розв'язування задач на застосування теореми Ойлера та леми про рукостикання. Задача Рамсея.

Розв'язування головоломок за допомогою теорії графів. Командна мініолімпіада з розв'язування графових головоломок.

16. Шифри та коди (2 год)

Теоретична частина. Шифри та коди, їх історія, види.

Сучасні шифри. Приклади математичних і нематематичних шифрів. Процеси шифрування і дешифрування.

Азбука Морзе, сигнальні прапори.

Практична частина. Відпрацювання навичок із шифрування та дешифрування текстових повідомлень за допомогою шифрів зсуву, заміни, скитали, Віженера, Полібія, *rigrep*.

Робота в групах: з азбукою Морзе, міжнародними сигнальними прапорами.

Командна мініолімпіада з дешифрування.

17. Математичні ігри (2 год)

Теоретична частина. Нім. Виграшна стратегія гри. Пошук закономірності в задачі про близнюків.

Корейські шахи «Коно».

Практична частина. Гра в нім за різними правилами. Турнір із корейських шахів «Коно».

18. Пакування (2 год)

Теоретична частина. Постановка задач на пакування. Пакування куль у двовимірному та тривимірному просторах. Різниця між замощенням необмеженого простору й обмеженої ділянки. Дилема пакувальника.

Практична частина. Дослідження щільності різних пакувань. Контр-інтуїтивне розміщення монет у головоломці «Ten Penny Puzzle». Складання монет у рамку. Складання кубиків сома, куба Бедлама, Red stone.

19. Топологічні головоломки (3 год)

Теоретична частина. Поняття топологічної головоломки, принцип її побудови.

Металеві й мотузкові головоломки.

Лівостороння і правостороння стрічки Мебіуса.

Фокус із зачепленням.

Практична частина. Розв'язування металевих і мотузкових головоломок. Розрізання стрічки Мебіуса. Дослідження закономірності під час кратного розрізання різних перекручених стрічок Мебіуса. Розрізання склеєних циліндрів і склеєних стрічок Мебіуса.

Перев'язування картонних коробок.

20. Математичні парадокси. Математичні фокуси (3 год)

Теоретична частина. Парадокси Монті Голла, Арістотеля, парадокс очікування.

Практична частина. Гра Монті Голла. Парадокси: зникнення клітинки, число пі дорівнює 2, геометричний парадокс Льюїса Керрола. Математичні фокуси: демонстрація фокусів «Магічні таблиці», «Ясновидець», «Коробка сірників», розгадування і практикування.

21. Геометричні головоломки (2 год)

Теоретична частина. Задача про кошеня. Теорема Коперника. Задача «Щит бога Марса».

Практична частина. Розв'язування геометричних головоломок.

Мініолімпіада з геометричних головоломок.

22. Теорема Піфагора (2 год)

Теоретична частина. Теорема Піфагора. Застосування теореми Піфагора для знаходження різних величин. Взаємозв'язок теореми Піфагора із формулами квадрата суми та квадрата різниці.

Практична частина. Розв'язування геометричних задач із застосуванням теореми Піфагора.

Розв'язування нестандартних і прикладних задач.

23. Математика і мистецтво. Сангаку (3 год)

Теоретична частина. Історична довідка про японську храмову геометрію сангаку. Зв'язок математики й оригамі.

Практична частина. Розв'язування задач сангаку. Розв'язування геометричних задач за допомогою оригамі.

24. Конкурси головоломок (4 год)

Практична частина. Конкурси з розв'язування головоломок.

25. Математичні квести (2 год)

Практична частина. Проведення математичних квестів.

26. Математичні руханки (1 год)

Практична частина. Проведення математичних та ігрових руханок.

27. Підсумок (1 год)

Практична частина. Підбиття підсумків роботи гуртка. Проведення конкурсів.

ПРОГНОЗОВАНИЙ РЕЗУЛЬТАТ

У вихованців мають сформуватися такі компетентності:

- *пізнавальна:* орієнтування у виборі способів і засобів розв'язання завдань самостійної пізнавальної діяльності; здійснення наукового пошуку з використанням дослідницьких методів для розширення наукового світогляду;
- *практична:* здійснення об'єктивного вибору способів розв'язування задач і оцінювання отриманих результатів; обґрунтування і доведення математичних тверджень; застосування математичних методів у процесі розв'язування задач; використання математичних знань і навичок під час виконання завдань, пов'язаних з іншими науковими галузями та повсякденним життям;
- *творча:* застосування творчого підходу до вибору найбільш раціональних способів розв'язання задач; застосування математичної й логічної кмітливості для вирішення творчих завдань;

- *соціальна*: володіння навичками соціальної активності на основі соціальних умінь: здатність до спільного життя та співпраці в колективі, готовність взяти на себе відповідальність, об'єднувати зусилля для досягнення мети; уміння визначати роль і можливості математики в пізнанні й описанні різних процесів і явищ суспільного життя.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Бачинська Р. С. Задача як засіб формування логічної складової математичної компетентності учнів базової школи. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми* : зб. наук. пр. Київ – Вінниця : ТОВ фірма «Планер», 2018. Вип. 51. С. 29–33.
2. Бачинська Р. С. Логічна складова математичної компетентності учнів базової школи. *Проблеми та перспективи фахової підготовки вчителів математики* : зб. наук. праць за матеріалами міжнар. наук.-практ. конф. (30 травня – 1 червня 2018 р.). Вінниця : ТОВ «Нілан-ЛТД», 2018. С. 194–196.
3. Воєвода А. Л. Чи допоможе математика в житті? *Математика в рідній школі*. 2017. № 9. С. 14–17.
4. Сафонова І. Я. Ключові й предметно-математичні компетентності. *Педагогічний альманах* : зб. наук. праць / редкол.: В. В. Кузьменко (голова) та ін. Херсон : КВНЗ «Херсонська академія неперервної освіти», 2014. Вип. 21. С. 50–56.
5. Упровадження STEM-освіти в умовах інтеграції формальної і неформальної освіти обдарованих учнів : методичні рекомендації / Н. І. Поліхун, К. Г. Постова, І. А. Сліпухіна, Г. В. Онопченко, О. В. Онопченко. Київ : Інститут обдарованої дитини НАПН України, 2019. 80 с.
6. Berlekamp E. R., Conway J. H., Guy R. K. *Winning ways for your mathematical plays*. 2nd ed. Massachusetts : Academic Press, 1982.
7. Falkner A. N., Sooriamurthi R., Michalewicz Z. *Puzzle-Based Learning: the first experiences*. *20th Annual Conference for the Australasian Association for Engineering Education*, 6–9 December 2009 : Engineering the Curriculum. Barton, A.C.T. : Engineers Australia, 2009. P. 138–143.
8. Meyer E. F., Falkner N., Sooriamurthi R., Michalewicz Z. *Guide to Teaching Puzzle-based Learning*. Springer, 2014. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4471-6476-0>.
9. Michalewicz Z., Michalewicz M. *Puzzle-based learning: an introduction to critical thinking, mathematics, and problem-solving*. Ormond : Hybrid Publishers, 2008.

К. В. Терлецька, С. О. Довгий

НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА «МАТЕМАТИКА У МИСТЕЦТВІ»

ОСНОВНИЙ РІВЕНЬ

*Рекомендовано для використання в освітньому процесі
рішенням науково-методичної ради Національного центру
«Мала академія наук України»
(протокол № 4 від 30.09.2024)*

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Математика — не тільки інструмент для розв'язання задач і побудови стратегій, вона ще є мовою природи. Саме тому математика є незамінним засобом у творчій діяльності. Використання творів мистецтва для пояснення математичних понять може сприяти зацікавленню вихованців цією наукою та зробити навчання більш захопливим. Інтеграція математики й мистецтва допомагає зрозуміти, що математика — це не абстрактні концепції, а елемент творчості, а мистецтво — не лише вираження емоцій та ідей, а й спосіб встановлення зв'язків між складними концепціями та законами природи.

Навчальна програма позашкільної освіти дослідницько-експериментального напрямку «Математика у мистецтві» спрямована на розвиток творчого і критичного мислення, формування навичок аналізу та розв'язання складних задач, що є важливим у сучасному світі.

Оскільки математичні поняття, ідеї та концепції часто є складними для розуміння через їх абстрактність, то наочна і практична реалізація цих ідей робить математику доступнішою для сприйняття. Такий підхід сприяє розвитку творчого і критичного мислення, формуванню навичок аналізу і розв'язання складних задач і викликів, що постають в умовах сучасного світу. Саме це й обумовлює актуальність програми.

Новизною програми є розгляд математичних концепцій через твори мистецтва, пояснення математичних ідей, що лежать в їх основі й роблять відомими. У програмі представлено математичні ідеї, що знайшли відбиток у мистецтві, та їх зв'язок з філософськими концепціями, наведено приклади мистецьких творів, які стають джерелом натхнення для математиків і спонукають їх до створення нових наукових теорій.

Метою програми є формування у вихованців пізнавальної, практичної, творчої, соціальної компетентностей у процесі засвоєння математичних знань і дослідницької діяльності.

Основні **завдання** полягають у формуванні таких компетентностей:

- *пізнавальної*: формувати науковий світогляд; активізувати пізнавальний інтерес до ґрунтовного вивчення математичних ідей, виражених у багатьох видах мистецтва і творчості;

- *практичної*: розвивати навички висувати гіпотези, ставити проблемні запитання, аналізувати й перевіряти результати дослідження, оцінювати їх точність; формувати вміння знаходити математичні ідеї в різноманітних мистецьких виявах, вільно висловлювати й обстоювати власні ідеї, навички виконання і презентації результатів науково-дослідницької роботи з обраної проблеми;

- *творчої*: формувати вміння і навички використовувати творчий підхід у процесі розв'язання різноманітних задач, застосовувати креативне мислення під час виконання практичних завдань;

- *соціальної*: розвивати навички комунікування під час обговорень, дискусій, рефлексій і вирішення поставлених завдань;

- *дослідницької*: формувати вміння висувати гіпотези й перевіряти їх, аналізувати дані, шукати додаткову інформацію.

У багатьох темах застосовуються міжпредметні зв'язки, зокрема з математикою, фізикою, технологією і мистецтвом. Поєднання знань з проєктивної геометрії, використаних в образотворчому мистецтві, лежить в основі нових ілюзорних і парадоксальних світів, які розширюють людські горизонти й уявлення про простір. А застосування техніки оригами розкриває нові можливості у технологіях.

Пропонована навчальна програма призначена для роботи з вихованцями віком 14–17 років і розрахована на один рік навчання на основному рівні – 144 год на рік (4 год на тиждень). Форми навчання – очна і дистанційна.

Зміст навчальної програми «Математика у мистецтві» охоплює такі аспекти:

- наукова освіта (наукове розуміння принципів, що лежать в основі мистецьких творів);

- міжпредметність (поєднання різних наук і мистецтва);

- креативність (можливість поєднувати різні ідеї та концепції);

- критичне мислення (перевірка фактів та інформації).

Під час організації освітнього процесу використовуються інтерактивні форми роботи. Зміст програми передбачає активне залучення вихованців до дослідницької діяльності, виконання практичних робіт, реалізацію науково-дослідницьких проєктів. Теоретичні заняття проводяться у формі

лекцій, переглядів відеоматеріалів, демонстрацій зображень і скульптур, прослуховування аудіозаписів, віртуальних подорожей до визначних місць, музеїв. За можливості вітаються уроки в музеях і мистецьких просторах. Теоретичний матеріал подається з елементами проблемного навчання та презентаційними матеріалами. Практичні заняття проводяться у виді обговорення проблемних питань, дискусій, практикумів із розв'язання задач, перевірки гіпотез, сформульованих під час дискусій, і майстер-класів зі створення наочних моделей, які ґрунтуються на математичній основі. Практичні майстер-класи, запропоновані у програмі, сприяють формуванню здатності бачити математичні ідеї в різних виявах реального світу. Також у програмі зроблено акцент на формуванні критичного мислення і вмінь перевіряти інтуїтивні припущення з допомогою логічних міркувань і розрахунків. Навчальні теми доповнені нестандартними математичними задачами й оглядом нових методів їх розв'язання.

Контролювання знань вихованців здійснюється під час виконання практичних завдань, захисту індивідуальних дослідницьких проєктів з математики у мистецтві.

Ресурсне забезпечення програми передбачає використання додаткових матеріалів, таких як кишеньковий ліхтарик, матеріали для створення мильних бульбашок на дротяних конструкціях, мотузки для в'язання вузлів, нитки для вишивання, дзеркала, картонні фігури. Під час вивчення розділу «Математика в музиці» рекомендовано використовувати аудіозаписи. Для виконання деяких завдань потрібні комп'ютери з доступом до мережі Інтернет (зокрема, ресурсів: www.wolframalpha.com, <https://musiclab.chromeexperiments.com>, <https://www.geogebra.org>).

За запропованою навчальною програмою можна проводити індивідуальну роботу відповідно до Положення про порядок організації індивідуальної та групової роботи в позашкільних навчальних закладах, затвердженого наказом Міністерства освіти і науки України від 11.03.2004 № 651 (зі змінами, внесеними наказом Міністерства освіти і науки України від 10.12.2008 № 1123).

Основний рівень НАВЧАЛЬНО-ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН

Розділ, тема	Кількість годин		
	теоретичних	практичних	усього
Вступ	1	1	2
Розділ 1. Пропорційність у мистецтві	10	10	20
1.1. Пропорція. Золота пропорція	1	1	2
1.2. Геометричні властивості золотої пропорції. Пентаграма	1	1	2

Розділ, тема	Кількість годин		
	теоретичних	практичних	усього
1.3. Золота пропорція та числа Фібоначчі	1	1	2
1.4. Формула Біне для обчислення чисел Фібоначчі	1	1	2
1.5. Золоті прямокутники, трикутники й спіраль	1	1	2
1.6. Золота пропорція в картинах і архітектурі	1	1	2
1.7. Золота пропорція і краса. Вітрувіанська людина	1	1	2
1.8. Числа Фібоначчі в природі	1	1	2
1.9. Числа Фібоначчі в математичних парадоксах	1	1	2
1.10. Числа Фібоначчі й трикутник Паскаля	1	1	2
Розділ 2. Геометрія в сакральному мистецтві	11	11	22
2.1. Сакральна геометрія	1	1	2
2.2. Платонові тіла та їх властивості. Формула Ейлера	1	1	2
2.3. Тетраedr. Полум'янистий тетраedr Платона	1	1	2
2.4. Гексаedr (куб)	1	1	2
2.5. Октаedr	1	1	2
2.6. Додекаedr	1	1	2
2.7. Ікосаedr	1	1	2
2.8. Перерізи куба	1	1	2
2.9. Зірка Кеплера	1	1	2
2.10. Сакральна геометрія кіл на готичних вітражах	1	1	2
2.11. Японська храмова геометрія	1	1	2
Розділ 3. Симетрія в мистецтві	6	6	12
3.1. Симетрія та її види	1	1	2
3.2. Дзеркальна симетрія. Закони відбиття світла	1	1	2

Розділ, тема	Кількість годин		
	теоретичних	практичних	усього
3.3. Симетрія в скульптурі й живописі	1	1	2
3.4. Тіла обертання в мистецтві	1	1	2
3.5. Нитяна графіка	1	1	2
3.6. Калейдоскопи	1	1	2
Розділ 4. Проекція у живописі	12	12	24
4.1. Проекція як основа малювання	1	1	2
4.2. Центральна проекція. Перспектива	1	1	2
4.3. Теорема Дезарга	1	1	2
4.4. Теорема Монжа	1	1	2
4.5. Теорема Бріаншона	1	1	2
4.6. Тінь і проекція	1	1	2
4.7. Неможливі фігури	1	1	2
4.8. Картографічні проєкції	1	1	2
4.9. Анаморфічна проєкція	1	1	2
4.10. Геометричні парадокси	1	1	2
4.11. Ілюзії сприйняття	1	1	2
4.12. Четвертий вимір і кубізм	1	1	2
Розділ 5. Математика в архітектурі	6	6	12
5.1. Геометрія єгипетських пірамід і давньогрецьких храмів	1	1	2
5.2. Гіперболоїдні конструкції	1	1	2
5.3. Еліпс в архітектурі	1	1	2
5.4. Парабола в архітектурі	1	1	2
5.5. Лінійчаті й мінімальні поверхні в архітектурі	1	1	2
5.6. Фрактали й самоподібність в архітектурі	1	1	2
Розділ 6. Математика в дизайні й технологіях	11	11	22
6.1. Маятник і малювання	1	1	2
6.2. Малювальні машини й спірограф	1	1	2
6.3. Фігури постійної ширини	1	1	2

Розділ, тема	Кількість годин		
	теоретичних	практичних	усього
6.4. Паркети та мозаїки в орнаментах і картинах	1	1	2
6.5. Теорія вузлів у дизайні	1	1	2
6.6. Теорія кіс у дизайні	1	1	2
6.7. Математика оригамі	1	1	2
6.8. Застосування оригамі в сучасних технологіях	1	1	2
6.9. Фрактали у мистецтві. Самоподібність і фрактал	1	1	2
6.10. Українська вишиванка і фрактал	1	1	2
6.11 Математика шарнірних механізмів	1	1	2
Розділ 7. Математика в музиці	5	5	10
7.1. Основи гармонії в музиці	1	1	2
7.2. Числова гармонія піфагорійців. Мікротонна музика	1	1	2
7.3. Влаштування клавіш рояля і геометрична прогресія	1	1	2
7.4. Логарифми й гучність, шкала децибел	1	1	2
7.5. Комбінаторно-ігрові методи для створення музики	1	1	2
Розділ 8. Основи науково-дослідницької діяльності з математики в мистецтві	4	12	16
8.1. Етапи науково-дослідницької діяльності	2	4	6
8.2. Результати дослідницької роботи	2	4	6
8.3. Захист дослідницького проекту з математики у мистецтві	—	4	4
Підсумок	—	2	2
Разом	66	76	144

ЗМІСТ ПРОГРАМИ

Вступ (2 год)

Теоретична частина. План гуртка на навчальний рік. Огляд розділів і тем, які будуть вивчені протягом року. Цілі та завдання для кожного етапу навчання. Мета і завдання роботи гуртка. Зв'язок математики й мистецтва. Місце математики й мистецтва в культурі.

Практична частина. Перегляд, обговорення відеоматеріалів про приклади творів мистецтва, дизайну й архітектури, які мають математичну основу: пропорції в картині «Вітрувіанська людина» Леонардо да Вінчі та Парфеноні, магічний квадрат в картині «Меланхолія» Альбрехта Дюрера, анаморфізм у картині «Посланці» Ганса Гольбейна, фрактальні візерунки у дизайні. Дискусія «Математичні основи в мистецтві й дизайні».

Розділ 1. Пропорційність у мистецтві (20 год)

1.1. Пропорція. Золота пропорція (2 год)

Теоретична частина. Об'єктивні критерії краси й можливість математичного опису творів мистецтва. Поняття пропорції. Золота пропорція.

Квадратне рівняння, яке приводить до знаходження значення золотої пропорції: складання і розв'язання. Геометричне й алгебраїчне походження золотої пропорції.

Практична частина. Розв'язування квадратних рівнянь. Розв'язування рівнянь, що зводяться до квадратних методом заміни змінних.

1.2. Геометричні властивості золотої пропорції. Пентаграма (2 год)

Теоретична частина. Пентаграма, її геометричні властивості. Золота пропорція в пентаграмі. Співвідношення сторін і кутів пентаграми з золотою пропорцією: відношення довжин сторін і діагоналей пентаграми відповідає золотій пропорції.

Пентаграма у філософії та мистецтві. Значення пентаграми у філософії Піфагора: пентаграма як символ ідеальної гармонії й числової краси.

Вплив пентаграми на розуміння пропорцій і гармонії у творчості художників, зокрема Леонардо да Вінчі, та в архітектурі епохи Відродження.

Практична частина. Дослідження послідовності правильних п'ятикутних зірок, вписаних та описаних. Виконання роботи з наочною моделлю: створення правильного п'ятикутника у вигляді вузла зі смужки паперу.

1.3. Золота пропорція та числа Фібоначчі (2 год)

Теоретична частина. Задача Фібоначчі про розмноження кролів. Означення послідовності Фібоначчі. Золота пропорція та її зв'язок з числами Фібоначчі.

Золота пропорція в природі (спіралі у раковинах, розташування листя на стеблах, структури квіткових пелюсток). Метод математичної індукції.

Практична частина. Доведення тверджень про послідовність Фібоначчі за допомогою математичної індукції.

Вивчення зразків і моделей природних об'єктів, що демонструють числа Фібоначчі й золоту пропорцію.

Використання комп'ютерних або графічних інструментів для візуалізації співвідношень, що ілюструють золоту пропорцію в природі.

1.4. Формула Біне для обчислення чисел Фібоначчі (2 год)

Теоретична частина. Формула Біне та її доведення.

Практична частина. Дослідження подібності послідовностей у виді ланцюга квадратних коренів і ланцюгового дробу з одиниць до відношення золоті пропорції.

1.5. Золоті прямокутники, трикутники й спіраль (2 год)

Теоретична частина. Визначення подібності фігур. Золоті трикутники, прямокутники, ромби й спіралі. Послідовність золотих трикутників, прямокутників і ромбів. Прямокутники Фібоначчі як наближення до золотих прямокутників.

Практична частина. Побудова золотих прямокутників, трикутників, ромбів. Розв'язування геометричних задач із комбінацією золотих трикутників прямокутників і ромбів. Побудова золоті спіралі.

1.6. Золота пропорція в картинах і архітектурі (2 год)

Теоретична частина. Золота пропорція у спорудах давньогрецької архітектури. Золота пропорція у давньогрецькому храмі Парфенон, скульптурах Фідія тощо.

Практична частина. Дослідження співвідношення різних частин споруд давньогрецької архітектури. Перегляд і аналіз відеоматеріалів, фото, зображень Парфенону, піраміди Хеопса, картин Леонардо Да Вінчі, Сальвадора Далі.

1.7. Золота пропорція і краса. Вітрувіанська людина (2 год)

Теоретична частина. Уявлення людей про красу. Огляд сучасних наукових досліджень про сприйняття краси. Стандарти краси в різні епохи. Вітрувіанська людина. Універсальні критерії краси й можливості їх існування.

Практична частина. Формування гіпотези про існування ідеального співвідношення, яке подобається більшості. Перевірка гіпотези шляхом дослідження співвідношень сторін відомих картин, екранів смартфонів,

планшетів, моніторів тощо. Перевірка тверджень на основі картини Леонардо да Вінчі «Вітрувіанська людина». Дослідження співвідношень частин людського тіла.

1.8. Числа Фібоначчі в природі (2 год)

Теоретична частина. Послідовність Фібоначчі в природі: від соняшника до раковин молюсків. Опис послідовності зерен у спіралях соняшника, ананаса, соснових шишок і росту гілок дерев за допомогою чисел Фібоначчі. Послідовність Фібоначчі у закономірності родоvodu бджіл.

Практична частина. Дослідження послідовностей зерен у спіралях соняшника, соснових шишках і пелюстках квітів та порівняння їх з послідовністю Фібоначчі. Виконання роботи на застосування спіралі Фібоначчі для опису форми галактик, циклонів і мушлі наутилуса.

1.9. Числа Фібоначчі в математичних парадоксах (2 год)

Теоретична частина: Тотожність Кассіні, що зв'язує послідовні члени Фібоначчі F_{n-1} , F_n , F_{n+1} . Парадокс зникнення клітинки. Трикутники Гарднера 3×5 і 5×13 . Парадокс шахівниці (квадрат 8×8) Семюеля Лойда.

Практична частина. Виконання роботи зі створення геометричних парадоксів для фігур інших розмірів із використанням тотожності Кассіні.

1.10. Числа Фібоначчі й трикутник Паскаля (2 год)

Теоретична частина. Означення трикутника Паскаля як розташування біноміальних коефіцієнтів у формі трикутної таблиці. Біноміальні коефіцієнти. Числа Фібоначчі в трикутнику Паскаля.

Практична частина. Розв'язування задач на біноміальні коефіцієнти.

Розділ 2. Геометрія в сакральному мистецтві (22 год)

2.1. Сакральна геометрія (2 год)

Теоретична частина. Сакральна геометрія. Ідеї Платона про тіла. Праця «Таємниця світу» Йоганна Кеплера. Філософія піфагорійців. Піфагорійська арифметика і геометрія. Квітка життя і куб Метатрона.

Практична частина: Розв'язування задач на знаходження середніх величин і пропорцій.

2.2. Платонові тіла та їх властивості. Формула Ейлера (2 год)

Теоретична частина. Геометричне тіло. Багатогранник, його елементи (ребра, вершини, грані). Опуклі багатогранники. Правильні багатогранники. Платонові тіла. Формула Ейлера про зв'язок кількості граней (G), вершин (B) і ребер (P) опуклого багатогранника.

Практична частина: Дослідження можливостей існування інших Платонових тіл. Розв'язування задач з теми «Правильні багатогранники». Застосування формули Ейлера.

2.3. Тетраедр. Полум'янистий тетраедр Платона (2 год)

Теоретична частина. Тетраедр. Правильний тетраедр. Елементи тетраедра. Тетраедр у природі. Властивості правильного тетраедра. Основні формули для знаходження площі повної поверхні та об'єму правильного тетраедра.

Практична частина: Розв'язування задач на знаходження елементів правильного тетраедра, площі його повної поверхні й об'єму.

2.4. Гексаедр (куб) (2 год)

Теоретична частина. Куб, його властивості. Куб у природі. Основні формули для знаходження площі повної поверхні та об'єму куба. «Кубок Кеплера»: модель Сонячної системи з п'яти Платонових тіл.

Практична частина: Розв'язування задач на знаходження елементів куба, площі його повної поверхні й об'єму.

2.5. Октаедр (2 год)

Теоретична частина. Октаедр, його властивості. Октаедр у природі: кристали алмазу та у природних мінералах і кристалах (магнетит). Формули для знаходження радіусів вписаної й описаної сфери, об'єму та площі поверхні октаедра.

Практична частина. Розв'язування задач на знаходження площі поверхні й об'єму октаедра.

2.6. Додекаедр (2 год)

Теоретична частина. Додекаедр: визначення і властивості. Додекаедр у природі. Формули для знаходження радіусів вписаної й описаної сфери, об'єму та площі поверхні додекаедра.

Практична частина. Розв'язування задач на знаходження площі поверхні й об'єму додекаедра.

2.7. Ікосаедр (2 год)

Теоретична частина. Ікосаедр: визначення і властивості. Природні приклади ікосаедра: структура вірусів, кристали у формі ікосаедра. Формули для знаходження радіусів вписаної й описаної сфери, об'єму і площі поверхні ікосаедра. Зрізаний ікосаедр і класичний футбольний м'яч.

Практична частина. Розв'язування задач на знаходження площі поверхні й об'єму ікосаедра, на обчислення площі поверхні й об'єму ікосаедра

за заданою довжиною ребра. Виконання вправ на застосування формул для знаходження радіусів вписаної й описаної навколо ікосаедра сфер.

2.8. Перерізи куба (2 год)

Теоретична частина. Геометричні властивості перетинів куба площинами (правильні трикутники, чотирикутники, шестикутники та неправильні п'ятикутники).

Практична частина. Розв'язування задач на знаходження характеристик елементів перетинів куба різними площинами. Дослідження можливостей перерізу куба на три рівні піраміди.

2.9. Зірка Кеплера (2 год)

Теоретична частина. Тетраедр, вписаний у куб: розгляд геометричних властивостей тетраедра, вписаного в куб, його симетрії та зв'язку з іншими багатогранниками. Просторові співвідношення між елементами тетраедра і куба. Зірчастий октаедр Кеплера: октаедр, складений із двох взаємопроникних тетраедрів, що утворюють зіркову форму. Гравюра нідерландського художника-графіка Мауріца Ешера «Чотири тіла».

Практична частина. Розв'язування задач на знаходження характеристик елементів перетинів куба у вигляді трикутників: завдання на побудову перетинів куба, визначення кутів, довжин сторін і площ трикутників, утворених перетинами.

Майстер-клас з виготовлення паперової чи пластичної моделі зірчастого октаедра Кеплера.

Дослідження проєкцій і тіней зірчастого октаедра Кеплера за допомогою джерела світла.

2.10. Сакральна геометрія кіл на готичних вітражах (2 год)

Теоретична частина. Сакральні візерунки на основі кіл, що перетинаються: «зерно життя», «квітка життя», «vesica piscis» (риб'ячий пузир), «дерево життя» та сітки кругів, що перекриваються. Ідеальне коло Джотто: легенда про ідеальне коло. Квіткова і полум'яниста готика.

Практична частина. Пошук відповіді на запитання, чи можна побудувати ідеальне коло без циркуля. Розв'язування задач на знаходження площі і елементів орнаментів, які складаються з кругів, що перекриваються.

Майстер-клас зі створення ескізів готичних троянд (власних орнаментальних ескізів на основі готичних мотивів з використанням принципів сакральної геометрії).

2.11. Японська храмова геометрія (2 год)

Теоретична частина. Історія храмового японського мистецтва. Математичні відкриття у період Едо. Японська математика васан. Школи мандрівних математиків.

Практична частина. Розгляд методів і підходів до розв'язання задач за допомогою традиційних і сучасних математичних інструментів.

Розв'язування задач із дощечок сангаку. Виготовлення власної дощечки сангаку.

Розділ 3. Симетрія в мистецтві (14 год)

3.1. Симетрія та її види (2 год)

Теоретична частина. Симетрія, її види: дзеркальна, осьова, центральна, поворотна. Симетрія в живій і неживій природі (симетрія у комах і квітів, структура кристалів, форми галактик). Біологічне значення симетрії в еволюції видів і її роль у природній привабливості живих організмів.

Практична частина: Розв'язування задач методами центральної та поворотної симетрій. Обговорення впливу симетрії обличчя на сприйняття його привабливості. Аналіз симетрії людського обличчя з погляду психології та естетики. Обговорення ідеалів краси у різних культурах. Проведення експерименту з порівняння симетричних і асиметричних облич на основі фотографій чи програмного забезпечення.

3.2. Дзеркальна симетрія. Закони відбиття світла (2 год)

Теоретична частина. Пласке дзеркало, його властивості. Фізичні закони відбивання світла. Зображення в пласкому дзеркалі. Феномен перевернутості зображень у дзеркалі, зміни місцями лівого і правого боку. Історія використання дзеркал у побуті, науці та мистецтві. Дзеркало як інструмент створення ілюзій симетрії в архітектурі та дизайні інтер'єрів.

Практична частина. Дослідження різних типів симетрії за допомогою дзеркала. Проведення дослідів зі створення багаторазових відображень, вивчення принципу нескінченного дзеркального тунелю. Розв'язування задач методами дзеркальної симетрії. Виконання завдань на використання лазерів, ліхтариків або світлових променів для демонстрації законів відбивання.

3.3. Симетрія в скульптурі й живописі (2 год)

Теоретична частина: Симетрія як принцип гармонії та естетики в образотворчому мистецтві й архітектурі. Приклади симетрії в архітектурних пам'ятках (Парфенон, Тадж Махал, готичні собори й ренесансні палаці).

Використання симетрії для побудови композиції, створення балансу і впорядкованості сцен на прикладах картин епохи Відродження та класицизму (Леонардо да Вінчі, Альбрехт Дюрер, Рафаель).

Асиметрія як художній засіб. Використання асиметрії для створення напруги, дисгармонії або експресії (Вінсент Ван Гог, Сальвадор Далі).

Симетрична кляксографія, способи її застосування (тести Роршаха, арттерапія тощо).

Практична частина. Побудова геометричних фігур, симетричних заданим відносно прямої. Дослідження симетрії в природних візерунках, як-от крила метеликів, сніжинки чи листя.

3.4. Тіла обертання в мистецтві (2 год)

Теоретична частина. Гончарний круг. Гончарні вироби. Обертальні форми, що використовуються в гончарстві (вази, глечики, амфори й інші симетричні предмети). Куля. Сфера. Конус. Циліндр. Сферичні форми в мистецтві. Сферичні форми у скульптурі, архітектурі та декоративно-му мистецтві: від античних римських куполів і соборів епохи Ренесансу до сучасних інсталяцій і садово-паркової скульптури. Вплив сферичних форм на сприйняття простору і відчуття гармонії. Радіус, діаметр сфери. Кульовий сегмент, кульовий сектор. Площа поверхні сфери. Об'єм сфери.

Практична частина. Розв'язування задач на обчислення об'єму кулі та площі поверхні сфери (розрахунок об'єму декоративних елементів, використаних у скульптурах чи архітектурі, сферичних форм побутових предметів). Виконання завдань на створення власних поверхонь обертання (www.wolframalpha.com).

3.5. Нитяна графіка (2 год)

Теоретична частина: Ізонитка — техніка нитяної графіки. Застосування нитяної графіки в мистецтві та науці. Інструменти й матеріали для створення нитяних графіків. Кардіоїда. Нефроїда. Поняття обвідної. Застосування обвідної кривої для створення складних графічних зображень і моделей. Приклади обвідних кривих у природі, архітектурі та мистецтві.

Практична частина: Створення за допомогою техніки ізонитки кардіоїди, кола, гіперболи.

3.6. Калейдоскопи (2 год)

Теоретична частина: Двогранний дзеркальний кут. Калейдоскоп. Історія його виникнення. Внесок Девіда Брюстера в розвиток оптичних приладів.

Формування правильних багатокутників (трикутники, квадрати, п'ятикутники тощо) шляхом повторних відбиттів від однієї або кількох відрізків у двогранному дзеркальному куті.

Практична частина: Дослідження різних значень кута між дзеркала-ми і їх впливу на утворення правильних багатокутників. Експерименти

з різними кутами й відображенням відрізків на двогранному дзеркальному куті. Виготовлення простих моделей калейдоскопів для візуалізації принципів роботи двогранних дзеркальних кутів.

Розділ 4. Проекція у живописі (25 год)

4.1. Проекція як основа малювання (2 год)

Теоретична частина. Проекція як представлення тривимірних об'єктів у вигляді двовимірних зображень. Типи проєкцій та їх використання в практичних завданнях. Центральна й ортогональна проєкції. Ортогональні проєкції об'єктів — основа для створення планів, розрізів і фасадів.

Практична частина. Розв'язування задач на знаходження ортогональної проєкції відрізка на пряму й ортогональної проєкції відрізка на площину. Вправи на створення простих планів, розрізів і фасадів об'єктів за допомогою ортогональних проєкцій.

4.2. Центральна проєкція. Перспектива (2 год)

Теоретична частина. Центральна проєкція. Властивості центральної проєкції. Перспектива й історія її відкриття. Перспектива на картинах епохи Відродження («Афінська школа» Рафаеля, «Таємна вечеря» Леонардо да Вінчі).

Практична частина. Дослідження властивостей фігур, які зберігаються у випадку центрального проєктування. Виконання вправ на побудову перспективи на папері або за допомогою комп'ютерних програм («GeoGebra»). Створення зображень із використанням точки сходу та лінії горизонту.

4.3. Теорема Дезарга (2 год)

Теоретична частина. Історія виникнення проєктивної геометрії. Застосування проєктивної геометрії в живописі й архітектурному кресленні. Основні закони проєктивної геометрії. Теорема Дезарга про перспективні трикутники (без доведення).

Практична частина. Розв'язування геометричних задач із застосуванням теореми Дезарга.

4.4. Теорема Монжа (2 год)

Теоретична частина. Теорема Монжа. Наслідки з теореми Монжа. Представлення складних просторових фігур та їх властивостей на площині для розв'язання задач і демонстрації просторових закономірностей.

Практична частина. Демонстрування доведення теореми Монжа методом представлення планіметричної задачі як проєкції стереометричної задачі.

4.5. Теорема Бріаншона (2 год)

Теоретична частина. Теорема Бріаншона, її наслідки. Гіперболоїдні конструкції в будівництві (телекомунікаційні вежі, елементи мостів, сучасні футуристичні будівлі).

Практична частина. Застосування теореми Бріаншона до гіперболоїдних конструкцій. Розв'язування геометричних задач із застосуванням теореми Бріаншона.

4.6. Тінь і проєкція (2 год)

Теоретична частина. Фотографія як поєднання мистецтва і науки для створення зображень за допомогою світла. Технологія створення фотографії. Історія виникнення фотографії. Камера-обскура як предтеча сучасної камери. Використання камери-обскури художниками.

Практична частина. Розв'язування задач на вимірювання висоти об'єктів за допомогою довжини їх тіней. Дискусія «Які геометричні фігури можуть утворюватися внаслідок падіння тіні від тетраедра і куба?».

4.7. Неможливі фігури (2 год)

Теоретична частина. Неможливі фігури. Неоднозначні сполучення. Неможливий трикутник Пенроуза. Картина Мауріца Ешера «Водоспад», оптична ілюзія «Сходи Шредера». Пряма й обернена перспективи, їх застосування в живописі. Логічні парадокси, засновані на поєднанні прямої та оберненої перспектив у картинах Мауріца Ешера й Оскара Рейтерсверда.

Практична частина. Ознайомлення з творами мистецтва, що містять зображення неможливих фігур (роботи Мауріца Ешера, Оскара Рейтерсверда й ін.). Обговорення існування неможливих фігур, причин виникнення ілюзій і їх сприйняття, застосування неможливих фігур у сучасному мистецтві, дизайні та інших сферах.

4.8. Картографічні проєкції (2 год)

Теоретична частина. Картографічні проєкції як методи зображення поверхні Землі. Види картографічних проєкцій. Сферичні координати. Траєкторія польоту літака. Розрахунок величини радіуса Землі за допомогою тіней. Задача Ератосфена про знаходження радіуса Землі.

Практична частина. Розв'язування задач на знаходження найкоротшої відстані між точками на сфері. Порівняння різних проєкцій та аналіз їх спотворень.

Дослідження зміни форми, площі та відстані між об'єктами на карті за допомогою проєкції.

4.9. Анаморфічна проєкція (2 год)

Теоретична частина. Анаморфоз як метод спотворення зображення. Приклади відомих анаморфозів у мистецтві (картини «Посли» Ганса Гольбейна, «Таємничий острів» Іштвана Ороса, скульптури Джонті Гурвіца, перспективні анаморфози Феліче Варіні).

Практична частина. Майстер-клас зі створення власного анаморфозу за допомогою циліндричного дзеркала. Обговорення використання анаморфозу для створення загадкових або прихованих зображень, інтерактивних ілюзій, інсталяцій у доповненій реальності.

4.10. Геометричні парадокси (2 год)

Теоретична частина. Софізм і парадокс. Геометричні парадокси: доведення, що всі трикутники рівнобедрені; зникнення клітинки. Геометричні софізми в історії. Роль софізмів і парадоксів для демонстрації важливості бути уважним до кожної деталі в математичних доведеннях.

Практична частина. Пояснення геометричного парадокса, що $\pi = 2$. Поетапний розгляд парадоксів. Виявлення прихованих помилок під час розв'язання парадоксів і спроба їх коригування.

4.11. Ілюзії сприйняття (2 год)

Теоретична частина. Демонстрація ілюзій зорового сприйняття форми (спіраль Фрейзера) і розміру (ілюзії Мюллера-Лаєра, Еббінгауза, Джастроу). Ілюзії зорового сприйняття кольору і руху (решітка Геринга, трикутник Каніжа).

Практична частина. Дискусія «Чому наш мозок нас обманює?». Розв'язування математичних задач, які мають контрінтуїтивні рішення. Демонстрування суперечності інтуїтивних очікувань і математичної реальності.

4.12. Четвертий вимір і кубізм (2 год)

Теоретична частина: Концепція простору з чотирма вимірами як узагальнення тривимірного простору. Математичні аспекти чотиривимірного простору. Кубізм, його характеристики. Роль чотиривимірної геометрії у розвитку кубізму (Пабло Пікассо, Жорж Брак). Проєкції тесеракта (гіперкуба).

Практична частина: Побудова й аналіз проєкцій чотиривимірних об'єктів, таких як тесеракт, на тривимірний простір.

Використання моделей і комп'ютерних програм для візуалізації проєкцій чотиривимірних об'єктів. Створення власних кубістичних малюнків або колажів, які містять елементи проєкцій чотиривимірних об'єктів.

Розділ 5. Математика в архітектурі (34 год)

5.1. Геометрія єгипетських пірамід і давньогрецьких храмів (2 год)

Теоретична частина. Історія виникнення єгипетських пірамід. Методи будівництва й інженерії єгиптян. Геометрія пірамід. Трикутник Кеплера. Циркуль і лінійка як інструменти для побудови геометричних об'єктів. Три великі задачі старовини: квадратура круга, подвоєння куба, трисекція кута.

Практична частина. Виконання роботи з даними: дослідження співвідношень, які наявні в геометричних параметрах пірамід Хеопса, Хефрена і Мікерина. Обговорення впливу пропорцій на структуру та стійкість пірамід. Розв'язування задач на побудову.

5.2. Гіперболоїдні конструкції (2 год)

Теоретична частина. Оптичні властивості гіперболи. Гіперболоїдні конструкції в будівництві й архітектурі. Приклади їх впливу на сучасну архітектуру. Гіперболоїдні вежі: вежа порту Кобе (Японія), телевежа Гуанчжоу (КНР). Конструкції гіперболоїдних градирень. Теплообмін у гіперболоїдних формах.

Практична частина. Виконання завдань на створення гіперболоїдних конструкцій з паличок.

5.3. Еліпс в архітектурі (2 год)

Теоретична частина. Еліпс, його властивості. Канонічне рівняння еліпса. Геометричний зміст коефіцієнтів у рівнянні еліпса. Фокальна відстань. Ексцентриситет еліпса. Оптичні властивості еліпса. Еліптичний більярд. Еліпси в архітектурі та дизайні. Аналіз еліпсів у створенні естетичної привабливості й функціональності архітектурних проєктів.

Практична частина. Розв'язування задач з теми «Еліпс»: на розрахунок фокальної відстані, ексцентриситету й інших геометричних параметрів еліпса на основі даних, взятих з реальних прикладів.

5.4. Парабола в архітектурі (2 год)

Теоретична частина. Парабола: визначення, властивості. Канонічне рівняння параболи. Геометричний зміст коефіцієнтів у рівнянні параболи. Парабола в архітектурі та дизайні. Оптичні властивості параболи. Параболічна антена: конструкція та функціонування параболічних антен, які використовують відповідну форму для фокусування сигналів, аналіз їх застосування в телекомунікаціях і радіоастрономії. Форми мостових арок у вигляді парабол. Огляд прикладів відомих мостів з параболічними арками.

Практична частина. Розв'язування задач з теми «Парабола». Створення параболічного калькулятора.

5.5. Лінійчаті й мінімальні поверхні в архітектурі (2 год)

Теоретична частина. Лінійчата поверхня. Види лінійчатих поверхонь: гіперболоїд, гіперболічний параболоїд. Мінімальна поверхня. Катеноїда і гелікоїда. Приклади лінійчатих і мінімальних поверхонь в соборі Святого Сімейства (архітектор Антоніо Гауді).

Практична частина. Використання геометричних фігур з лінійчатими поверхнями в архітектурі Антоніо Гауді. Виконання роботи зі створення моделей мінімальних поверхонь (катеноїди й гелікоїди) за допомогою мильних бульбашок і плівок, що натягуються на дротяні контури.

5.6. Фрактали й самоподібність в архітектурі (2 год)

Теоретична частина. Самоподібність. Фрактал. Вимірювання берегової лінії Британії. Дослідження Люїса Річардсона: різні значення довжини однієї й тієї самої сухопутної межі між Іспанією та Португалією. Фрактальна розмірність. Приклади самоподібної архітектури: стародавні індійські східчасті храми, Кандар'я-Махадева. Фрактал і релігійна символіка. Фрактали в африканській символіці.

Практична частина. Розрахунки фрактальної розмірності для множини Кантора, сніжинки Коха, серветки Серпінського, губки Менгера.

Розділ 6. Математика в дизайні й технологіях (22 год)

6.1. Маятник і малювання (2 год)

Теоретична частина. Гармонійні коливання маятника в одному напрямку. Два одночасних гармонійних коливання маятника у двох взаємно перпендикулярних напрямках.

Фігури Ліссажу, їх відтворення в роботах Макса Ернста. Малювання за допомогою маятника: твори Тома Шеннона.

Практична частина. Побудова фігур Ліссажу за параметричними формулами.

6.2. Малювальні машини й спірограф (2 год)

Теоретична частина. Малювальні машини. Обертання кола по зовнішньому (внутрішньому) боці іншого кола. Механізми утворення кривих — астроїди, кардіоїди, равлика Паскаля. Теорема Коперника.

Практична частина. Розв'язування задачі на знаходження траєкторії кошеняти на драбині, що падає. Дослідження траєкторій обертання точок на колах за допомогою спірографа.

6.3. Фігури постійної ширини (2 год)

Теоретична частина. Фігура постійної ширини. Трикутник Рело. Елементи готичних вітражів із трикутниками Рело. Трикутники Рело на фасаді київського костелу Святого Миколая. Інші фігури постійної ширини та їх властивості.

Практична частина. Розв'язування задачі про дорожні люки. Розв'язування задач з використанням трикутників Рело.

6.4. Паркети та мозаїки в орнаментах і картинах (2 год)

Теоретична частина. Арабські орнаменти, їх застосування в розписах палацу Альгамбра. Замощення у формі тварин на картинах Мауріцо Ешера («День і ніч»). Приклади замощення в архітектурі, прикладному мистецтві. Замощення Йогана Кеплера. Регулярне розбиття площини птахами і ящірками на картинах Мауріцо Ешера.

Практична частина. Виконання роботи зі створення замощення різними формами мозаїк.

6.5. Теорія вузлів у дизайні (2 год)

Теоретична частина. Основні елементи вузлів та їх види. Математична теорія вузлів. Історія виникнення та розвитку теорії вузлів. Плaskі діаграми вузлів і зачеплень. Морські вузли. Рухи Рейдемейстера. Інваріанти зачеплень.

Практична частина. Виконання роботи на зав'язування різних морських вузлів.

6.6. Теорія кіс у дизайні (2 год)

Теоретична частина. Виникнення математичної теорії кіс як результат виконання замовлення ткацької фабрики. Поняття коси, їх класифікація. Множення кіс з однаковою кількістю ниток. Властивість асоціативності множення кіс. Поняття коси, оберненої до даної. Основні співвідношення теорії кіс.

Практична частина. Розв'язування задач на операції з косами.

6.7. Математика оригамі (2 год)

Теоретична частина. Вступ до геометрії оригамі. Послідовність дій і правила складання плаского оригамі.

Правила Худзіти: формальний опис геометричних побудов за допомогою плаского оригамі.

Практична частина. Розв'язування задачі про трисекцію кута засобами оригамі. Розв'язування геометричних задач на побудову методами оригамі.

6.8. Застосування оригамі в сучасних технологіях (2 год)

Теоретична частина: Оригамі й фрактальне складання. Застосування оригамі в сучасних технологіях. Складання космічних сонячних панелей, серцеві стенти, проектування подушок безпеки, нанопристрої та роботи, імплантати сітківки тощо. Оріобіотика — поєднання програмування та згинів оригамі.

Практична частина. Виконання роботи з відтворення згинів Міури.

6.9. Фрактали у мистецтві. Самоподібність і фрактал (2 год)

Теоретична частина. Самоподібність у живій і неживій природі. Самоподібні структури в архаїчних культурах. Зображення множини Кантора на давньоєгипетських колонах. Принцип побудови серветки Серпінського, сніжинки Коха, фракталу Вісекка і кривої Пеано.

Практична частина. Виконання роботи зі створення власного фракталу у вигляді дракона Хартера — Хейтуея, дослідження його властивостей.

6.10. Українська вишиванка і фрактал (2 год)

Теоретична частина. Фрактальна розмірність. Формула для розрахунку фрактальної розмірності. Застосування формули для розрахунку фрактальної розмірності для відрізка, квадрата, куба. Патерни геометричних фракталів у візерунках українських вишиванок. Структура хрестів, Т-фрактали, геометричні фрактали у візерунках вишиванок, зокрема, на основі фракталів Вісекка (шестикутники) та Серпінського (трикутники).

Практична частина. Розрахунок фрактальної розмірності візерунків української вишиванки різних регіонів країни. Розглядання різних рівнів ієрархії вишивальних орнаментів, де хрести й інші елементи повторюються за фрактальними принципами. Вивчення зображень українських вишиванок для визначення фрактальних характеристик та їх відповідності теоретичним моделям.

6.11. Математика шарнірних механізмів (2 год)

Теоретична частина: Шарнірний механізм. Геометричні властивості шарнірних механізмів. Історія виникнення шарнірних механізмів. Механізм Ватта. Найпростіші шарнірні механізми. Транслятор Кемпе. Задача про трисекцію кута і рухомих істот від Тео Янсена.

Практична частина: Створення калькулятора «Вчена мавпочка» за допомогою шарнірних механізмів.

Розділ 7. Математика в музиці (10 год)

7.1. Основи гармонії в музиці (2 год)

Теоретична частина. Частота коливання. Діапазон частот звуку, що сприймає слух людини. Обернена пропорційність частоти коливань

довжині струни. Піфагорова гамма. Досконалі консонанси та дисонанси. Музичний стрій: поняття октави, квінти та кварта.

Практична частина. Виконання роботи з допомогою застосунку «Chrome Music Lab» (<https://musiclab.chromeexperiments.com/>): створення ритму, формування спектрограми (на прикладі звуків музичних інструментів). Прослуховування пісень, музичних творів, їх аналіз. Дослідження принципу повторення в музиці (гімн України, українські народні пісні, твори українських авторів, твори відомих композиторів). Обговорення естетики музичного сприйняття.

7.2. Числова гармонія піфагорійців. Мікротонова музика (2 год)

Теоретична частина. Основні види піфагорійської гармонії. Натуральний стрій. Відношення частот сусідніх нот. Піфагорові середні: арифметичне, геометричне, гармонійне. Геометрична ілюстрація середніх величин. Мікротонова музика.

Практична частина. Розв'язування задач на знаходження середнього арифметичного, геометричного, гармонійного.

7.3. Влаштування клавіш рояля і геометрична прогресія (2 год)

Теоретична частина. Рівномірно темперований стрій. «Добре темперований клавір» Й. С. Баха. Організація клавіш рояля. Означення геометричної прогресії. Знаменник геометричної прогресії. Загальний член геометричної прогресії. Послідовність певних нот різних октав як послідовності членів геометричних прогресій.

Практична частина. Розв'язування задач на геометричну прогресію. Обчислення загального члена геометричної прогресії.

7.4. Логарифми й гучність, шкала децибел (2 год)

Теоретична частина. Шкала відчуттів. Логарифмічна шкала. Закон Вебера – Фехнера, його математичне формулювання. Шкала децибел.

Практична частина. Розв'язування задач із логарифмами.

7.5. Комбінаторно-ігрові методи для створення музики (2 год)

Теоретична частина Випадкова подія. Задачі про кидання гральних кубиків. Математичні ідеї «Музичної гри з гральними кубиками» В. А. Моцарта.

Практична частина: Прослуховування твору В. А. Моцарта «Музична гра з гральними кубиками». Підрахунок кількості варіантів музичних творів із використанням комбінаторних принципів.

Створення музичного твору шляхом з'єднання випадково вибраних невеликих фрагментів музики.

Розділ 8. Основи науково-дослідницької діяльності з математики в мистецтві (16 год)

8.1. Етапи науково-дослідницької діяльності (6 год)

Теоретична частина. Науково-дослідницька діяльність. Наукове дослідження. Напрями й етапи написання дослідницького проєкту. Методи наукових досліджень. Обрання методів, необхідних для проведення дослідження. Джерела наукової інформації. Особливості пошуку актуальних наукових даних в інтернеті. Критичний аналіз отриманої інформації. Напрями наукових досліджень у математиці й мистецтві. Об'єкт, предмет дослідження. Опрацювання отриманих даних.

Практична частина. Обрання теми індивідуального дослідницького проєкту. Вивчення стану наукової розробленості проблеми, робота з різними джерелами інформації. Складання попереднього плану роботи. Визначення методів дослідження. Виконання експериментальної роботи.

8.2. Результати дослідницької роботи (6 год)

Теоретична частина. Вимоги до оформлення дослідницької роботи. Структура дослідницької роботи: титульний аркуш, зміст, перелік умовних позначень і скорочень, вступ, основна частина, висновки, список використаної літератури, додатки. Правила складання списку використаних джерел. Принципи академічної доброчесності під час дослідження: дотримання правил цитування і перефразування, вимог до написання огляду літератури, оформлення посилань на текстові, візуальні й аудіовізуальні джерела. Види порушень академічної доброчесності (академічний плагіат, фальсифікація, фабрикація даних тощо) та шляхи їх уникнення. Вимоги до підготовки тез дослідження, постера і мультимедійної презентації.

Практична частина. Оформлення дослідницької роботи (проєкту) відповідно до вимог: формування експериментальної частини, підготовка тексту дослідницької роботи, формулювання висновків та узагальнень. Робота з візуалізацією даних. Розроблення постера, презентації, підготовка доповіді за результатами науково-дослідницької роботи (проєкту).

8.3. Захист дослідницького проєкту з математики у мистецтві (4 год)

Практична частина: Захист дослідницьких проєктів. Обговорення отриманих результатів.

Підсумок (2 год)

Практична частина. Узагальнення вивченого матеріалу, фінальне обговорення та рефлексія.

ПРОГНОЗОВАНИЙ РЕЗУЛЬТАТ

У вихованців мають сформуватися такі компетентності:

- *пізнавальна*: активізація пізнавального інтересу до більш ґрунтовного вивчення математичних ідей, виражених у багатьох видах мистецтва і творчості; розуміння зв'язку між математикою та мистецтвом, у тому числі таких аспектів, як симетрія, пропорції, фрактали й геометричні конструкції;
- *практична*: розвиток навичок висування гіпотез, постановки проблемних запитань, аналізування, перевірки результатів дослідження та оцінювання їх точності; використання математичних ідей у різноманітних мистецьких виявах, таких як живопис, скульптура, архітектура та дизайн; формування навичок ведення науково-дослідницької роботи й представлення результатів, підготовки доповідей і презентацій з обраної теми;
- *творча*: використання творчого підходу для розв'язання різноманітних задач, що поєднують математику і мистецтво; застосування креативного мислення під час виконання практичних завдань, створення нових математичних моделей і формування концепцій на основі аналізу мистецьких творів;
- *соціальна*: удосконалення навичок ефективної комунікації під час обговорень, дискусій і рефлексій, уміння працювати в команді під час виконання практичних завдань і проектів; розвиток здатності до конструктивного обміну ідеями та досвідом.

ОРІЄНТОВНИЙ ПЕРЕЛІК ОБЛАДНАННЯ

Обладнання, прилади, наочність	Кількість, шт.
Комп'ютер чи ноутбук	за кількістю вихованців
Картон, папір, олівці	за кількістю вихованців
Мотузки для в'язання вузлів	за кількістю вихованців
Підвіс, нитка для маятника	за кількістю вихованців
Голка та нитки для вишивання	за кількістю вихованців
Пласкі дзеркала	за кількістю вихованців
Циліндричне дзеркало	за кількістю вихованців
Кишеньковий ліхтарик	за кількістю вихованців
Металевий дріт	за кількістю вихованців
Мильний розчин	за кількістю вихованців
Ножиці	за кількістю вихованців

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Боровик В. Н., Яковець В. П. Курс вищої геометрії : навч. посіб. Суми : ВТД «Універсальна книга», 2004. 464 с.
2. Масол Л. М. Мистецтво : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ : Видавничий дім «Освіта», 2017. 224 с.
3. Шлях до гармонії: мистецтво + математика (The way to harmony: art + mathematics) : тематичний збірник / ред. М. Габрель ; пер. Г. Ісаєва. Львів : Львівська національна академія мистецтв, 2007. 443 с.
4. Cromwell P. R. Polyhedra. Cambridge : Cambridge University Press, 1997. P. 79–86.
5. Gardner M. The Colossal Book of Short Puzzles and Problems. New York : WW Norton & Co, 2005. 512 p.
6. Huzita H. Axiomatic Development of Origami Geometry. *Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology*. 1989. P. 143–158.
7. Mathematics of Music. URL: <https://brilliant.org/wiki/mathematics-of-music/> (дата звернення: 09.08.2024).
8. Oriobiotics. URL: <https://ars.electronica.art/futurelab/en/projects-oriobotics/> (дата звернення: 09.08.2024).
9. Parabola Calculator. URL: <https://www.geogebra.org/m/ueu8ktun> (дата звернення: 09.08.2024).
10. Peretz I. The Biological Foundation of Music. *Language, Brain, and Cognitive Development* / ed. by E. Dupoux. Cambridge : MIT Press, 2001. P. 435–446.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ, РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЛЯ ВИХОВАНЦІВ

1. Бевз Г. П. Методика розв'язування стереометричних задач : посіб. для вчителя. Київ : Рад. шк., 1988. 192 с.
2. Елленберґ Дж. Як ніколи не помилятися. Сила математичного мислення. Київ : Наш формат, 2024. С. 408.
3. Кузякін К. Що таке математика? Харків : Талант, 2018, 120 с.
4. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б, Якір М. С. Геометрія. Профільний рівень : підруч. для 10 кл. закл. заг. серед. освіти. Харків : Гімназія, 2018. 240 с.
5. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б, Якір М. С. Геометрія. Профільний рівень : підруч. для 11 кл. закл. заг. серед. освіти. Харків : Гімназія, 2019. 204 с.

6. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б, Якір М. С. Геометрія : підруч. для 9 кл. закл. заг. серед. освіти. Харків : Гімназія, 2020. 240 с.
7. Погорєлов О. В. Геометрія. Стереометрія : підруч. для 10–11 кл. серед. шк. Київ : Освіта, 2000. 128 с.
8. Imaginary. URL: <https://www.imaginary.org/> (дата звернення: 15.09.2024).
9. Khan Academy. URL: <https://www.khanacademy.org/> (дата звернення: 15.09.2024).
10. Mathigon. URL: <https://mathigon.org/> (дата звернення: 15.09.2024).

Т. Д. Тимошкевич

НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА «МАТЕМАТИКА ЯК ІНСТРУМЕНТ МИСЛЕННЯ»

ПОЧАТКОВИЙ РІВЕНЬ

*Рекомендовано для використання в освітньому процесі
рішенням науково-методичної ради Національного центру
«Мала академія наук України»
(протокол №3 від 26.06.2024)*

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Головними завданнями організації освітньої діяльності гуртків математики є формування у вихованців таких математичних знань, які можна використовувати не лише для розв'язування задач, а й проблем повсякденного життя, завдань у майбутній трудовій діяльності. Для цього необхідно володіти навичками визначати закономірності, знаходити зв'язки між теорією і її практичним значенням.

Навчальна програма «Математика як інструмент мислення» побудована з урахуванням чинного законодавства в галузі освіти.

Програмою передбачено застосування компетентнісного підходу в організації роботи з вихованцями віком 14–16 років для підвищення рівня їх математичних знань і розвитку продуктивного математичного мислення.

Зміст програми спрямовано на вироблення у вихованців стійкої мотивації до вивчення математики, формування формально-логічних і оперативних знань, успішне засвоєння знань з інших галузей освіти, умінь застосовувати математичні моделі для розв'язання проблем, пов'язаних з освітньою діяльністю, повсякденним життям і майбутньою професійною діяльністю.

Метою програми є формування у вихованців ключових компетентностей у процесі розв'язування математичних задач.

Основні **завдання** програми полягають у формуванні таких компетентностей:

- **процедурної**: формувати вміння і навички розв'язувати типові математичні задачі (використовувати на практиці алгоритми розв'язання типових задач), систематизувати типові задачі, знаходити критерії зведення задач до типових, розпізнавати типову задачу або зводити її до типової;
- **логічної**: розвивати здатність застосовувати дедуктивний метод доведення та спростування тверджень (володіти й використовувати

на практиці поняттєвий апарат дедуктивних теорій: поняття, визначення понять, висловлювання, аксіоми, теореми та їх доведення, приклади до теорем тощо; відтворювати дедуктивні доведення теорем і доведення правильності процедур розв'язань типових задач; здійснювати дедуктивні обґрунтування правильності розв'язання задач і шукати логічні помилки у неправильних дедуктивних міркуваннях; використовувати математичну й логічну символіку на практиці);

- *дослідницької*: формувати вміння і навички застосовувати методи дослідження практичних і прикладних задач, математичні методи (формулювати математичні задачі; будувати аналітичні моделі задач; висувати й перевіряти гіпотези із застосуванням методів індукції, аналогії, узагальнення та на основі власного досвіду досліджень; інтерпретувати результати, одержані з використанням формальних методів; систематизувати отримані результати; встановлювати зв'язки з попередніми результатами; шукати аналогії в інших розділах математики);

- *творчої*: розвивати системне, просторове й логічне мислення, уяву, фантазію, прагнення до набуття нових знань і вмінь.

Навчальною програмою передбачено один рік навчання на початковому рівні – 144 год на рік (4 год на тиждень).

Програма містить практичну і теоретичну частини. Під час проведення навчальних занять обов'язковим є здійснення аналізу розв'язаних задач.

Форми навчання – очна, дистанційна, змішана. Освітній процес передбачає індивідуальну і самостійну роботу вихованців. Для кращого засвоєння навчального матеріалу використовуються засоби візуалізації та дидактичне забезпечення.

Для оцінювання результатів освітньої діяльності вихованців використовують такі форми контролю, як індивідуальні практичні завдання, тестування.

Початковий рівень НАВЧАЛЬНО-ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН

№ з/п	Тема	Кількість годин		
		теоретичних	практичних	усього
1.	Вступ	2	–	2
2.	Степінь вершини	1	3	4
3.	Основна теорема арифметики	1	3	4
4.	Правило добутку	1	3	4
5.	Десятковий запис числа. Подільність	1	3	4

№ з/п	Тема	Кількість годин		
		теоретичних	практичних	усього
6.	Граф дерево	1	3	4
7.	Арифметика залишків	2	4	6
8.	Розміщення, перестановки, сполучення	1	3	4
9.	Принцип Діріхле	1	3	4
10.	Математична індукція	1	3	4
11.	Інваріанти	1	3	4
12.	Орієнтовані графи	1	3	4
13.	Найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне	1	3	4
14.	Відповідність	1	3	4
15.	Рівняння в цілих числах: розкладання на множники	1	3	4
16.	Принцип крайнього	1	3	4
17.	Симетрія в іграх	1	3	4
18.	Підрахунок двома способами	1	3	4
19.	Розфарбовування діагональне	1	3	4
20.	Позиційні системи числення	1	3	4
21.	Формула включень-виключень	1	3	4
22.	Приклад + оцінка	1	3	4
23.	Зациклювання	1	3	4
24.	Нерівності з посередниками	1	3	4
25.	Кулі й перегородки	1	3	4
26.	Рівняння в цілих числах: використання залишків	1	3	4
27.	Зв'язність графів	1	3	4
28.	Кількість інформації	1	3	4
29.	Розфарбовування матрацне та інші види розфарбовування	1	3	4
30.	Ігри. Виграшні позиції	1	3	4
31.	Мала теорема Ферма	1	3	4
32.	Формула Ойлера	1	3	4

№ з/п	Тема	Кількість годин		
		теоретичних	практичних	усього
33.	Дискретна неперервність	1	5	6
34.	Трикутник Паскаля та біноміальні коефіцієнти	1	3	4
35.	Обхід графів. Ойлерові графи	1	3	4
36.	Підсумок	—	2	2
Разом		37	107	144

ЗМІСТ ПРОГРАМИ

1. Вступ (2 год)

Теоретична частина. План, завдання роботи на рік. Організаційні питання.

Правила поведінки під час теоретичних і практичних занять у закладі.

2. Степінь вершини (4 год)

Теоретична частина. Граф. Степінь вершини графа. Ізоморфні (однакові) графи. Лема про рукостискання.

Практична частина. Розв'язування задач за допомогою графів.

3. Основна теорема арифметики (4 год)

Теоретична частина. Подільність цілих чисел. Основна теорема арифметики.

Практична частина. Розв'язування задач на основну теорему арифметики.

4. Правило добутку (4 год)

Теоретична частина. Комбінаторика. Сумісні й несумісні події. Застосування правил суми та добутку залежно від події.

Практична частина. Розв'язування задач. Аналіз виконаного завдання.

5. Десятковий запис числа. Подільність (4 год)

Теоретична частина. Десятковий запис числа. Розкладання десяткового запису числа на суму розрядних доданків. Ознаки подільності.

Практична частина. Розв'язування задач на дії з цифрами в десятковому записі числа.

6. Граф дерево (4 год)

Теоретична частина. Цикл і зв'язність графа. Дерево в теорії графів. Міст, висячі вершини, остовне дерево. Властивості та ознаки дерев як різновидів графів.

Практична частина. Розв'язування задач за допомогою графів.

7. Арифметика залишків (6 год)

Теоретична частина. Теорія конгруенцій, основні поняття і доведення. Властивості конгруенцій та їх застосування.

Практична частина. Розв'язування задач за допомогою конгруенцій.

8. Розміщення, перестановки, сполучення (4 год)

Теоретична частина. Розміщення, перестановки, сполучення.

Основні позначення. Формули для підрахунку розміщень, перестановок та сполучень.

Практична частина. Розв'язування задач на перестановки, сполучення, розміщення.

9. Принцип Діріхле (4 год)

Теоретична частина. Принцип Діріхле. Доведення принципу Діріхле.

Практична частина. Розв'язування задач із використанням принципу Діріхле.

10. Математична індукція (4 год)

Теоретична частина. Аксіома натуральних чисел. База математичної індукції та індукційний перехід. Часто вживані види індукційних переходів.

Практична частина. Розв'язування задач на математичну індукцію.

11. Інваріанти (4 год)

Теоретична частина. Інваріант. Інваріанти в математичних задачах.

Практична частина. Розв'язування задач на інваріанти.

12. Орієнтовані графи (4 год)

Теоретична частина. Орієнтований граф. Дуга, маршрут, шлях, простий шлях. Сильна зв'язність орієнтованого графа.

Практична частина. Розв'язування задач за допомогою орієнтованих графів.

13. Найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне (4 год)

Теоретична частина. Найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне. Теоретичні задачі з доведенням. Властивості найбільшого спільного дільника і найменшого спільного кратного.

Практична частина. Розв'язування задач на найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне.

14. Відповідність (4 год)

Теоретична частина. Бієкція. Встановлення взаємно-однозначної відповідності. Порівняння множини без підрахунку кількості елементів.

Практична частина. Розв'язування задач на відповідність.

15. Рівняння в цілих числах: розкладання на множники (4 год)

Теоретична частина. Формули розкладання виразів на множники: різниця степенів, сума непарних степенів, інше. Зведення рівняння до перебору дільників числа. Рівняння в цілих числах з використанням розкладання на множники.

Практична частина. Розв'язування рівнянь в цілих числах за допомогою розкладання на множники.

16. Принцип крайнього (4 год)

Теоретична частина. Принцип крайнього (пошук «вузьких місць» під час розв'язування задач). Додаткові властивості крайніх елементів. Приклади крайніх елементів у задачах.

Практична частина. Розв'язування задач із використанням принципу крайнього.

17. Симетрія в іграх (4 год)

Теоретична частина. Ідеї симетрії в іграх з двома гравцями. Геометричні симетрії: центральна симетрія, осьова. Приклади стратегій із застосуванням умовної симетрії.

Практична частина. Розв'язування задач на ідею симетрії.

18. Підрахунок двома способами (4 год)

Теоретична частина. Пошук величин двома способами. Способи представлення величини двома різними сумами.

Практична частина. Розв'язування задач на ідею підрахунку двома способами.

19. Розфарбовування діагональне (4 год)

Теоретична частина. Шахове й діагональне розфарбовування таблиць. Пошук інваріантів за допомогою розфарбовування. Задачі на діагональне розфарбовування.

Практична частина. Розв'язування задач на розфарбовування.

20. Позиційні системи числення (4 год)

Теоретична частина. Розкладання на суму розрядних доданків у будь-якій позиційній системі числення для будь-якого натурального числа. Доведення єдиності такого розкладання. Переведення числа в різні системи числення.

Практична частина. Розв'язування задач з відображенням чисел у різних системах числення.

21. Формула включень-виключень (4 год)

Теоретична частина. Формула включень-виключень для двох, трьох і будь-якої іншої кількості множин. Доведення формули включень-виключень. Нерівності, що впливають із формули включень-виключень.

Практична частина. Розв'язування задач із використанням формули включень-виключень.

22. Приклад + оцінка (4 год)

Теоретична частина. Задачі на знаходження найбільшого чи найменшого значення деякої величини, пошук значення такої величини та побудова оцінки згори чи знизу. Задачі на приклад і оцінку.

Практична частина. Розв'язування задач на знаходження найменшого чи найбільшого значення деякої величини.

23. Зациклювання (4 год)

Теоретична частина. Зациклювання систем, що мають скінченну кількість станів і наступний стан визначається однозначно. Зворотний хід, відсутність передперіоду у системах, де попередній хід визначається однозначно.

Практична частина. Розв'язування задач з використанням ідеї зациклювання станів.

24. Нерівності з посередниками (4 год)

Теоретична частина. Строгі нерівності, їх доведення шляхом знаходження вдалих проміжних величин. Заміна степенів одного числа

на більш зручний степінь з іншим показником. Приклади нерівностей з посередниками.

Практична частина. Розв'язування нерівностей на побудову проміжних значень.

25. Кулі й перегородки (4 год)

Теоретична частина. Комбінаторні задачі. Формули для комбінаторних задач. Приклади задач, що розв'язуються за допомогою наведених формул.

Практична частина. Розв'язування задач із розподілом куль у ящиках.

26. Рівняння в цілих числах: використання залишків (4 год)

Теоретична частина. Рівняння в цілих числах за модулем деякого числа, перебір можливих остач. Пошук модуля. Можливі залишки квадрата числа, куба тощо.

Практична частина. Розв'язування рівнянь у цілих числах за допомогою підрахунку залишків за модулем деякого числа.

27. Зв'язність графів (4 год)

Теоретична частина. Зв'язність графа, граф дерево. Компонента зв'язності. Задачі на розбиття на компоненти зв'язності.

Практична частина. Розв'язування задач за допомогою ідеї розбиття на компоненти зв'язності.

28. Кількість інформації (4 год)

Теоретична частина. Кількість інформації. Оцінювання шуканої величини за допомогою кількості інформації. Задачі з використанням ідей щодо підрахунку кількості інформації.

Практична частина. Розв'язування задач з використанням ідеї підрахунку кількості інформації.

29. Розфарбовування матраце та інші види розфарбовування (4 год)

Теоретична частина. Визначення матрацного розфарбовування таблиць. Пошук інваріантів за допомогою матрацного та інших видів розфарбовування. Приклади розв'язування задач шляхом матрацного розфарбовування.

Практична частина. Розв'язування задач на розфарбовування.

30. Ігри. Виграшні позиції (4 год)

Теоретична частина. Алгоритм розфарбовування позицій гри на виграшні й програшні. Можливість такого розфарбування для будь-якої

скінченної гри. Задачі на розфарбовування позицій гри на виграшні й програшні.

Практична частина. Розв'язування задач за допомогою розфарбування на виграшні й програшні позиції.

31. Мала теорема Ферма (4 год)

Теоретична частина. Формулювання малої теореми Ферма. Доведення допоміжних лем. Доведення малої теореми Ферма.

Практична частина. Розв'язування задач за допомогою малої теореми Ферма.

32. Формула Ойлера (4 год)

Теоретична частина. Планарні й пласкі графи. Формула Ойлера для пласких графів і багатогранників, її доведення.

Практична частина. Розв'язування задач за допомогою формули Ойлера для пласких графів і багатогранників.

33. Дискретна неперервність (6 год)

Теоретична частина. Дискретна неперервність. Функція, визначена на скінченній множині точок прямої, що змінюється не більше ніж на деяку фіксовану величину для сусідніх точок.

Практична частина. Розв'язування задач за допомогою ідеї дискретної неперервності.

34. Трикутник Паскаля та біноміальні коефіцієнти (4 год)

Теоретична частина. Визначення і властивості трикутника Паскаля. Біноміальні коефіцієнти, визначення через трикутник Паскаля, комбінаторні формули, біном Ньютона.

Практична частина. Розв'язування задач на біноміальні коефіцієнти.

35. Обхід графів. Ойлерові графи (4 год)

Теоретична частина. Ойлерові цикл і шлях. Необхідна і достатня умова для утворення графа Ойлера. Задачі на обхід графів.

Практична частина. Розв'язування задач на обхід графів.

36. Підсумок (2 год)

Практична частина. Обговорення результатів роботи. Визначення перспектив.

ПРОГНОЗОВАНІ РЕЗУЛЬТАТИ

У вихованців мають сформуватися такі компетентності:

- *процедурна*: розв'язування типових математичних задач; використання на практиці алгоритму розв'язання типових задач; систематизування типових задач; знаходження критеріїв зведення задач до типових; розпізнавання типової задачі або зведення її до типової;
- *логічна*: застосування дедуктивного методу доведення та спрощування тверджень, володіння і використання на практиці поняттєвого апарату дедуктивних теорій: поняття, визначення понять, висловлювання, аксіоми, теореми та їх доведення, приклади до теорем тощо; відтворення дедуктивного доведення теореми та доведення правильності процедур розв'язань типових задач; здійснення дедуктивного обґрунтування правильності розв'язання задач і пошук логічних помилок у неправильних дедуктивних міркуваннях; використання математичної й логічної символіки на практиці;
- *дослідницька*: використання математичних методів; формулювання математичних задач; побудова аналітичних моделей задач; висування та перевірка справедливості гіпотез; інтерпретування результатів, отриманих формальними методами; пошук аналогій в інших розділах математики;
- *творча*: застосування уяви, фантазії та генерування творчих ідей для розв'язання задач.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Апостолова Г. В., Бакал О. П. Логічними стежинками математики. 5–9 класи. Київ : Генеза, 2016. 304 с.
2. Байсалов Дж. У., Мекуш О. Г., Соліч К. В., Федунік-Яремчук О. В. Методи розв'язування олімпіадних задач : навч. посіб. Луцьк : Східноєвроп. нац. ун-т імені Лесі Українки, 2018. 202 с.
3. Ізюмченко Л. В., Нічишина В. В., Ріжняк Р. Я. Цілі та комплексні числа : метод. посіб. для виконання контрольних робіт учнями 10–11 класів. Серія : Навчальні матеріали для учнів заочної фізико-математичної школи. Кіровоград : РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2009. 112 с.
4. Мартинюк О. М., Попіна С. Ю. Елементи комбінаторики й класичне означення ймовірності. Тернопіль, 2003. 40 с.
5. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Харків : Гімназія, 2017. 416 с.

6. Andreescu T., Feng Z. 102 Combinatorial Problems. New York : Springer Science and Business Media, 2003. 148 p.
7. Bornshtein P. Cours – Theorie des graphes. URL: <https://igor-kortchemski.perso.math.cnrs.fr/olympiades/Cours/Graphes/graphes.pdf> (дата звернення: 14.04.2024).
8. Kedlaya K. S., Poonen B., Vakil R. The William Lowell Putnam Mathematical Competition 1985–2000: Problems, Solutions, and Commentary. *American Mathematical Soc.* 2020. Vol. 33. 351 p.
9. Levin O. Discrete Mathematics: an open introduction. 3rd edition. School of Mathematical Science, University of Northern Colorado, 2021. 414 p.
10. Teoría de números: para principiantes / R. Luis, B. Jiménez et al. Universidad Nacional de Colombia, Fac. de Ciencias, 2004. 294 p.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бородін О. І. Теорія чисел. Київ : Вища школа, 1970. 274 с.
2. Вороний О. М. Кіровоградські математичні олімпіади школярів 2000–2008 рр. : метод. посіб. Кіровоград : ПБВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2008. 212 с.
3. Збірник конкурсних та олімпіадних задач з математики / за ред. О. К. Закусило. Київ : Діалектика, 1995. 192 с.
4. Лейфура В. М., Мітельман І. М., Радченко В. М., Ясінський В. А. Математичні олімпіади школярів України: 1991–2000 рр. : навч. метод. посіб. Київ : Техніка, 2003. 542 с.
5. Лейфура В. М., Мітельман І. М., Радченко В. М., Ясінський В. А. Математичні олімпіади школярів України: 2001–2006 рр. Львів : Каменяр, 2008. 348 с.
6. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Математика. Алгебра і початки аналізу та геометрія (рівень стандарту) : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків : Гімназія, 2019. 208 с.
7. Ніколаєва К. В., Койбічук В. В. Дискретний аналіз. Графи та їх застосування в економіці : навч.-метод. посіб. Суми : УАБС НБУ, 2007. 84 с.
8. Сарана О. А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч : навч. посіб. Тернопіль : Богдан, 2011. 400 с.
9. Українські математичні олімпіади : довідник / В. А. Вишенський, О. Г. Ганюшкін, М. В. Карташов та ін. Київ : Вища школа, 1993. 415 с.
10. У світі математики : українське науково-популярне видання з математики / Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка. Київ : Київський університет, 1995.

11. Федак І. В. Готуємося до олімпіади з математики. Кам'янець-Подільський : Абетка, 2006. Ч. І. 111 с.
12. Федак І. В. Івано-Франківські обласні олімпіади з математики 2011–2015 рр. Івано-Франківськ : Голіней, 2015. 64 с.
13. Федак І. В. Методи розв'язування олімпіадних завдань з математики (і не тільки їх). Чернівці : Зелена Буковина, 2002. 340 с.
14. Ядренко М. Й. Принцип Діріхле. Київ : Вища школа, 1986. 48 с.

К. О. Антошина

НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА «ДИСКРЕТНІ МАТЕМАТИЧНІ СТРУКТУРИ»

ВИЩИЙ РІВЕНЬ

*Рекомендовано для використання в освітньому процесі
рішенням науково-методичної ради Національного центру
«Мала академія наук України»
(протокол № 4 від 30.09.2024 року)*

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Математика є не лише необхідною складовою частиною будь-якої науки, а й важливим інструментом для розвитку аналітичного мислення, дослідження життєвих ситуацій і прийняття обґрунтованих рішень. Знижене зацікавлення молоді математикою спонукає до створення навчальної програми, яка сприяла б відновленню інтересу до цієї науки, пропонує застосування цікавих і доступних методик, що підкріплюють значення математики для формування критичного мислення та розв'язання життєвих задач.

Новизною програми є впровадження широкого спектра тем з вищої математики в позакласну діяльність і занурення вихованців у цікавий і глибокий науково-дослідницький пласт цієї науки.

Навчальна програма «Дискретні математичні структури» спрямована на поглиблення знань вихованців у галузі математики, розвиток аналітичного мислення та вміння застосовувати математичні методи для розв'язання задач, а також стимулювання дослідницької діяльності й творчого підходу до навчання. Елементарні й базові поняття математики та логіки є невіддільною частиною підготовки обдарованої молоді до науково-дослідницької діяльності у галузі точних наук. Дискретні математичні структури — це саме ті моделі, які виникають у реальному світі, й розуміння цих абстрактних концепцій дає вихованцям більш повне уявлення про закони математики, логіки, багато інших явищ, що нас оточують, та важливі для прийняття кращих рішень.

Метою програми є формування у вихованців математичної грамотності та дослідницьких компетентностей у процесі вивчення дискретних математичних структур і проведення на їх основі досліджень.

Основні завдання полягають у формуванні таких компетентностей:

- *пізнавальної*: формувати науковий світогляд; пізнавати об'єктивну дійсність для накопичення досвіду розв'язання завдань науково-дослідницької діяльності;
- *практичної*: розвивати уміння і навички застосування математичних знань, логічного, абстрактного, аналітичного, критичного мислення для генерування ідей, створення математичних моделей, доведення тверджень, використання математичних методів для розв'язання задач і проведення досліджень;
- *творчої*: використовувати творчий підхід для здійснення дослідницької діяльності; застосовувати креативне мислення під час розв'язання практичних задач;
- *соціальної*: формувати навички комунікації під час обговорень, дискусій, рефлексій і виконання практичних завдань; розвивати необхідні для життя в сучасному суспільстві навички соціальної активності.

Пропонована програма призначена для вихованців, що виявили зацікавленість і продемонстрували здібності до математики. Програма складається із шести розділів: п'ять з них охоплюють різні аспекти дискретної математики та алгебри, а шостий присвячений дослідницькій роботі вихованців. Зміст програми спрямовано на розширення поглядів вихованців на математику загалом і математичні моделі зокрема. Успішне опанування матеріалу цієї програми допоможе вихованцям розв'язувати як олімпіадні задачі з математики, так і задачі, які потребують розв'язку в повсякденному житті.

Перший розділ дасть більш повне уявлення про закони логіки, яким підпорядковуються усі явища в нашому світі. Другий розділ допоможе вихованцям зрозуміти математичні закономірності у симетриях фігур і скінченних наборах об'єктів. Третій розділ сприятиме опануванню різних способів порівняння об'єктів, а також усвідомленню відношень еквівалентності, що відкріє розуміння логіки тих чи інших упорядкувань об'єктів і ототожнення в реальному житті. Четвертий розділ ознайомить вихованців із математичними схемами, що лежать в основі покрокових ігор, маршрутизації та оптимізації. П'ятий розділ присвячений основним типам математичних доведень та їх застосуванню у різних задачах. Шостий розділ спрямований на дослідницьку діяльність, під час якої вихованці набудуть базових навичок проведення досліджень у галузі дискретної математики. Кожний розділ запропонованої програми допоможе вихованцям опанувати навички математичної грамотності, коректного формулювання задач і креативності у процесі їх розв'язання.

Програма підготовлена з урахуванням рівня сучасних досягнень науки й техніки. Вона передбачає, що вихованці мають достатній рівень знань

з математики шкільного курсу, тому сприятиме розширенню і поглибленню цих знань.

Навчальна програма призначена для роботи з вихованцями віком 14–17 років. На опрацювання навчального матеріалу надається 216 год на рік (6 год на тиждень). Рівень навчання — вищий, допустимими формами є очна, дистанційна, змішана.

Програма передбачає організацію освітнього процесу через інтеграцію теоретичних і практичних занять, спрямованих на формування глибоких математичних знань і дослідницьких компетентностей.

Теоретичні заняття охоплюють лекції, дискусії, інтерактивні форми навчання. Практичні заняття реалізуються у виді практикумів, що спрямовані на розв'язання задач і виконання самостійних завдань для закріплення знань.

З метою утвердження української національної та громадянської ідентичності програма інтегрує теми, що висвітлюють досягнення українців в математиці та розвиток математики в контексті національної історії та культури. Це сприяє не лише поглибленню математичних знань, а й розвитку патріотизму у вихованців.

Міжпредметні зв'язки реалізуються під час вивчення тем, що мають практичне застосування в інших науках, таких як фізика, комп'ютерні науки та інженерія.

Для оцінювання результатів освітньої діяльності передбачено різні форми контролю, зокрема: розв'язування задач, тестування; оформлення та представлення науково-дослідницької роботи (проєкту). Для контролювання знань використовуються сучасні інтерактивні ресурси — «Kahoot!», «Mentimeter», «Quizizz», «Quizwhizzer». Результат роботи над проєктами вихованці представляють у формі комп'ютерних мультимедійних презентацій — мультимедійних проєктів з використанням програми з пакета «Microsoft Office» — «Power Point» або «Canva», що дає змогу одночасно використовувати різні способи подання інформації. У процесі навчання передбачається використання технічних засобів (комп'ютера, мультимедійного проєктора) та програмного забезпечення для проведення інтерактивних конференцій («Zoom», «Google Meet» тощо).

За запропованою навчальною програмою можна проводити індивідуальні заняття відповідно до Положення про порядок організації індивідуальної та групової роботи в позашкільних навчальних закладах, затвердженого наказом Міністерства освіти і науки України від 11.03.2004 № 651 (зі змінами, внесеними наказом Міністерства освіти і науки України від 10.12.2008 № 1123).

Вищий рівень НАВЧАЛЬНО-ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН

Розділ, тема	Кількість годин		
	теоретичних	практичних	усього
Вступ	1	2	3
Розділ 1. Алгебра логіки	9	15	24
1.1. Елементи теорії множин	3	3	6
1.2. Числення висловлювань	3	6	9
1.3. Числення предикатів	3	6	9
Розділ 2. Теорія груп перестановок	13	17	30
2.1. Множини. Функції	1	2	3
2.2. Властивості й типи функцій, декартів добуток і перестановки	3	3	6
2.3. Бінарні операції. Групи	3	3	6
2.4. Властивості перестановок. Порядок елемента в групі	3	6	9
2.5. Транспозиція. Твірні симетричної групи	3	3	6
Розділ 3. Бінарні відношення	10	20	30
3.1. Бінарні відношення: поняття, типи, властивості	1	2	3
3.2. Операції з відношеннями	1	2	3
3.3. Відношення еквівалентності. Фактор-множина	2	4	6
3.4. Порядки	2	4	6
3.5. Граничні елементи	2	4	6
3.6. Решітки	2	4	6
Розділ 4. Орієнтовані графи	10	20	30
4.1. Основні поняття	1	2	3
4.2. Зв'язність і відстань в орграфах. Матриця відстаней	2	4	6
4.3. Функціональні орграфи	1	2	3
4.4. Ядра орграфів. Ациклічні орграфи	2	4	6
4.5. Ойлерові й гамільтонові орграфи	2	4	6
4.6. Турніри та королі: гамільтонові ланцюги й теорема про наявність короля	2	4	6

Розділ, тема	Кількість годин		
	теоретичних	практичних	усього
Розділ 5. Математичні доведення	6	12	18
5.1. Біективні доведення і математична індукція	2	4	6
5.2. Метод від супротивного та контрапозиція. Доведення критеріїв	2	4	6
5.3. Принцип Діріхле. Основи доведення оцінок. Контрприклад	2	4	6
Розділ 6. Основи науково-дослідницької діяльності в дискретній математиці	28	50	78
6.1. Етапи науково-дослідницької діяльності	9	9	18
6.2. Проведення дослідження	6	18	24
6.3. Написання й оформлення дослідницької роботи	9	18	27
6.4. Представлення і захист дослідницької роботи	4	5	9
Підсумок	—	3	3
Разом	77	139	216

ЗМІСТ ПРОГРАМИ

Вступ (3 год)

Теоретична частина. Мета і завдання гуртка. Зміст і форми роботи. Історія розвитку математики в Україні. Внесок українських учених і досягнення національної математичної школи. Нестандартні задачі.

Практична частина. Обговорення очікувань вихованців від занять, визначення їх рівня знань та інтересів у математиці. Розв'язування нестандартних математичних задач.

Розділ 1. Алгебра логіки (24 год)

1.1. Елементи теорії множин (6 год)

Теоретична частина. Множини. Операції з множинами. Діаграми Ойлера – Венна. Властивості операцій з множинами. Правила де Морґана. Формула включень-виключень.

Практична частина. Коректний запис множин. Застосування операцій з множинами, використання властивостей таких операцій і правила

де Моргана для спрощення виразів. Зображення діаграм Ойлера — Венна. Розв'язування рівнянь і систем рівнянь з множинами.

1.2. Числення висловлювань (9 год)

Теоретична частина. Висловлювання й логічні операції. Властивості операцій. Логічні формули. Інтерпретація. Таблиці істинності. Логічні висновки. Контрапозиція. Метод від супротивного.

Практична частина. Складання складних висловлювань. Математичний запис логічних формул, інтерпретація формул, складання таблиць істинності. Спрощення формул за допомогою властивостей логічних операцій, виведення логічних висновків. Математичний запис методів від супротивного та контрапозиції.

1.3. Числення предикатів (9 год)

Теоретична частина. Предикат, множина істинності. Необхідні й достатні умови. Квантори загальності й існування. Правила побудови заперечень до формул із кванторами.

Практична частина. Визначення множини істинності предикатів різної арності. Складання формул із предикатами, зв'язування змінних за допомогою кванторів. Побудова заперечень до формул із кванторами. Розв'язування словесних логічних задач. Тестування.

Розділ 2. Теорія груп перестановок (30 год)

2.1. Множини. Функції (3 год)

Теоретична частина. Множини, функції. Способи задавання функції між скінченними множинами. Образ, прообраз підмножини. Операції з множинами. Властивості образу і прообразу.

Практична частина. Доведення властивостей образу і прообразу. Розв'язування задач на коректність заданої функції, граф функції зі скінченної множини в себе.

2.2. Властивості й типи функцій, декартів добуток і перестановки (6 год)

Теоретична частина. Декартів добуток двох скінченних множин. Типи функцій: ін'єкція, сюр'єкція, бієкція. Тотожна функція. Композиція функцій. Обернена функція, критерій її існування. Перестановка. Граф перестановки.

Практична частина. Визначення типу функції, складання композиції двох функцій, пошук оберненої функції. Операції з перестановками, зображення їх графами. Розв'язування прикладних задач.

2.3. Бінарні операції. Групи (6 год)

Теоретична частина. Бінарні операції. Нейтральний елемент. Обернений елемент. Напівгрупа. Група. Рівняння в групах.

Практична частина. Визначення властивостей тих чи інших бінарних операцій. Пошук нейтрального елемента й обернених елементів відносно операції. Ідентифікація напівгрупової та групової структур на множині з бінарною операцією, розв'язування рівнянь у групах.

2.4. Властивості перестановок. Порядок елемента в групі (9 год)

Теоретична частина. Орбіта елемента множини під дією перестановки. Розширення перестановки. Порядок елемента в групі. Порядок перестановки.

Практична частина. Розв'язування задач на пошук орбіт елементів множини. Розширення перестановок. Розкладання перестановки на добуток незалежних циклів, обчислення порядку перестановок. Розв'язування олімпіадних задач.

2.5. Транспозиція. Твірні симетричної групи (6 год)

Теоретична частина. Транспозиція. Парність перестановки. Гра в 15. Твірні симетричної групи. Групи симетрій. Математика кубика Рубіка.

Практична частина. Визначення парності перестановок. Розв'язування різних початкових позицій гри в 15. Знаходження систем твірних симетричних груп, групи симетрій плоских фігур. Тестування.

Розділ 3. Бінарні відношення (30 год)

3.1. Бінарні відношення: поняття, типи, властивості (3 год)

Теоретична частина. Декартів добуток. Бінарні й узагальнені n -арні відношення. Три прості класи бінарних відношень на множині. Зображення бінарного відношення таблицею та орієнтованим графом. Властивості відношень: рефлексивність і антирефлексивність, транзитивність, а-/антисиметричність.

Практична частина. Практика зображень бінарних відношень. Побудова рефлексивного, симетричного, транзитивного замикань бінарного відношення. Розв'язування теоретичних і прикладних задач.

3.2. Операції з відношеннями (3 год)

Теоретична частина. Рефлексивна і симетрична частини бінарного відношення, доповнення, обернене відношення, від'ємна транзитивність. Характеризації рефлексивних, симетричних, антисиметричних відношень через доповнення. Об'єднання і перетин бінарних відношень. Композиція, її властивості, обернене відношення до композиції.

Практична частина. Знаходження рефлексивної та симетричної частини бінарного відношення. Знаходження доповнення, оберненого відношення, перетину, об'єднання чи композиції бінарних відношень. Доведення нескладних комбінованих властивостей. Побудова аналогій у реальному світі.

3.3. Відношення еквівалентності. Фактор-множина (6 год)

Теоретична частина. Критерії властивостей бінарних відношень. Відношення еквівалентності. Класи еквівалентності й фактор-множина. Розбиття множини. Конструктивна побудова функції за заданим розбиттям.

Практична частина. Визначення бінарного відношення на предмет його належності до відношень еквівалентності. Знаходження класів еквівалентності за заданим відношенням. Побудова функції за заданим розбиттям. Побудова фактор-множин на об'єктах реального світу.

3.4. Порядки (6 год)

Теоретична частина. Відношення еквівалентності. Означення часткового порядку, частково впорядкована множина (ЧВМ). Зображення ЧВМ орієнтованим графом і діаграмою Гассе. Строгий частковий порядок, його зв'язок із частковим порядком. Лінійний порядок. Розширення часткового порядку.

Практична частина. Класифікація порядків. Зображення частково впорядкованих множин. Побудова розширення часткового порядку. Розв'язування прикладних задач на порядки та розширення.

3.5. Граничні елементи (6 год)

Теоретична частина. Верхній і нижній конуси, їх властивості. Теорема про розширення в термінах конусів. Відрізок у ЧВМ. Верхні й нижні грані підмножини у ЧВМ. Супремум та інфімум, найбільший, найменший, максимальний і мінімальний елементи підмножини ЧВМ.

Практична частина. Знаходження нижніх, верхніх конусів, відрізків у ЧВМ, множин верхніх і нижніх граней, розрізнення різних типів граничних елементів у ЧВМ. Пошук аналогій у реальному світі. Розв'язування задач.

3.6. Решітки (6 год)

Теоретична частина. Точні верхні й нижні грані. Решітки, алгебраїчні властивості решіток. Супремум та інфімум як бінарні операції. Ланцюг і антиланцюг. Параметри ЧВМ: висота і ширина.

Практична частина. Визначення, чи є ЧВМ решіткою. Знаходження супремумів та інфімумів, ланцюга й антиланцюга, параметрів ЧВМ. Розв'язування задач. Тестування.

Розділ 4. Орієнтовані графи (30 год)

4.1. Основні поняття (3 год)

Теоретична частина. Загальні визначення: орієнтований граф, вершини, дуги. Елементи теорії бінарних відношень. Матриця суміжності орграфа. Степені входу і виходу, стік, джерело. Лема про рукостискання.

Практична частина. Побудова матриці суміжності орграфа, визначення степенів його вершин. Розв'язування задач на лему про рукостискання.

4.2. Зв'язність і відстань в орграфах. Матриця відстаней (6 год)

Теоретична частина. Шляхи в орграфі. Типи зв'язності орграфів (слабка, одностороння, сильна), їх характеристики. Характеризації. Компоненти зв'язності. Конденсація орієнтованого графа. Відстань між вершинами. Матриця інцидентності. Матриця відстаней.

Практична частина. Визначення типу зв'язності орграфа. Побудова конденсації й ілюстрування прикладного значення цієї конструкції. Складання матриць відстаней та інцидентності. Розв'язування задач.

4.3. Функціональні орграфи (3 год)

Теоретична частина. Функції на скінченній множині. Функціональні орграфи та їх властивості. Бієкції.

Практична частина. Зображення функціональних орграфів. Розв'язування задач.

4.4. Ядра орграфів. Ациклічні орграфи (6 год)

Теоретична частина. Ядра орграфів. Незалежна і поглинальна множини. Теоретичні результати в контексті домінування й застосування в іграх. Цикл в орграфі. Критерій ациклічності орграфа через конденсацію. Наявність джерел і стоків в ациклічних орграфах. Двоїстий орграф, принцип двоїстості. Матриці суміжності ациклічних орграфів.

Практична частина. Знаходження ядра в орграфі. Зображення покровових ігор орграфом і побудова виграшної стратегії. Перевірка орграфів на ациклічність. Застосування принципу двоїстості. Зведення матриці суміжності ациклічного орграфа до верхньотрикутного вигляду. Розв'язування задач.

4.5. Ойлерові й гамільтонові орграфи (6 год)

Теоретична частина. Ойлерів граф, історія виникнення теорії графів. Теорема Ойлера. Орієнтовані ойлерові графи, модифікація теореми Ойлера. Алгоритм знаходження ойлерового обходу. Гамільтоновість. Теореми Дірака та Оре, достатні умови гамільтоновості орграфів.

Практична частина. Перевірка орграфа на ойлеровість. Знаходження ойлерового обходу за алгоритмом. Використання достатніх умов для визначення гамільтоновості орграфа. Розв'язування задач.

4.6. Турніри та королі: гамільтонові ланцюги й теорема про наявність короля (6 год)

Теоретична частина. Турніри: визначення й особливості. Існування гамільтонового ланцюга в турнірі. Королі в орграфі. Теорема про наявність короля в турнірі.

Практична частина. Знаходження гамільтонових ланцюгів і королів у турнірах. Розв'язування задач, що походять з біології. Тестування.

Розділ 5. Математичні доведення (18 год)

5.1. Бієктивні доведення і математична індукція (6 год)

Теоретична частина. Бієкції в математичних доведеннях: поняття і приклади. Теоретичне підґрунтя принципу математичної індукції. Загальна структура тверджень, що доводяться методом математичної індукції. Сильна і слабка індукції.

Практична частина. Практика бієктивних доведень. Доведення методом математичної індукції.

5.2. Метод від супротивного і контрапозиція. Доведення критеріїв (6 год)

Теоретична частина. Логічна коректність методів доведення від супротивного і контрапозиції: особливості й відмінності між цими методами. Необхідність і достатність умов у математичних твердженнях. Методи доведення необхідних і достатніх умов у математиці.

Практична частина. Розгляд типових задач на доведення методами від супротивного і контрапозиції. Логіка побудови зворотного твердження. Аналіз структури теорем і доведень логічного слідування. Розгляд соціальних маніпуляцій через хибні висновки. Виконання завдань на доведення критеріїв.

5.3. Принцип Діріхле. Основи доведення оцінок. Контрприклад (6 год)

Теоретична частина. Історія, приклади й застосування принципу Діріхле. Узагальнений принцип Діріхле. Верхні й нижні оцінки на параметри математичних об'єктів. Основні принципи доведення оцінок. Узагальнені твердження, схема побудови контрприкладів.

Практична частина. Виконання завдань на доведення, що використовують принцип Діріхле. Ознайомлення з різноманітними математичними параметрами, опис основних концепцій і властивостей, що дають можливість підібрати адекватну оцінку, практика доведення оцінок.

Перевірка узагальненого твердження на правдивість, методи добирання та побудови контрприкладів. Створення логічної схеми твердження та його заперечення. Тестування.

Розділ 6. Основи науково-дослідницької діяльності в дискретній математиці (78 год)

6.1. Етапи науково-дослідницької діяльності (60 год)

Теоретична частина. Основні поняття дослідницької діяльності: «дослідницька діяльність», «дослідна діяльність», «пошукова діяльність». Основи й сутність науково-дослідницької діяльності. Наукові дослідження українських учених із дискретної математики.

Етапи підготовки науково-дослідницької роботи (проєкту). Концепція дослідження: мета, об'єкт, предмет, завдання, актуальність і новизна.

Методи наукових досліджень у дискретній математиці: аналітичні, емпіричні, моделювання. Гіпотеза дослідження.

Джерела наукової інформації: літературні, електронні (онлайн-бази даних, наукові журнали, ресурси з відкритим доступом). Критичний аналіз наукової літератури й інформації.

Академічна доброчесність: значення, принципи, уникнення плагіату. Академічне читання.

Практична частина. Ознайомлення з науковими роботами українських учених у сфері дискретної математики. Обрання проблеми, пов'язаної з дискретною математикою, для дослідження. Розроблення індивідуального плану дослідження. Визначення мети й завдань, методів дослідження. Опрацювання джерел наукової інформації: пошук і критичний аналіз. Висування гіпотези, її перевірка, формулювання попередніх висновків, порівняння їх з висунутою гіпотезою.

6.2. Проведення дослідження (24 год)

Теоретична частина. Сучасні методи й інструменти дослідження в дискретній математиці. Методи оброблення даних у межах обраної теми дослідження. Систематизація матеріалів дослідження та науковий звіт.

Практична частина. Підготовка й проведення дослідження за індивідуальними планами гуртківців і завданнями керівника: опис етапів, формулювання висновків і порівняння їх з гіпотезою. Складання плану наукової роботи й обрання методів дослідження. Збирання, опрацювання й аналіз даних у процесі дослідження. Аналіз обраної проблеми в контексті наукової літератури й практичних досліджень. Систематизація наукової інформації та результатів дослідження у графіках, таблицях, схемах.

6.3. Написання й оформлення дослідницької роботи (27 год)

Теоретична частина. Принципи академічної доброчесності під час написання роботи: академічне письмо. Основні вимоги до оформлення дослідницької роботи. Ознайомлення зі структурою наукової роботи. Вступ і висновки: правила написання.

Специфіка оформлення списку використаних джерел. Додатки: зміст, особливості оформлення. Методи викладення матеріалу. Структурування і представлення ідеї дослідження. Правила оформлення списку використаних джерел.

Практична частина. Написання й оформлення основної частини дослідницької роботи. Оформлення вступу, висновків, додатків і посилань на наукову літературу. Формування списку використаних джерел. Укладання додатків до дослідницької роботи.

6.4. Представлення і захист дослідницької роботи (9 год)

Теоретична частина. Вимоги до публічного виступу, структура доповіді. Постер: вимоги до оформлення, структурні елементи. Комп'ютерні програми для створення постерів і візуалізації даних.

Роль мультимедійної презентації для представлення дослідження. Підготовка до публічного виступу. Поради промовцеві щодо виступу та спілкування з аудиторією. Захист результатів дослідження.

Практична частина. Підготовка до захисту науково-дослідницької роботи (проєкту): складання доповіді, використання інструментів («Canva», «PowerPoint») для створення постера і презентації. Структурування інформації та візуалізація даних на постері. Представлення результатів дослідження під час захисту. Аналіз питань, що постають під час дискусії, аргументоване обстоювання своїх наукових ідей.

Підсумок (3 год)

Практична частина. Обговорення результатів проведеної роботи й визначення подальших планів щодо розвитку обраної теми дослідження. Зіставлення очікувань, озвучених на початку роботи у гуртку, з отриманим результатом діяльності.

ПРОГНОЗОВАНІ РЕЗУЛЬТАТИ

У вихованців мають сформуватися такі компетентності:

- *пізнавальна:* формування наукового світогляду; поглиблення знань з математики та усвідомлення їх значення для інших наук і повсякденного життя;

- *практична*: розвиток умінь і навичок застосування математичних знань, логічного, абстрактного, аналітичного, критичного мислення для генерування ідей, створення математичних моделей, доведення тверджень, використання математичних методів для розв'язання задач і проведення досліджень;
- *творча*: застосування творчого підходу для здійснення дослідницької діяльності, використання креативного мислення під час розв'язування практичних задач;
- *соціальна*: формування навичок комунікування з однолітками для досягнення визначеної мети під час обговорень, дискусій, рефлексій і виконання практичних завдань; розвиток навичок соціальної активності, необхідних для життя в сучасному суспільстві.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Боднарчук Ю. В., Олійник Б. В. Основи дискретної математики : навч. посіб. Київ : ВД «Кієво-Могилянська академія», 2009. 140 с.
2. Тилищак О. А. Елементи теорії груп. Ужгород : Говерла, 2009. 40 с.
3. Трохимчук Р. М. Збірник задач з теорії множин і відношень : навч. посіб. Київ : ВПЦ «Київський університет», 2000. 80 с.
4. Халецька З. П., Нарадовий В. В. Математична логіка та теорія алгоритмів : навч. посіб. Кропивницький : РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2017. 128 с.
5. Archer A. F. A Modern Treatment of the 15 Puzzle. *The American Mathematical Monthly*. 1999. Vol. 106. No. 9. P. 793–799.
6. Dixon J. D., Mortimer B. The Action of a Permutation Group. *Permutation Groups. Graduate Texts in Mathematics*. 1996. Vol. 163. New York : Springer-Verlag, 348 p.
7. Garnier R., Taylor J. 100% Mathematical Proof. Wiley, 1996. 334 p.
8. Harary F., Norman R. Z., Cartwright D. Structural Models: an Introduction to the Theory of Directed Graphs. Wiley, 1965. 415 p.
9. Humphreys J. F. A course in group theory. Oxford University Press, 1996. 292 p.
10. Morash R. P. Bridge to abstract mathematics: Mathematical proof and structures. Random House, 1987. 389 p.
11. Richmond B., Richmond T. A Discrete Transition to Advanced Mathematics. American Mathematical Society, 2009. 424 p.
12. West D. B. Introduction to Graph Theory. Pearson Education, 2002. 589 p.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ, РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЛЯ ВИХОВАНЦІВ

1. Гаврилків В. Елементи теорії груп та теорії кілець. Івано-Франківськ : Голіней, 2018. 148 с.
2. Bickle A. Fundamentals of Graph Theory. American Mathematical Society, 2020. 336 p.
3. Krantz S. G. The Proof is in the Pudding: the Changing Nature of Mathematical Proof. Springer, 2011. 281 p.
4. Sundstrom T. Mathematical Reasoning: Writing and Proof, Version 2.1. CreateSpace Independent Publishing Platform, 2014. 607 p.

ПОКЛИКАННЯ НА ПРОГРАМНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ

1. Canva. URL: https://www.canva.com/uk_ua/ (дата звернення: 10.09.2024).
2. Google Classroom. URL: <https://classroom.google.com/> (дата звернення: 10.09.2024).
3. Google Meet. URL: <https://meet.google.com/> (дата звернення: 10.09.2024).
4. Kahoot! URL: <https://kahoot.com/> (дата звернення: 10.09.2024).
5. Mentimeter. URL: <https://www.mentimeter.com/> (дата звернення: 10.09.2024).
6. Quizlet. URL: <https://quizlet.com/uk> (дата звернення: 10.09.2024).
7. Quizwhizzer. URL: <https://quizwhizzer.com/> (дата звернення: 10.09.2024).
8. ZOOM. URL: <https://zoom.us/> (дата звернення: 10.09.2024).

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

Азаренкова Альона Іванівна	керівниця гуртка Комунального закладу Сумської обласної ради – обласного центру позашкільної освіти та роботи з талановитою молоддю, заслужена вчителька України
Антошина Катерина Олегівна	методистка лабораторії математичних наук НЦ «МАНУ»
Довгий Станіслав Олексійович	президент НЦ «МАНУ», доктор фізико-математичних наук, академік НАН України
Майборода Ростислав Євгенович	професор кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, доктор фізико-математичних наук, професор
Терлецька Катерина Валеріївна	завідувачка лабораторії математичних наук НЦ «МАНУ», старша наукова співробітниця Інституту проблем математичних машин і систем НАН України, докторка фізико-математичних наук
Тимошкевич Тарас Дмитрович	методист лабораторії математичних наук НЦ «МАНУ», кандидат фізико-математичних наук

Навчальне видання

НАВЧАЛЬНІ ПРОГРАМИ З ПОЗАШКІЛЬНОЇ ОСВІТИ

Дослідницько-експериментальний напрям

Математика

Редагування: *О. О. Нечипоренко, Т. І. Рябокiнь, О. Б. Степанюк*
Верстання *Л. В. Северенчук*
Дизайн обкладинки *Б. Л. Лісовський*

Формат 60×84/16. Папір офс. 80 г/м².
Друк цифровий. Ум. друк. арк. 8,02.
Наклад 300 прим.

Видавництво: Національний центр «Мала академія наук України»,
Кловський узвіз, буд. 8, м. Київ, 01021

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 6999 від 04.12.2019

