

М.А.Н.

Завдання

IV етапу Всеукраїнських
учнівських олімпіад
з навчальних предметів

2024/2025 навчальний рік

МАТЕМАТИКА
ФІЗИКА
АСТРОНОМІЯ



Київ — 2025



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ЦЕНТР «МАЛА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ»

Завдання

IV етапу Всеукраїнських
учнівських олімпіад
з навчальних предметів
2024/2025 навчальний рік

МАТЕМАТИКА

ФІЗИКА

АСТРОНОМІЯ

Практикум

Київ
Національний центр
«Мала академія наук України»
2025

Автори:

О. А. Базей, канд. фіз.-мат. наук, доц.,
І. М. Гельфгат, канд. фіз.-мат. наук, *А. В. Грицай*, канд. фіз.-мат. наук,
О. О. Дашков, *І. М. Дмитрук*, д. фіз.-мат. наук, проф., *Д. В. Зазубик*,
І. О. Кошмак, канд. фіз.-мат. наук, *Ю. А. Кулініч*, канд. фіз.-мат. наук,
В. І. Марсакова, канд. фіз.-мат. наук, доц., *Г. А. Меланіч*,
Б.Я. Мелех, д. фіз.-мат. наук, с. н. с., *С. В. Мохун*, канд. тех. наук, доц.,
А. О. Олійник, д. філософ. в галузі фіз. та астроном.,
О. Ю. Орлянський, канд. фіз.-мат. наук, *О. О. Панько*, д. фіз.-мат. наук, проф.,
М. І. Пашко, *Ю. В. Проценко*, *В. М. Решетник*, канд. фіз.-мат. наук, доц.,
Б. В. Рубльов, д. фіз.-мат. наук, проф., *В. Ю. Сапсай*, *О. В. Триліс*,
Н. П. Фортуна, *О. С. Черненко*, д. фіз.-мат. наук., *О. Г. Шевчук*

Відповідальна за випуск:

А. І. Грітчина, канд. пед. наук

Упорядники:

Т. І. Бережна, канд. пед. наук, ст. дослідник, *О. Б. Липовецька*, канд. мед. наук,
О. В. Роговець, канд. пед. наук, *Д. О. Ужвенко*

*Рекомендовано для використання в освітньому процесі
рішенням науково-методичної ради
Національного центру «Мала академія наук України»
(протокол № 2 від 16.06.2025)*

Завдання IV етапу Всеукраїнських учнівських олімпіад з навчальних предметів. 2024/2025 навчальний рік. Математика, фізика, астрономія : практикум / відп. за вип. А. І. Грітчина ; упоряд.: Т. І. Бережна, О. Б. Липовецька, О. В. Роговець та ін. – Київ : Національний центр «Мала академія наук України», 2025. – 224 с.

ISBN 978-617-7945-93-1

Збірник містить завдання теоретичного і практичного турів фінального етапу Всеукраїнських учнівських олімпіад з математики, фізики й астрономії, відповіді до них і варіанти розв'язування. Практикум укладено для ефективної підготовки до участі в інтелектуальних змаганнях.

Видання призначене для учнів 8–11 класів та освітян, які активно долучаються до підготовки дітей до участі в інтелектуальних змаганнях, а також усіх, хто має інтерес до розв'язання складних і нестандартних задач з математики, фізики та астрономії.

УДК 373

© Базей О. А., Гельфгат І. М.,
Грицай А. В. та ін., 2025

© Національний центр
«Мала академія наук України», 2025

ISBN 978-617-7945-93-1

ЗМІСТ

Вступ	4
МАТЕМАТИКА	5
Умови задач	6
8 клас	6
9 клас	8
10 клас	10
11 клас	12
Розв'язання задач	14
8 клас	14
9 клас	19
10 клас	27
11 клас	32
ФІЗИКА	39
Умови задач	40
8 клас	40
9 клас	51
10 клас	66
11 клас	78
Розв'язання задач	86
8 клас	86
9 клас	100
10 клас	122
11 клас	141
АСТРОНОМІЯ	157
Умови задач	158
10 клас	158
11 клас	168
Розв'язання задач	178
10 клас	178
11 клас	195
Список літератури	214
Відомості про авторів	221

ВСТУП

У сучасному світі математика, фізика та астрономія відіграють важливу роль для поступу науки й техніки. Вивчення цих дисциплін сприяє розвитку спостережливості, аналітичного й критичного мислення. Ці науки не лише сприяють загальному інтелектуальному зростанню учнів, а й готують їх до реальних життєвих викликів у дедалі складнішому і технологічно насиченому світі.

Знання з математики, фізики та астрономії відкривають широкі перспективи для кар'єри у різних сферах: інженерії, технологій, екології, космічних досліджень тощо. Вони допомагають глибше зрозуміти закони природи — від механіки й енергетики до космічних явищ — і сприяють ухваленню ефективних рішень у повсякденному житті та професійній діяльності.

Участь в інтелектуальних змаганнях заохочує до практичного застосування теоретичних знань, формування навичок самостійного пошуку розв'язків складних задач, виховує прагнення до самовдосконалення, мотивує учнів до подальших досягнень у науці й техніці.

Практикум створено з метою закріплення теоретичного матеріалу, засвоєння основних принципів розв'язування задач і самоперевірки знань.

Збірник охоплює широкий спектр завдань, містить відповіді до теоретичного та експериментального турів, а також алгоритми й способи розв'язання. Сподіваємось, що він стане корисним інструментом для ефективної підготовки учнів до олімпіад з математики, фізики, астрономії.

Видання призначене для учнів, які цікавляться задачами підвищеної складності, а також вчителів, методистів і фахівців у галузі освіти, які сприяють розвитку інтелектуального потенціалу дітей і готують їх до участі в інтелектуальних змаганнях.

Анна Грітчина,
заступник директора
з методичної роботи НЦ «МАНУ»,
кандидат педагогічних наук



МАТЕМАТИКА

Умови задач

8 клас

8.1. По колу стоять n чисел, і кожне число дорівнює модулю різниці двох своїх сусідів. Чи обов'язково всі числа дорівнюватимуть нулю, якщо:

а) $n = 2025$;

б) $n = 2024$?

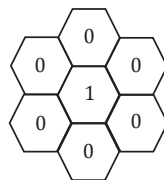
8.2. Задано чотирикутник $ABCD$, у якого точка M — середина сторони CD . Відомо, що $\angle BMA = 90^\circ$, а $\angle MAB = \angle CBD$. Доведіть, що $AC = AB$.

8.3. Спочатку на дошці було записано 14 чисел — нулі й одиниці. Щохвилини Антон обирає половину чисел на дошці та додає до них 1, а Михайло множить усі інші числа на 8. У якийсь момент всі числа на дошці стали рівними. Скільки одиниць могло бути на дошці спочатку?

8.4. Яку найбільшу кількість шахових коней можна поставити на шахівницю 8×8 таким чином, щоб будь-який кінь, що зробить 1 чи 2 довільні ходи, не потрапив на клітинку, де стоїть інший кінь?

Примітка. Хід шахового коня схожий на літеру Г: він переміщається на 2 клітинки по вертикалі й 1 по горизонталі (або 2 клітинки по горизонталі й 1 по вертикалі), перестрибуючи через інші фігури.

8.5. У Олексія є сітка з 7 шестикутних комірок (див. рис.). Спочатку в центральній комірці було записано число 1, в інші — 0. За одну операцію Олексій може обрати довільну комірку й додати 1 до всіх чисел у сусідніх (з одного боку) комірках або відняти 1 від усіх таких чисел (при цьому число в самій комірці не змінюється). Чи вдасться Олексію досягти, щоб в усіх комірках числа дорівнювали 0?



8.6. Задано 2025 таких натуральних чисел, найменше спільне кратне яких не є точним квадратом. Михайло по черзі закриває одне з цих чисел і виписує НСК усіх 2024 чисел, що лишилися. Яка найбільша кількість із записаних 2025 чисел може бути точним квадратом?

8.7. Знайдіть таке найменше число a , для якого — за довільного натурального числа $n > 2$ та довільного розташування чисел від 1 до n на колі — знайдеться пара сусідніх чисел, частка яких (у разі ділення більшого числа на менше) буде менша, ніж a .

8.8. У рівнобедреному трикутнику ABC , де $AB = AC$, провели висоту BK і позначили точку перетину висот H . На стороні AB обрали точку, для якої $AN = HN$. Доведіть, що кола, описані довкола трикутників BCK і ABH , мають спільну точку на прямій KN .

9 клас

9.1. Розв'яжіть систему рівнянь:

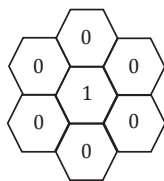
$$\begin{cases} y = x^2 + 2x, \\ z = y^2 + 2y, \\ x = z^2 + 2z. \end{cases}$$

9.2. На стороні AC гострокутного трикутника ABC обрано довільні точки D та E . Кола, описані довкола трикутників BDC та BEA , перетинають сторони BA та BC , а вдруге — у точках F та G . Точка O — центр описаного кола $\triangle BFG$. Доведіть, що $OD = OE$.

9.3. Антон записав на дошці 4 натуральні числа. Олексій порахував їх добуток, а Федір — суму їхніх четвертих степенів. Чи можуть числа Олексія та Федора мати однакову кількість цифр і бути записаними у зворотному порядку стосовно одне одного?

9.4. Є $n^2 + n$ чисел, серед яких жодне не зустрічається більше ніж $\frac{n^2 + n}{2}$ разів. Доведіть, що їх можна розбити на групи $(n + 1)$ по n чисел таким чином, щоб їх суми у цих групах були попарно різними.

9.5. У Олексія є сітка з 7 шестикутних комірок (див. рис.). Спочатку в центральній комірці було записано число 1, в інші — 0. За одну операцію Олексій може обрати довільну комірку й додати 1 до всіх чисел у сусідніх (з одного боку) комірках або відняти 1 від усіх таких чисел (при цьому число в самій комірці не змінюється). Чи вдасться Олексію досягти, щоб в усіх комірках числа дорівнювали 0?



9.6. Сума 10 натуральних чисел дорівнює 300. Добуток їхніх факторіалів є точним десятим степенем деякого натурального числа. Доведіть, що всі 10 чисел рівні між собою.

Примітка. Для натурального числа n його факторіалом $n!$ буде добуток усіх натуральних чисел від 1 до n .

9.7. Про чотирикутник $ABCD$ відомо, що $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$. На промені AB (далі за точкою B) було обрано таку точку K , щоб $\angle AKD = \angle ADB$. Точка L — проєкція точки K на пряму AD , а точка N — проєкція точки D на пряму CL . Знайдіть градусну міру $\angle ANK$.

9.8. Задано 2025 попарно різних натуральних чисел: $a_1, a_2, \dots, a_{2025}$. Знайдіть найбільшу можливу кількість рівних чисел серед дробів, які мають вигляд $\frac{a_i^2 + a_j^2}{a_i + a_j}$.

10 клас

10.1. Задано чотирикутник $ABCD$, у якого точка M — середина сторони CD . Відомо, що $\angle BMA = 90^\circ$ і $\angle MAB = \angle CBD$. Доведіть, що $AC = AB$.

10.2. Є 12 відрізків, і відомо, що їх можна розбити на 4 групи по 4 відрізки так, щоб з відрізків кожної трійки можна побудувати трикутник. Чи завжди ці 12 відрізків можна розбити на 3 групи по 4 відрізки так, щоб з відрізків кожної четвірки можна побудувати чотирикутник?

10.3. Про натуральне число n відомо, що деякі d його різних дільників утворюють арифметичну прогресію. Доведіть, що у числа n принаймні $2d - 2$ дільників.

10.4. Відомо, що послідовність додатних дійсних чисел (x_n) задовольняє співвідношення:

$$x_{n+1} = x_n + \sqrt{x_n + \frac{1}{4}} + \sqrt{x_{n+1} + \frac{1}{4}}, n \geq 1.$$

Доведіть, що справджується така нерівність:

$$\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \dots + \frac{1}{x_{2025}} < \frac{1}{\sqrt{x_1}}.$$

10.5. Задано 2025 таких натуральних чисел, найменше спільне кратне яких не є точним квадратом. Михайло по черзі закривав одне з цих чисел і виписує НСК усіх 2024 чисел, що лишилися. Яка найбільша кількість із записаних 2025 чисел може бути точним квадратом?

10.6. Знайдіть усі трійки невід'ємних дійсних чисел (x, y, z) , що задовольняють рівність:

$$\frac{(x^2 - y)(1 - y)}{(x - y)^2} + \frac{(y^2 - z)(1 - z)}{(y - z)^2} + \frac{(z^2 - x)(1 - x)}{(z - x)^2} = 3.$$

10.7. У певному порядку в рядок виписано 1000 чисел 2 та 2000 чисел -1 . Михайло порахував кількість груп сусідніх чисел, що складаються не менше ніж з двох чисел, сума чисел в яких дорівнює 0.

Завдання:

- а)** знайдіть найменше можливе значення цієї кількості груп;
- б)** знайдіть найбільше можливе значення цієї кількості груп.

10.8. У гострокутному трикутнику ABC , де $AC > BC$ і AD — висота, позначили такі точки: H — ортоцентр, O — центр описаного кола, K — середина сторони AB . Всередині $\triangle ADC$ є точка P , для якої справджується рівність:

$$\angle KPD + \angle ACB = 2\angle OPH = 180^\circ.$$

Доведіть, що $BH = 2PD$.

11 клас

11.1. Задано 12 відрізків. Відомо, що їх можна розбити на 4 групи по 3 відрізки так, щоб з відрізків кожної трійки вдалося побудувати трикутник. Чи завжди ці 12 відрізків можна розбити на 3 групи по 4 відрізки так, щоб з відрізків кожної четвірки вдалося побудувати чотирикутник?

11.2. Прямі AB та CD , на яких розташовані протилежні бічні сторони трапеції $ABCD$, перетинаються в точці Q . Всередині трапеції $ABCD$ обрано таку точку P , щоб $\angle APB = \angle CPD$. Доведіть, що описані довкола трикутників BPD та APC кола вдруге перетинаються на прямій PQ .

11.3. Знайдіть усі такі функції $f: R \rightarrow R$, щоб для довільних дійсних чисел x та y справджувалась нерівність:

$$f(x^2 + 2yf(x)) + (f(y))^2 \leq f((x + y)^2).$$

11.4. Задано пару натуральних чисел (a, b) . Відомо, що для кожного натурального числа n числа $(n - a)(n + b)$ та $n^2 - ab$ додатні, вони мають однакову кількість дільників. Чи завжди $a = b$?

11.5. Спочатку на дошці було записано два константні многочлени — 0 і 1. У кожній наступній дії дозволяється до одного з многочленів додати 1, а інший домножити на многочлен $45x + 2025$. Чи можуть в якийсь момент многочлени стати рівними?

11.6. Олексій обрав 11 попарно різних натуральних чисел, що не перевищують 2025. Доведіть, що серед них можна обрати такі два числа $a < b$, щоб число b під час ділення на число a дало парну остачу.

11.7. Задано трикутник ABC , на стороні AC якого обрали довільну точку D . У трикутниках ABD та CBD провели бісектриси BK та BL відповідно. Точка O — центр описаного кола ΔKBL . Доведіть, що

друга точка перетину описаних кіл трикутників ABL та CBK лежить на прямій OD .

11.8. На ІМО приїхали 102 лідери держав. На завершальній сесії голова ІМО хоче внести деякі зміни до регламенту, які слід схвалити. Для ухвалення змін необхідно набрати голосів «за» не менше ніж $\frac{2}{3}$ учасників голосування. Відомо, що дехто засідання не відвідує і що на завершальній сесії буде 81 лідер. У сесійній залі голова має розсадити їх у формі квадрата 9×9 , де кожен лідер сидітиме у призначеній йому комірці 1×1 . Голова знає, що 28 із цих 81 гарантовано підтримають його, тобто завжди голосуватимуть «за». Решта голосуватиме таким чином: в останню секунду голосування вони подивляться, як проголосували їхні сусіди, тобто лідери, розташовані в сусідніх з боків комірках 1×1 , і якщо більшість з них проголосувала «за», то й вони віддадуть свій голос «за», а якщо такої більшості не буде, то голосуватимуть «проти».

Наприклад, лідер, який сидить у кутку сесійної зали, має 2 сусідів і проголосує «за» тільки тоді, коли обидва з них проголосували «за».

Завдання:

а) з'ясуйте, чи може голова ІМО розсадити своїх 28 прихильників так, щоб вони проголосували «за» в першу секунду голосування і таким чином посприяли голосуванню «за» принаймні $\frac{2}{3}$ усіх 102 лідерів;

б) визначте, яку найбільшу кількість голосів «за» отримає голова, розсадивши 28 своїх прихильників належним чином.

Розв'язання задач

8 клас

8.1. Відповідь: а) ні; б) так.

Розв'язання:

а) достатньо навести такий приклад чисел (вважаємо, що вони розташовані по колу і перше є сусідом останнього):

$$\underbrace{1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, \dots, 1, 1, 0}_{2025}$$

б) припустимо, не всі числа дорівнюють нулю, й очевидно, що всі числа невід'ємні. Позначимо їх $a_1, a_2, \dots, a_{2024}$. Без обмеження загальності вважаємо, що a_2 — найбільше число. Тоді маємо: $a_2 = |a_1 - a_3|$. Так само без обмеження загальності можемо вважати, що $a_1 \geq a_3$, тоді з нерівностей $a_3 \geq 0$, $a_1 \leq a_2$ й $a_2 = a_1 - a_3$ випливає, що $a_3 = 0$ й $a_2 = a_1$. Зазначимо, що $a_2 = a_1 = a$, тоді маємо:

$a_3 = 0, a_4 = a_5 = a, a_6 = 0, \dots, a_{2023} = 0, a_{2024} = a_1 = a, a_2 = 0$,
але $a_2 = a$.

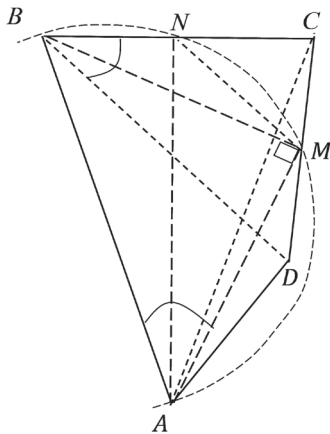
Тобто $a = 0$, що суперечить припущенню і завершує доведення.

8.2. Розв'язання. Нехай N — середина BC . Тоді MN — середня лінія $\triangle BCD$, відповідно (див. рис.): $\angle BNM = 180^\circ - \angle CBD = 180^\circ - \angle BAM$. Отже, чотирикутник $BNMA$ вписаний і $\angle BNA = \angle BMA = 90^\circ$.

Таким чином, відрізок AN є медіаною та висотою $\triangle BAC$, тому $AC = AB$.

8.3. Відповідь: 0,7 або 14.

Розв'язання. Якщо одиниць було 0 або 14, то всі числа рівні з початку. Покажемо, як зробити всі числа рівними, якщо спочатку було 7 одиниць. Будемо додавати 1 до всіх одиниць, а нулі множити на 8, поки вони не стануть дорівнювати $8^7 - 1$ (нулі залишаються нулями). Тепер додамо 1 до всіх



нулів, а інші числа помножимо на 8, тоді вони стануть дорівнювати $8^8 - 8$. Далі помножимо одиниці вісім разів на 8, а до чисел $8^8 - 8$ вісім разів додамо 1. Таким чином, усі 14 чисел стануть дорівнювати 8^8 .

Якщо замість чисел $a_1, a_2, \dots, a_{14}$ записати $a_1 + 1, \dots, a_7 + 1, 8a_8, \dots, 8a_{14}$, то їхня сума у разі ділення на 7 буде мати таку саму остачу:

$$(a_1 + 1) + \dots + (a_7 + 1) + 8a_8 + \dots + 8a_{14} \equiv a_1 + a_2 + \dots + a_{14} + 7 \equiv a_1 + a_2 + \dots + a_{14} \pmod{7}.$$

Якщо всі числа стали дорівнювати a , то їхня сума $14a$ буде ділитись на 7, отже, і спочатку сума чисел ділилась на 7.

Таким чином, на початку могло бути записано лише 0, 7 чи 14 одиниць.

8.4. Відповідь: 12.

Розв'язання. На рисунку 1 зображено приклад розташування 12 шахових коней, які задовольняють умову. Вони поділені на 4 групи. За 2 ходи кінь з однієї групи не дістанеться іншої групи, а також жоден з них не повинен потрапити на клітинку, де стоїть інший кінь.

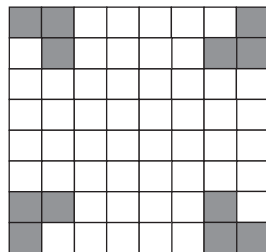


Рисунок 1

Доведемо методом від супротивного, що таких фігур не можна поставити більшу кількість. Якщо коней хоча б 13, то принаймні в одному з квадратів 4×4 їх має бути не менше ніж 4. Обґрунтуємо, чому це буде суперечити умові.

Поділимо клітинки квадрата 4×4 на три типи (див. рис. 2): *кутові* (світло-сірі), *межові*, але не кутові (білі), *центральні* (темно-сірі). Припустимо, що принаймні 3 з чотирьох коней стоять на полях одного типу. Для кутових клітинок за такого розташування 2 клітинки будуть діагональними, що порушує умову. Для центральних — аналогічно. Для 8 межових клітинок маємо 2 групи по 4 клітинки, що утворюються послідовними ходами коня. Наявність двох коней в одній з груп порушує умову. Якщо кінь на чорній клітинці (рис. 3), то світло-сірих можна досягнути за 1 хід, темно-сірої — на другому ході. Отже, в клітинках одного кольору перебуває не більше ніж двоє коней.

За принципом Діріхле в клітинках одного з типів є 2 коня. Якщо вони в кутових полях, то не можуть перебувати в протилежних кутових полях, тому зайнятими можуть бути лише поля при одній зі сторін квадрата 4×4 (рис. 4) — позначені чорним. Розфарбуємо світло-сірим ті клітинки, яких можна досягнути за 1 хід, і темно-сірим — за 2 ходи. Переконаємось, що усі клітинки квадрата 4×4 забарвлені й більше нікуди ставити нових коней без порушення умов задачі.

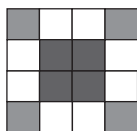


Рисунок 2

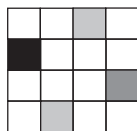


Рисунок 3

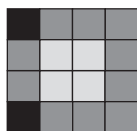


Рисунок 4

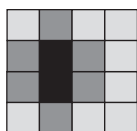


Рисунок 5

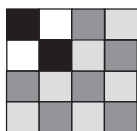


Рисунок 6

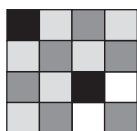


Рисунок 7

Аналогічно — для центральних клітинок (рис. 5).

Таким чином, є одна кутова й одна центральна клітинки, де мають стояти коні. Вони повинні стояти на одній діагоналі. Також є два випадки, зображені на рисунках 6 і 7. Знову розфарбовуємо у світло-сірий і темно-сірий кольори поля, де не можуть стояти інші коні. Після цього 2 коня, що лишилися, повинні зайняти 2 білих поля, але так вони теж порушують умову, що й завершує доведення.

8.5. Відповідь: ні.

Розв'язання. Бачимо, що операції не змінюють суму всіх чисел за модулем 3. Спочатку вона дорівнювала 1, тому ніколи не стане рівною 0.

8.6. Відповідь: 1.

Розв'язання. Якщо НСК усіх чисел не є точним квадратом, то знайдеться просте число p , що входить у НСК у непарному степені. Тоді, якщо серед усіх 2025 чисел обрати число A з найбільшим степенем входження p в нього, дізнаємось, що цей найбільший степінь є непарним. Але A буде наявне у 2024 різних НСК (окрім одного), тому степінь входження p у ці НСК буде залишатися незмінним, отже, вони не можуть бути квадратами. Таким чином, НСК може бути точним квадратом не більше ніж для одного набору.

Зауважимо, що для набору $\underbrace{2, 1, 1, \dots, 1}_{2024}$ серед записаних чисел буде лише один точний квадрат, і цей набір задовольняє умову задачі.

8.7. Відповідь: 2.

Розв'язання. Для парного $n = 2k$ розглянемо таке розташування чисел на колі: $2k, 1, k + 1, 2, k + 2, 3, k + 3, \dots, k - 1, 2k - 1, k$.

Переконаємося, що найменша частка двох послідовних чисел буде $\frac{2k-1}{k}$, оскільки $\frac{k+x}{x+1} \geq 2$ за $x < k-1$. З іншого боку, бачимо, що за достатньо великих k частка $\frac{2k-1}{k} = 2 - \frac{1}{k}$ може бути близькою до 2. Отже, немає жодного $a < 2$, щоб за такого розташування чисел відношення $\frac{2k-1}{k}$ було завжди меншим ніж a . Наприклад, достатньо обрати $k > \frac{1}{2-a}$, і це доводить, що найменше потенційно можливе значення $a = 2$.

Доведемо, що воно задовольняє умову. Припустимо протилежне й розглянемо розташування чисел, де відношення кожної пари до сусідніх буде більшим або дорівнюватиме 2. Якщо $n = 2m$ — парне, то числа від $m+1$ до $2m$ не можуть мати серед сусідів число з цього проміжку, бо якщо $2m \geq x > y > m$, то $\frac{x}{y} < \frac{2m}{m} = 2$. Таким чином, числа,

що є більшими за m , й ті, що не є більшими, чергуються, тому числа, що оточують m , повинні бути від $m + 1$ до $2m$, отже, принаймні одне з них менше ніж $2m$. Відповідно, для цієї пари відношення буде менше за 2, і отримуємо суперечність.

Якщо ж $n = 2m + 1$ — непарне, то, з аналогічних міркувань, числа з проміжку від $m + 1$ до $2m + 1$ не можуть стояти поруч, проте їх більше за половину. Знову маємо суперечність, що і завершує доведення.

8.8. Розв'язання. Побудуємо паралелограм $ADBC$ (див. рис.).

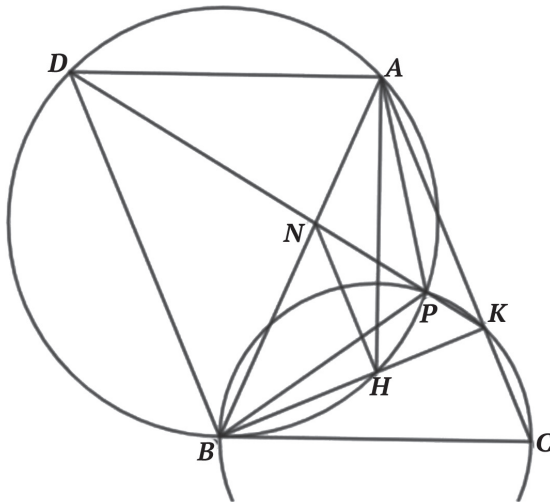
Маємо $\angle AHB = 180^\circ - \angle ACB = 180^\circ - \angle AD$, отже, $AHBD$ — вписаний чотирикутник.

Помічаємо, що $\angle AHN = \angle NAH = \angle HAC$, відповідно, $NH \parallel AC \parallel BD$.

Тоді $\frac{KH}{KB} = \frac{AN}{AB} = \frac{HN}{BD}$, отже, $\triangle KHN \sim \triangle KBD$, тому точки K, N, D лежать на одній прямій. Якщо P — друга точка перетину описаних кіл BCK і $AHBD$, то:

$$\angle BPK = 180^\circ - \angle BCK = 180^\circ - \angle BAD = 180^\circ - \angle BPD.$$

Отже, точки K, P, D лежать на одній прямій, що і треба було довести.



9 клас

9.1. Відповідь: $\{(-1, -1, -1), (0, 0, 0)\}$.

Розв'язання. Перепишемо кожне з рівнянь таким чином:

$$y + 1 = (x + 1)^2, z + 1 = (y + 1)^2, x + 1 = (z + 1)^2.$$

Отже, $x + 1 = (z + 1)^2 = (y + 1)^4 = (x + 1)^8$.

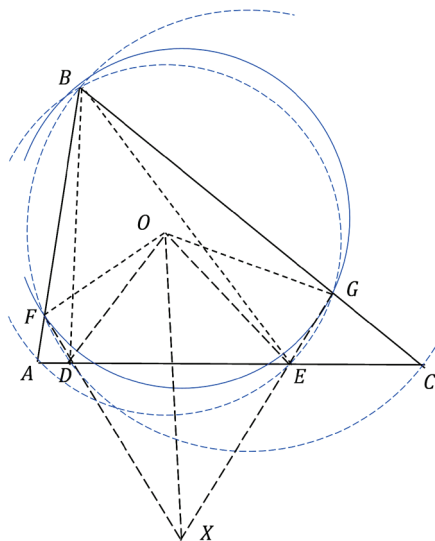
Таким чином, $x + 1 = 0$ або $x + 1 = 1$, тобто $x = 0$, звідки $y = z = 0$, або $x = -1$, звідки $y = z = -1$.

9.2. Розв'язання. Нехай прямі FD , GE перетинаються в точці X (див. рис.).

Вони перетинаються, оскільки:

$$\begin{aligned}\angle FDE + \angle GED &= 180^\circ - \angle ABC + 180^\circ - \angle ABC = \\ &= 180^\circ + 2(90^\circ - \angle ABC) \neq 180^\circ.\end{aligned}$$

Тоді: $\angle XDE = \angle XDC = 180^\circ - \angle FDC = \angle FBC = \angle ABC = \angle XED$.



Остання рівність отримується з аналогічних міркувань. Доходимо висновку, $\triangle XED$ — рівнобедрений, відповідно: $\angle FXG = \angle DXE = 180^\circ - 2\angle ABC$. Водночас $\angle FOG = 2\angle ABC$, отже, чотирикутник $FOGX$ — вписаний. Оскільки $FO = GO$, то на прямій OX лежить бісектриса кута

DXE , а з огляду на рівнобедреність ΔXED вона також є серединним перпендикуляром до DE . Таким чином, O лежить на серединному перпендикулярі до DE , що і треба було довести.

9.3. Відповідь: ні.

Розв'язання. Позначимо записані числа через a, b, c, d . З умови знаємо, що числа $abcd$ та $a^4 + b^4 + c^4 + d^4$ мають однакову кількість цифр, проте за нерівністю між середнім арифметичним і середнім геометричним маємо:

$$\begin{aligned}\frac{a^4 + b^4 + c^4 + d^4}{4} &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{a^4 + b^4}{2} + \frac{c^4 + d^4}{2} \right) \geq \\ &\geq \frac{1}{2} \times \left(\sqrt{a^4 b^4} + \sqrt{c^4 d^4} \right) = \frac{a^2 b^2 + c^2 d^2}{2} \geq \sqrt{a^2 b^2 c^2 d^2} = abcd.\end{aligned}$$

Отже, сума четвертих степенів хоча б у 4 рази більша, а це означає, що перша цифра добутку або 1, або 2. Звідси остання цифра $a^4 + b^4 + c^4 + d^4$ також або 1, або 2.

З малої теореми Ферма випливає, що $x^4 \equiv 0, 1 \pmod{5}$, відповідно, щоб сума чотирьох четвертих степенів давала таку остачу, хоча б два з них мають ділитися на 5. Але тоді серед наших чисел немає парних, бо інакше їх добуток закінчувався б на 0. Отже, $abcd$ — добуток непарних чисел, серед яких є числа, кратні 5, тому закінчується на 5. Тоді сума четвертих степенів має починатись з 5, а добуток — хоча б у 4 рази менший, тому починається з 1. Але 1 не може бути останньою цифрою суми чотирьох непарних чисел.

Отримали суперечність, що й завершує доведення.

9.4. Розв'язання. Відсортуємо числа за спаданням: $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{n^2+n}$. Розглянемо таблицю $(n+1) \times n$ і заповнимо її цими числами таким чином: розріжемо її на дві половини діагоналлю так, щоб верхня половина містила клітинки (i, j) з $i + j \leq n + 1$, а нижня — решту. Далі заповнимо спершу верхню половину, потім нижню. Кожну половину формуємо так: заповнюємо колонки від найправішої до найлівішої, у кожну вписуємо числа згори вниз. На рисунку наведено приклад, як це виглядає для $n = 7$.

Наступним кроком розбиватимемо числа на групи $n + 1$ так: i -та група містить числа з i -го рядка таблиці. Покажемо, що отримані групи задовольняють умову задачі. Будемо позначати число в клітинці (i, j) як $b_{i,j}$. Оскільки числа в кожному стовпчику спадають, то й суми чисел в рядках також спадають.

a_{22}	a_{16}	a_{11}	a_7	a_4	a_2	a_1
a_{23}	a_{17}	a_{12}	a_8	a_5	a_3	a_{29}
a_{24}	a_{18}	a_{13}	a_9	a_6	a_{36}	a_{30}
a_{25}	a_{19}	a_{14}	a_{10}	a_{42}	a_{37}	a_{31}
a_{26}	a_{20}	a_{15}	a_{47}	a_{43}	a_{38}	a_{32}
a_{27}	a_{21}	a_{51}	a_{48}	a_{44}	a_{39}	a_{33}
a_{28}	a_{54}	a_{52}	a_{49}	a_{45}	a_{40}	a_{34}
a_{56}	a_{55}	a_{53}	a_{50}	a_{46}	a_{41}	a_{35}

Припустимо, що два сусідні рядки — i -тий та $(i + 1)$ -й — мають однакові суми, тобто:

$$(b_{i+1,1} - b_{i,1}) + (b_{i+1,2} - b_{i,2}) + \dots + (b_{i+1,n} - b_{i,n}) = 0.$$

Тоді $b_{i+1,j} = b_{i,j}$ для всіх j .

Зосередимось на $b_{i,n+1-i} = b_{i+1,n+1-i} = x$. Усі числа між ними дорівнюють x : числа у верхній половині в перших $n - i$ стовпчиках, а також у нижній в останніх $i - 1$ стовпчиках. Тобто маємо принаймні $(n + (n - 1) + \dots + (i + 1)) + (n + (n - 1) + \dots + (n - i + 2)) + 2$ чисел, що дорівнюють x .

Далі цю суму можна оцінити таким чином:

$$\begin{aligned} & (n + (n - 1) + \dots + (i + 1)) + (n + (n - 1) + \dots + (n - i + 2)) + 2 = \\ & = \left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{i(i+1)}{2} \right) + \left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{(n-i+1)(n-i+2)}{2} \right) + 2 = \\ & = \frac{n(n+1)}{2} + 1 + (n-i)(i-1) > \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Отримали суперечність, що й завершує доведення.

9.5. Відповідь: ні.

Розв'язання. Бачимо, що операції не змінюють суми усіх чисел за модулем 3. Спочатку вона рівна 1, тому ніколи не дорівнюватиме 0.

9.6. Розв'язання. Позначимо числа як $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{10}$. Тоді, якщо не всі числа рівні, то $a_{10} > \frac{300}{10} = 30$, тому $a_{10} \geq 31$. Таким чином, добуток факторіалів ділиться на 31, отже, має ділитися і на 31^{10} . Оскільки

всі числа менші за 31^2 , то число $a_i!$ буде ділитися на 31 у степені, не більшому ніж $\frac{a_i}{31}$.

Але $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{10}}{31} = \frac{300}{31} < 10$, тому цей добуток не буде ділитися на 31 у степені 10.

9.7. Відповідь: 90° .

Розв'язання. Нехай P — це точка перетину прямих AC і DK . Маємо: $\angle CAK = \angle CDB = 90^\circ - \angle ADB = 90^\circ - \angle AKP$, отже, $\angle APK = 90^\circ$ (див. рис. 1). Тоді точки A, L, P, K лежать на колі з діаметром AK , а точки C, D, N, P — на колі з діаметром CD . Звідси випливає, що $\angle CNP = \angle CDP = 90^\circ - \angle ACD = \angle LAP$, відповідно N лежить на описаному колі $\triangle ALP$, яке є колом з діаметром AK , отже, $\angle ANK = 90^\circ$.

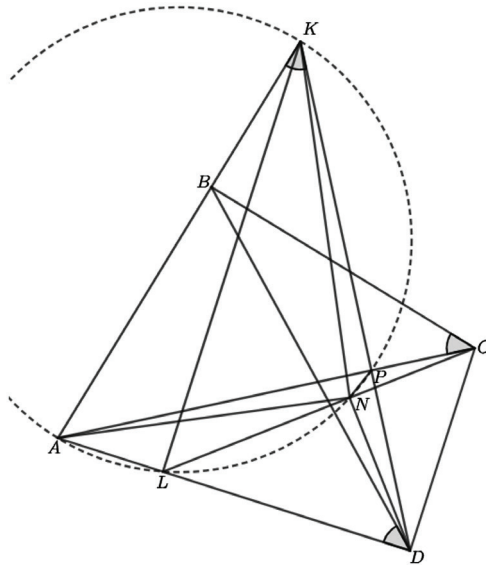


Рисунок 1

Альтернативне розв'язання. З рівності кутів випливає, що описане коло $\triangle KBD$ дотичне до прямої AD (див. рис. 2), відповідно:

$$DA^2 = AB \times AK = AB \times (AB + BK) = AB^2 + AB \times BK,$$

а $AB \times BK = DA^2 - AB^2$.

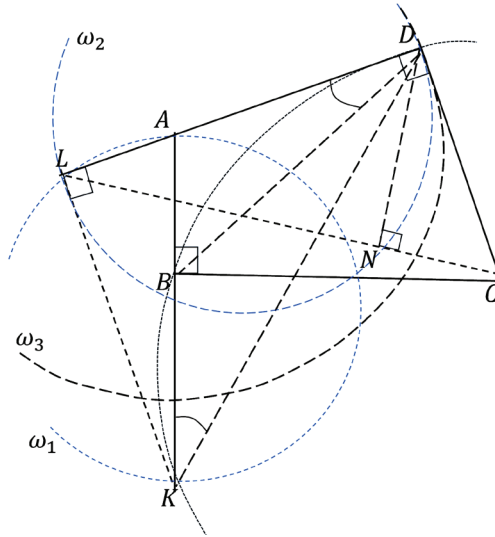


Рисунок 2

Далі розглянемо три кола: ω_1 — коло з діаметром AK , ω_2 — коло з діаметром DL , ω_3 — коло з центром у точці A та радіусом AD . Зрозуміло, що кола ω_2 та ω_3 дотикаються в точці D , тому їхня радикальна вісь — пряма DC . З рівності $AB \times BK = DA^2 - AB^2$ випливає, що степінь точки B відносно кола ω_1 дорівнює степеню точки B відносно кола ω_3 , адже AD — радіус останнього кола, а AB — відстань від центра до точки B .

Проте центр кола ω_1 — середина відрізка AK , а центр кола ω_3 — точка A , звідки пряма AB — лінія центрів кіл ω_1 та ω_3 , а тому перпендикуляр з точки B до прямої AB є радикальною віссю кіл ω_1 та ω_3 . Відповідно, пряма BC — радикальна вісь кіл ω_1 та ω_3 . З доведеного випливає, що точка C — радикальний центр кіл ω_1 , ω_2 та ω_3 , а тому вона лежить на радикальній осі кіл ω_1 та ω_2 . Однак L — одна з точок їх перетину, тому радикальною віссю цих кіл є пряма CL . Тобто кола ω_1 та ω_2 вдруге перетинаються на прямій CL . Але ω_2 вдруге перетинає цю пряму в точці N , відповідно ω_1 перетинає пряму AC в цій самій точці, отже, коло ω_1 також проходить через точку N . З останнього випливає, що $\angle ANK = 90^\circ$.

9.8. Відповідь: $\frac{2}{3} \times 2025 = 1350$.

Розв'язання. Запишемо рівність цієї найбільшої кількості дробів:

$$\frac{a_i^2 + a_j^2}{a_i + a_j} = \frac{a_k^2 + a_l^2}{a_k + a_l} = \dots$$

Будемо вважати, що числа a_i та a_j є парою, якщо серед цих рівностей є дріб $\frac{a_i^2 + a_j^2}{a_i + a_j}$. Таким чином, ідеєю доведення оцінки будуть наступні дві леми.

Лема 1. Кожне число належить не більше ніж двом парам.

Доведення. У протилежному випадку матимемо таку рівність для деяких попарно різних чисел a, b, c, d та якогось t :

$$\frac{a^2 + b^2}{a + b} = \frac{a^2 + c^2}{a + c} = \frac{a^2 + d^2}{a + d} = t.$$

Тоді розглянемо квадратне рівняння: $x^2 - tx + a^2 - at = 0$, що рівносильне рівності $\frac{a^2 + x^2}{a + x} = t$. Виходить, що кожне з чисел b, c, d є його коренем. Маємо суперечність, що і завершує доведення леми.

Лема 2. Якщо число належить двом парам, то воно є більшим у кожній з пар, яким належить.

Доведення. З умови відомо, що $\frac{a^2 + b^2}{a + b} = \frac{a^2 + c^2}{a + c} = t$ для попарно різних a, b, c та якогось t . Тоді розглянемо квадратне рівняння: $x^2 - tx + a^2 - at = 0$, що рівносильне рівності $\frac{a^2 + x^2}{a + x} = t$. Виходить, що його коренями є числа b та c . За теоремою Вієта: $b + c = t$ та $bc = a^2 - at$. Оскільки числа b, c — натуральні, то $a^2 - at > 0$, звідки $a > t$, а з першої рівності — $t > b, c$. Отже, $a > b, c$, що і треба було довести.
Лема доведена.

З другої леми, зокрема, випливає, якщо число є меншим в якійсь парі, то воно належить тільки цій парі. Тоді, коли це графічно зобразити, числа представити вершинами та провести між вершинами ребро (якщо числа належать одній парі), то наш граф розіб'ється на компоненти зв'язності, кожна з яких — це два ребра зі спільною вершиною, або просто ребро, або вершина, і нам треба знайти максимальну кількість ребер у графі з 2025 вершинами. Зрозуміло, що за таких умов шукане значення досягається,

коли граф розбити на трійки вершин, у кожній з яких проведено два ребра, таким чином отримаємо оцінку:

$$\frac{2}{3} \times 2025 = 1350.$$

Для побудови прикладу візьмемо 675 трійок чисел та якесь число t — таке, щоб у кожній трійці три числа a, b, c задовольняли умову:

$$\frac{a^2 + b^2}{a + b} = \frac{a^2 + c^2}{a + c} = t. \text{ Як вже було доведено: } t = b + c. \text{ Рівність } \frac{a^2 + b^2}{a + b} = \frac{a^2 + c^2}{a + c} \text{ рівносильна наступній:}$$

$$(b - c)(a^2 - a(b + c) - bc) = 0.$$

Отже, щоб трійка задовольняла, нам достатньо виконання двох умов: $a^2 - a(b + c) - bc = 0$ та $b + c = t$. Першу умову задовольняє серія розв'язків:

$$a = (x + y)(x + 2y), \quad b = x(x + y), \quad c = y(x + 2y).$$

Далі стає зрозуміло: щоб знайти як завгодно багато шуканих трійок, спочатку слід знайти як завгодно багато розв'язків b, c , де значення $\frac{b}{c}$ попарно різні (достатньо просто на кожному кроці брати замість x просте число, яке більше за всі попередні пари b, c , та y , що не ділиться на це просте). Знайдемо таким чином 675 трійок $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), \dots, (a_{675}, b_{675}, c_{675})$, в яких попарно різні значення $\frac{b_i}{c_i}$. Стає зрозуміло, якщо трійка a', b', c' задовольняє умову $a^2 - a(b + c) - bc = 0$, то трійка $a'k, b'k, c'k$ для довільного натурального k її також задовольняє. Встановимо t настільки великим, щоб ділилося на всі $b_i + c_i$, тоді його можна буде розбити 675 способами на два натуральні доданки, відношення яких дорівнюватиме $\frac{b_i}{c_i}$, отже, для цих доданків b, c можна підібрати третє натуральне a , щоб:

$$a^2 - a(b + c) - bc = 0.$$

Залишилось усвідомити, що всі отримані з лем 1 та 2 a будуть різними та й загалом всі трійки a, b, c сукупно попарно різні, що і завершує доведення.

На додаток розглянемо, як отримано серію розв'язків:

$$a = (x + y)(x + 2y), \quad b = x(x + y), \quad c = y(x + 2y).$$

Розв'яжемо квадратне рівняння відносно a :

$$a = \frac{b + c \pm \sqrt{(b + c)^2 + 4bc}}{2}.$$

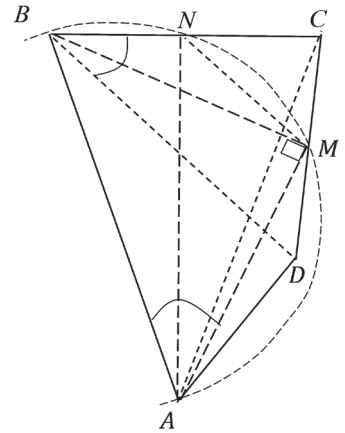
Підходить, коли: $a = \frac{b + c + \sqrt{(b + c)^2 + 4bc}}{2}$, і потрібно, щоб дискримінант був повним квадратом, тобто $(b + c)^2 + 4bc$.

Нехай $(b + c)^2 + 4bc = (b + c + l)^2$, тоді $4bc = 2l(b + c) + l^2$, що можна переписати як $(2b - l)(2c - l) = 2l^2$. Далі вже зрозуміло, як знаходити серію розв'язків: робимо l парним, розбиваємо $2l^2$ на два дільники, перший з яких переміщуємо у перші дужки, а другий — у другі.

10 клас

10.1. Розв'язання. Нехай N — середина BC . Тоді MN — середня лінія $\triangle BCD$, відповідно (див. рис.): $\angle BNM = 180^\circ - \angle CBD = 180^\circ - \angle BAM$, отже, чотирикутник $BNMA$ вписаний, а $\angle BNA = \angle BMA = 90^\circ$.

Таким чином, відрізок AN є медіаною та висотою $\triangle BAC$, тому $AC = AB$.



10.2. Відповідь: так, завжди.

Розв'язання. Оберемо у кожній з чотирьох трійок найбільшу сторону. За нерівністю трикутника вона має бути меншою, ніж сума інших двох. Серед цих чотирьох відрізків оберемо найменший, після чого розподілимо відрізки з його трійки між іншими трійками довільним чином (до кожної з інших трьох трійок додається по одному відрізку й утворюється четвірка). Тоді для довільної з цих трьох трійок найбільша сторона (позначимо її a , а інші дві — b і c) залишилась найбільшою, бо ми приєднали менший відрізок d . Оскільки виконувалось $b + c > a$, то далі буде виконуватись $b + c + d > a$, тож з усіх четвірок можна скласти чотирикутник.

10.3. Розв'язання. Нехай g — найбільший спільний дільник усіх d дільників. Якщо ми поділимо всі ці дільники на g , то вони залишаться дільниками n , тому можна вважати, що $g = 1$.

Позначимо ці d дільників як $a_1 < a_2 < \dots < a_d$. Якби в a_{d-1} та a_d був спільний дільник, більший за одиницю, то всі a_i ділились би на цей дільник, бо ці дільники утворюють арифметичну прогресію. Таким чином, $\text{НСД}(a_{d-1}, a_d) = 1$. Отже, $n : a_{d-1}a_d$. Але тоді для $1 \leq i \leq d - 2$ числа $\frac{n}{a_i}$ більші за $\frac{n}{a_{d-1}} \geq a_d$, а тому маємо ще $d - 2$ дільники n .

10.4. Розв'язання. Для довільного додатного числа x існує (причому єдине) додатне число t , для якого справджується рівність: $t(t+1) = x$. Для деякого n оберемо додатні числа s, t так, щоб $s(s+1) = x_{n+1}$ і $t(t+1) = x_n$. Перепишемо співвідношення послідовності:

$$s^2 + s = t^2 + t + \sqrt{s^2 + s + \frac{1}{4}} + \sqrt{t^2 + t + \frac{1}{4}},$$

$$s^2 + s = t^2 + t + s + \frac{1}{2} + t + \frac{1}{2} = (t+1)^2 + s.$$

Отже, $s^2 = (t+1)^2$, звідки $s = t+1$, бо числа додатні. Таким чином, якщо позначити $x_1 = t(t+1)$ для додатного t , то матимемо $x_n = (t+n-1)(t+n)$ для всіх натуральних n . Відповідно:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \dots + \frac{1}{x_{2025}} = \frac{1}{(t+1)(t+2)} + \\ & + \frac{1}{(t+2)(t+3)} + \dots + \frac{1}{(t+2024)(t+2025)} = \\ & = \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2} + \frac{1}{t+2} - \frac{1}{t+3} + \dots + \frac{1}{t+2024} - \frac{1}{t+2025} = \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2025} < \\ & < \frac{1}{t+1} < \frac{1}{\sqrt{x_1}}, \text{ оскільки:} \end{aligned}$$

$$x_1 = t(t+1) < (t+1)^2.$$

Бачимо, що будь-яке значення t визначає послідовність з потрібною властивістю, отже, така послідовність існує.

10.5. Відповідь: 1.

Розв'язання. Якщо НСК усіх чисел не є точним квадратом, то знайдеться просте число p , що входить у НСК в непарному степені. Тоді, якщо серед усіх 2025 чисел обрати число A з найбільшим степенем входження p в нього, то побачимо, що цей найбільший степінь є непарним. Але A буде наявне у 2024 різних НСК (окрім одного), тому степінь входження p у ці НСК буде лишатися незмінним, отже, вони не можуть бути квадратами. Таким чином, НСК може бути точним квадратом не більше ніж для одного набору.

Зауважимо, що для набору $\underbrace{2, 1, 1, \dots, 1}_{2024}$ серед записаних чисел буде тільки один точний квадрат, і цей набір задовольняє умову задачі.

10.6. Відповідь: таких трійок немає.

Розв'язання. Зрозуміло, що серед чисел немає двох однакових. Доведемо, що кожен з трьох наведених дробів не є більшим за 1.

$$\text{Спочатку маємо: } \frac{(x^2 - y)(1 - y)}{(x - y)^2} \leq 1 \Leftrightarrow (x^2 - y)(1 - y) \leq (x - y)^2.$$

Далі розкриємо у цій нерівності дужки: $x^2 - x^2y - y + y^2 - x^2 - y^2 + 2xy \leq 0 \Leftrightarrow -y(x - 1)^2 \leq 0$, що вочевидь правда, тому рівність досягається лише у випадку, коли $y = 0$ або $x = 1$.

Врешті отримуємо:

$$\frac{(x^2 - y)(1 - y)}{(x - y)^2} + \frac{(y^2 - z)(1 - z)}{(y - z)^2} + \frac{(z^2 - x)(1 - x)}{(z - x)^2} \leq 3.$$

В останній нерівності рівність досягається, коли всі числа — це нулі або одиниці, але це суперечить вимозі, що не повинно бути двох рівних чисел.

10.7. Відповідь: а) 1000; б) $3 \times \frac{1000 \times 999}{2} + 1000 = 1\,499\,500$.

Розв'язання:

а) покажемо за індукцією, що коли в ряду розташовані в певному порядку k двійок і $2k$ мінус одиниць, то є принаймні k таких відрізків. Для $k = 1$ це очевидно. Для $k \geq 2$ знайдуться дві мінус одиниці, що стоять поруч (мінус одиниць не більше, ніж $k + 1$, що менше за $2k$).

Розглянемо ці мінус одиниці, з якогось боку від них знайдеться найближча двійка, тобто знайдеться трійка сусідніх чисел, що має вигляд $[-1, -1, 2]$ чи $[2, -1, -1]$. Якщо видалити цей відрізок, то ми все ще матимемо $k - 1$ відрізків з сумою 0 (деякі з них міститимуть щойно видалений відрізок). Перехід завершено.

Наприклад: спершу 1000 двійок, потім 2000 мінус одиниць. Тут кожний відрізок чисел з сумою 0 однозначно задається кількістю двійок у ньому, і зрозуміло, що тоді таких відрізків 1000;

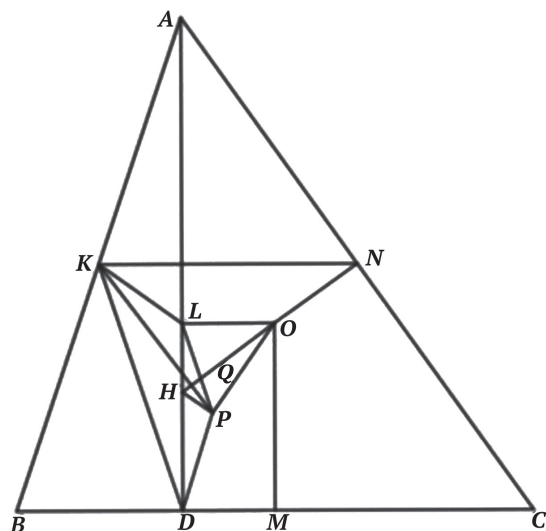
б) позначимо ці 3000 чисел як $a_1, a_2, \dots, a_{3000}$. Для $0 \leq i \leq 3000$ визначимо суми: $s_i = a_1 + a_2 + \dots + a_i$ та $s_0 = 0$. Тоді $a_i + a_{i+1} + \dots + a_r = 0 \Leftrightarrow s_{i-1} = s_r$. Як бачимо, серед кожних сусідніх трьох s_i, s_{i+1}, s_{i+2} немає рівних, адже $a_i \neq 0, a_i + a_{i+1} \neq 0$. Отже, для кожного

$1 \leq i \leq 3000$ є не більше ніж $\left\lfloor \frac{i}{3} \right\rfloor$ індексів $j < i$ з $s_j = s_i$. Таким чином, кількість відрізків з сумою 0 не перевищує:

$$\sum_{i=1}^{3000} \left\lfloor \frac{i}{3} \right\rfloor = \sum_{i=1}^{999} (3 \times i) + 1000 = 3 \times \frac{1000 \times 999}{2} + 1000.$$

Відповідно, для масиву $[-1, -1, 2, -1, -1, 2, \dots, -1, -1, 2]$ виконується рівність.

10.8. Розв'язання. Нехай L — проєкція точки O на пряму AD (див. рис.). Тоді $\angle OLA = \angle OKA = 90^\circ$, а точки A, K, L і O лежать на одному колі. Отже, $\angle KLD = 180^\circ - \angle KLA = 180^\circ - \angle KOA = 180^\circ - \angle ACB = \angle KPD$. Звідси випливає, що точки K, L, P та D також лежать на одному колі. До того ж $\angle OLH = \angle HPO = 90^\circ$, отже, точки L та P рівновіддалені від точки Q — середини відрізка HO .



Точка Q , своєю чергою, є центром кола дев'яти точок $\triangle ABC$, на якому також лежать точки K і D , отже, $QK = QD$. Таким чином, або коло з центром в точці Q та радіусом QL збігається з колом Ейлера $\triangle ABC$, тоді точки O та H лежать на колі Ейлера, або це коло перетинає описане коло

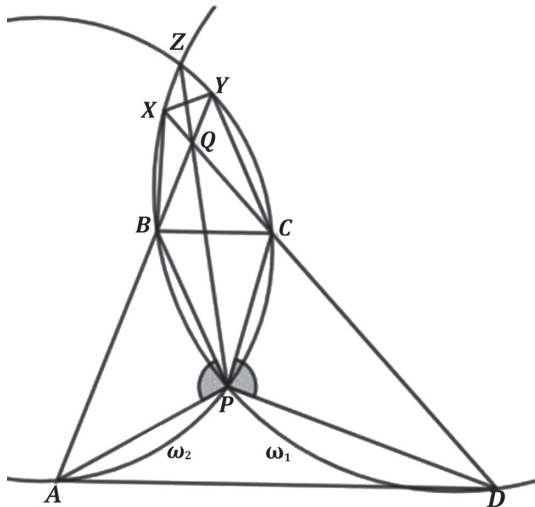
чотирикутника $KLPD$ у двох точках, симетричних відносно серединного перпендикуляра до KD , і тоді цей чотирикутник — рівнобічна трапеція. Перший випадок неможливий, бо $\triangle ABC$ — гострокутний і коло з діаметром HO повністю розміщене всередині кола дев'яти точок з центром в точці Q . З останнього випливає, що $PD = KL$. Якщо точка N — середина сторони AC , то $KLON$ — рівнобічна трапеція, бо всі чотири вершини лежать на колі з діаметром AO , а $OL \parallel KN$. Звідси випливає, що $PD = KL = ON = \frac{1}{2}BH$, що і треба було довести.

11 клас

11.1. Відповідь: так, завжди.

Розв'язання. Оберемо у кожній з чотирьох трійок найбільшу сторону. За нерівністю трикутника вона має бути меншою, ніж сума інших двох. Серед цих чотирьох відрізків оберемо найменший, після чого розподілимо відрізки з його трійки між іншими трійками довільним чином (до кожної з інших трьох трійок додається по одному відрізку й утворюється четвірка). Тоді для довільної з цих трьох трійок найбільша сторона (позначимо її a , а інші дві — b та c) залишилась найбільшою, бо ми приєднали менший відрізок d . Оскільки виконувалось $b + c > a$, то буде виконуватись $b + c + d > a$, тож з усіх четвірок можна скласти чотирикутник.

11.2. Розв'язання. Позначимо описане коло $\triangle BPD$ як ω_1 , а описане коло $\triangle APC$ як ω_2 . Нехай ω_1 вдруге перетинає пряму CD у точці X , а ω_2 вдруге перетинає пряму AB у точці Y , а кола ω_1 та ω_2 вдруге перетинаються в точці Z . Тоді для орієнтованих кутів маємо такі рівності (див. рис.):



$$\begin{aligned}\angle(BX, XC) &= \angle(BX, XD) = \angle(BP, PD) = \angle(BP, PC) + \angle(PC, PD) = \\ &= \angle(BP, PC) + \angle(AP, BP) = \angle(AP, PC) = \angle(AY, YC) = \angle(BY, YC),\end{aligned}$$

оскільки $\angle APB = \angle CPD$.

Отже, точки X, B, C та Y лежать на одному колі. Відтак:

$$\angle(XD, XY) = \angle(XC, XY) = \angle(CB, BY) = \angle(DA, AY).$$

Звідси зрозуміло, що точки X, A, D та Y лежать на одному колі, яке позначимо ω_3 . Тоді пряма DX — радикальна вісь кіл ω_1 та ω_3 , пряма AY — радикальна вісь кіл ω_2 та ω_3 , а пряма PZ — радикальна вісь кіл ω_1 та ω_2 . Отже, пряма PZ проходить через точку перетину прямих AY та DX — точку Q , що і треба було довести.

11.3. Відповідь: $f(x) = 0, f(x) = x$.

Розв'язання. Позначимо початкову нерівність з умови як (1).

Підставимо $y = 0$ в (1) і отримаємо:

$$f(x^2) + f^2(0) \leq f(x^2) \Rightarrow f(0) = 0.$$

Далі підставимо $y = 2f(x) - 2x$ в (1) і отримаємо:

$$\begin{aligned}f(x^2 + 2(2f(x) - 2x)f(x)) + f^2(2f(x) - 2x) &\leq f((2f(x) - x)^2) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow f(x^2 - 4xf(x) + 4f^2(x)) + f^2(2f(x) - 2x) &\leq f((2f(x) - x)^2) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow f^2(2f(x) - 2x) \leq 0 \Leftrightarrow f(2f(x) - 2x) &= 0.\end{aligned}\quad (2)$$

Потім підставимо $x = 0$ в (1) і отримаємо:

$$f^2(y) \leq f(y^2).$$

З цього випливає, що $f(x) \geq 0$, коли $x \geq 0$, і що $f(x) = 0$, коли $f(x^2) = 0$.

Припустимо, що для деякого $c \neq 0$ $f(c) = 0$. Підставимо $x = c$, $y = -c$ в (1) і отримаємо:

$$f(c^2) + f^2(-c) \leq 0 \Rightarrow f(c^2) = f^2(-c) = 0.$$

З урахуванням попередніх властивостей маємо:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x^2) = 0 \Leftrightarrow f(-x) = 0.$$

Також припустимо, що $f(c_1) = f(c_2) = 0$. Підставимо $x = c_1$, $y = c_2 - c_1$ в (1) і отримаємо:

$$f^2(c_2 - c_1) \leq 0 \Rightarrow f(c_2 - c_1) = 0.$$

До того ж: $f(c_1) = f(-c_1) = 0 \Rightarrow f(c_2 + c_1) = 0$.

Розглянемо тепер деяке $c > 0$, для якого $f(c) = 0$.

Підставимо $x \in [0, c]$, $y = c - x$ в (1):

$$f(x^2 + 2(c - x)f(x)) + f^2(c - x) \leq 0.$$

Бачимо, що $x^2 + 2(c - x)f(x) \geq 0$, а тому: $f(x^2 + 2(c - x)f(x)) \geq 0$.

Звідси: $f(x^2 + 2(c - x)f(x)) = f(c - x) = 0$.

Таким чином, для довільного $x \in [0, c]$ $f(x) = 0$. Оскільки за $f(a) = f(b) = 0$ маємо, що $f(a + b) = 0$, врешті отримуємо: $f(x) = 0$ для усіх $x \geq 0$, тому $f \equiv 0$.

Якщо ж такого c не існує, то з (2) випливає: $f(x) = x$.

Отже, обидві функції задовольняють нерівність з умови.

11.4. Відповідь: так, обов'язково.

Розв'язання. Якщо $a < b$, то підставимо в умову $n = b$. Тоді числа $2b(b - a)$ та $b(b - a)$ мають однакову кількість дільників, звідки й отримуємо суперечність.

Нехай тепер $a > b$, позначимо через 2^l найбільший степінь двійки, що ділить число $a + b$. Розглянемо достатньо велике просте число p (обмеження на нього сформулюємо пізніше) і підставимо в умову $n_1 = 2^{p-1-l} + a$ та $n_2 = 2^{p-1-l} - b$. Тоді перший вираз буде дорівнювати: $2^{p-1-l}(2^{p-1-l} + a + b)$ — у першому випадку, $2^{p-1-l}(2^{p-1-l} - a - b)$ — у другому випадку. Якщо взяти таке число p , щоб виконувалась нерівність $p - 1 - l > l$, то в обох випадках друга дужка матиме степінь входження двійки, що дорівнює l . Таким чином, степінь входження двійки у добуток буде дорівнювати: $p - 1 - l + l = p - 1$, отже, кількість дільників цього числа буде ділитись на p . Оскільки число $n^2 - ab$ має таку саму кількість дільників, то знайдеться таке просте число q , щоб $n^2 - ab$ ділилося на q^{p-1} .

Припустимо, що $q = 2$, тоді:

$$n^2 - ab = (n - a)(n + b) + n(a - b).$$

Вже показано, що перший доданок ділиться на 2^{p-1} , тому другий також має ділитись на 2^{p-1} . Якщо u та v — степені входження 2 у числа a та $a - b$, то для $p - 1 - l > u$ степінь входження 2 у число $n = 2^{p-1-l} + a$ дорівнює u , отже, степінь входження 2 у число $n(a - b)$ дорівнюватиме $u + v$, тож для $p > u + v + 1$ отримуємо суперечність.

Далі припустимо, що $q \geq 5$, тоді $n^2 > n^2 - ab \geq 5^{p-1}$, тож $n > 5^{\frac{p-1}{2}}$. З іншого боку, в обох випадках: $n \leq n_1 = 2^{p-1-l} + a \leq 2^{p-1} + a$.

Але для достатньо великих p справджується нерівність: $\sqrt{5}^{p-1} > 2^{p-1} + a$, бо $\sqrt{5} > 2$.

Таким чином, для достатньо великих p має обов'язково виконуватись $q = 3$. Тоді $n_1^2 - ab$ та $n_2^2 - ab$ діляться на 3^{p-1} , відповідно їхня різниця також має ділитись на 3^{p-1} :

$$n_1^2 - n_2^2 = (n_1 + n_2)(n_1 - n_2) = (2^{p-1} + a - b)(a + b).$$

Однак для достатньо великого p буде виконуватись нерівність:

$$(2^{p-1} + a - b)(a + b) < 2^{p+1}(a + b) < 3^{p-1}.$$

Отже, обидва випадки $a < b$ та $b < a$ — неможливі, тож $a = b$.

11.5. Відповідь: ні, не можуть.

Розв'язання. Позначимо $x_0 = -45$ — корінь многочлена $45x + 2025$. Спочатку значення записаних многочленів у точці x_0 порівнюють 0 та 1.

Доведемо, що після кожного кроку значення одного з цих многочленів у точці x_0 буде 0, а інше — деяке додатне дійсне число. Нехай це так після певного кроку, тоді один з многочленів помножиться на $45x + 2025$, отже, матиме значення 0 у точці x_0 .

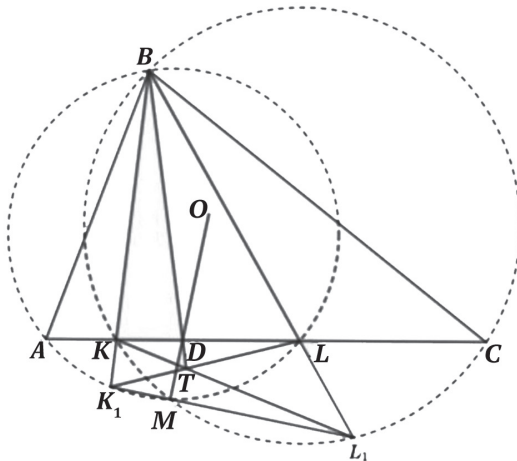
До іншого многочлена додається 1, відповідно його значення у точці x_0 стане додатним, бо воно було невід'ємним у попередніх діях. Таким чином, значення многочленів у точці x_0 завжди відрізняються, отже, многочлени не можуть стати рівними.

11.6. Розв'язання. Припустимо протилежне. Очевидно, що серед чисел не може бути числа 1. Будь-яке парне число дає парну остачу у разі ділення на будь-яке парне число, тому парних чисел не більше ніж 1. Розглянемо непарні числа $a < b$. Якщо $b < 2a$, то $b \bmod a = b - a$ — парне, тому $b \geq 2a + 1$.

Отже, непарні числа набувають як мінімум таких значень: 3, 7, 15, 31, ... Відтак, оскільки всі вони не більші за 2025, то їх не більше ніж 9. Відповідно, загалом чисел не більше ніж 10, тож отримуємо суперечність.

11.7. Розв'язання. Нехай описане коло трикутника BKC перетинає промінь BL вдруге в точці L_1 , а описане коло трикутника ABL перетинає промінь BK вдруге в точці K_1 . Припустимо, відрізки KL_1, LK_1 перетинаються в точці T (див. рис.). Тоді:

$$\angle TLK = \angle K_1LA = \angle K_1BA = \angle DBK.$$



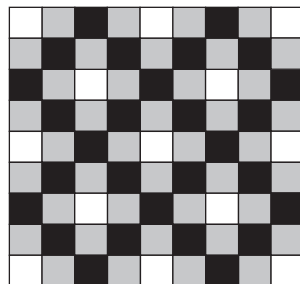
Аналогічно — $\angle TKL = \angle DBL$. Звідси спершу:

$\angle KTL = 180^\circ - \angle TLK - \angle TKL = 180^\circ - \angle DBK - \angle DBL = 180^\circ - \angle KBL$, тобто $KTLD$ — вписаний, а тоді: $\angle TBK = \angle TLK = \angle DBK$, а отже, B, D, T — на одній прямій.

Тепер розглянемо точку перетину описаних кіл трикутників ABL та CBK , або точку Мікеля чотирикутника $KT LB$ — точку M . Відомий факт: $\angle OMK_1 = 90^\circ$. Як одне з доведень розглянемо середини BK і TL — точки X та Y . M є центром поворотної гомотетії, що переводить BK в TL , тому M переводить X в Y , відповідно M лежить на описаному колі трикутника K_1XY . Оскільки OK_1 є діаметром цього кола, то $\angle OMK_1 = 90^\circ$. Аналогічно — $\angle OML_1 = 90^\circ$. Отже, M є проєкцією O на K_1L_1 . Але для довільного вписаного $BKTL$ з центром у точці O точки перетину продовжень протилежних сторін K_1 та L_1 лежатимуть на полярі точки перетину діагоналей D . Таким чином, маємо $OD \perp K_1L_1$, тобто точки O, D, M лежать на одній прямій, перпендикулярній K_1L_1 .

11.8. Відповідь: а) так; б) 68.

Розв'язання. Якщо голова розсадить своїх 28 прихильників так, як на рисунку розташовані чорні клітинки, то він матиме ще 40 голосів «за» від незалежних лідерів (сірі клітинки), що разом становитиме 68 з 102, тобто якраз $\frac{2}{3}$ голосів, необхідні для прийняття позитивного рішення.



Доведемо, що більше, ніж 40 додаткових голосів «за», набрати неможливо. Клітинки з прихильниками голови забарвимо чорним кольором, а клітинки з іншими лідерами, які голосуватимуть «за», — сірим. Решту клітинок залишимо білими. Розглянемо ситуацію, коли голова з певним розташуванням прихильників набирає ще як мінімум 41 голос «за». Розглянемо кількість пар суміжних клітинок, де одна клітинка чорна, а інша — сіра. Одиначний відрізок, розташований між чорною та сірою клітинками, назвемо *активним*. Нехай на межі квадрата 9×9 буде рівно m з 28 чорних клітинок. Тоді m з 28 чорних клітинок є не більше, ніж у 3 таких парах, а $28 - m$ є не більше, ніж у 4 таких парах. Відтак активних сторін буде не більше ніж:

$$M = 3m + 4 \times (28 - m) = 112 - m.$$

Нехай рівно k сірих клітинок розташовано на межі залу, тобто вони повинні бути поруч хоча б з 2 чорними клітинками, а $41 - k$ — не розташовані на межі, отже, потребують принаймні трьох суміжних чорних клітинок. Тоді є як мінімум $K = 2k + 3(41 - k) = 123 - k$ активних сторін. Очевидно, що:

$$M \geq K \Rightarrow 112 - m \geq 123 - k \Rightarrow k - m \geq 11.$$

Для кожної сірої межевої клітинки потрібна принаймні 1 чорна клітинка, яка також розташована на межі, бо граничить щонайбільше з одним внутрішнім квадратом. Крім того, кожна чорна межева клітинка може мати щонайбільше 2 сусідні сірі клітинки на межі. Отже, повинна бути виконана така умова:

$$m \geq \left\lceil \frac{k + 1}{2} \right\rceil.$$

Тоді маємо оцінки: $11 \leq k - m \leq k - \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \Rightarrow$
 $\Rightarrow k \geq 22 \Rightarrow m \geq 11.$

Відповідно, отримали суперечність, бо межових сірих і чорних клітинок вийшло $k + m \geq 33 > 32$, а на межі квадрата 9×9 розташовано рівно 32 клітинки. Отримана суперечність завершує доведення.

The background is composed of three main geometric sections. The top section is a large orange area filled with a pattern of thin, parallel diagonal lines. The bottom-left section is a solid dark blue triangle. The bottom-right section is a solid yellow triangle. The word 'ФІЗИКА' is centered in the yellow section.

ФІЗИКА

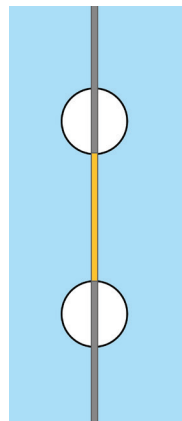
Умови задач

8 клас

Теоретичний тур

8.1. Нашестя кульок

Дві кульки мають тонкий наскрізний отвір по діаметру, за допомогою якого їх можна насадити на дуже довгий гладенький непровідний стрижень. Перша кулька виготовлена з матеріалу із густиною 1200 кг/м^3 і має заряд 40 нКл . Друга кулька виготовлена з матеріалу із густиною 240 кг/м^3 і має заряд 60 мкКл . Кульки зв'язали тонкою непровідною ниткою, насадили на стрижень і усю конструкцію помістили у вертикальному положенні у непровідну рідину (див. рис.). Після того, як у системі встановилась рівновага, нитку перерізали. На диво, після цього кульки не змінили свого положення.



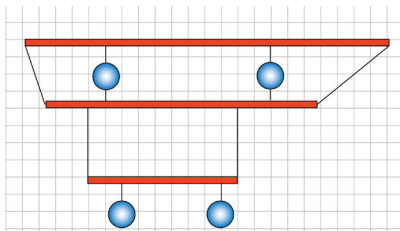
Завдання: визначте відношення об'ємів кульок.

Примітка. Густина рідини дорівнює 1000 кг/м^3 , а сама рідина зменшує силу електростатичної взаємодії між кульками у 81 раз.

Увага! Рисунок наведено без урахування масштабів кульок.

8.2. Гірлянда

Учитель виготовив систему для демонстрації певних дослідів, зображену на рисунку. Система складається з чотирьох однакових за масою й розміром однорідних куль, трьох дуже тонких і легких стрижнів та тонких невагомих ниток. Верхній



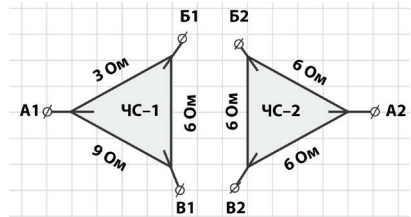
стрижень може обертатися без тертя навколо осі (вісь — цвях, що проходить крізь тонкий отвір у цьому стрижні), перпендикулярної до площини рисунка, де забули зобразити точку, через яку проходить ця вісь.

Завдання:

- а) визначте, де саме ця точка розташована, якщо в положенні рівноваги стрижні горизонтальні;
- б) вкажіть, як зміниться відповідь до завдання а), якщо всю систему занурити у воду (густина матеріалу кульок утричі більша за густину води).

8.3. Електрична комбінаторика

Пропонується дослідити чорні скриньки ЧС-1 і ЧС-2, кожна з яких має три клеми, а всередині містить тільки резистори (виміряні опори між клемами зазначені на рисунку).



Завдання:

- а) вкажіть, яка мінімальна кількість резисторів може міститися в кожній чорній скриньці (запропонуйте можливі схеми, які відповідають такій кількості резисторів);
- б) визначте опір між клемами A1 і A2, врахувавши, що провідниками з нехтовно малим опором з'єднують клему B1 з клемою B2, а клему B1 — з клемою B2.

8.4. Балістична гіпотеза

Колись була висунута гіпотеза, що світло від рухомого джерела поширюється у вакуумі зі швидкістю $c \approx 3 \times 10^5$ км/с, але лише відносно самого джерела світла, а не інших тіл. Наприклад, якщо світло випромінюється в бік руху джерела, його швидкість збільшується на величину швидкості джерела, а якщо джерело рухається у протилежному напрямку, то швидкість світла зменшується на таку саму величину. Беручи за основу цю ідею, розглянемо гіпотетичні результати деяких спостережень за рухом планети, яка обертається навколо зорі, нерухомої відносно земних астрономів, коловою орбітою з радіусом R . Земля розташована в площині орбіти цієї планети. Відстань між Землею та зорею дорівнює $10^5 \times R$. Швидкість руху планети орбітою не перевищує $c / 100$. Керуючись цією теорією, доходимо доволі дивних висновків. Наприклад, що земні астрономи у якийсь момент могли б одночасно побачити в

телескоп зображення цієї планети, розташовані у різних точках орбіти на найбільшій видимій із Землі відстані від зорі.

Завдання: розрахуйте, якими тоді могли б бути періоди обертання планети.

Примітка. Планету слід вважати джерелом відбитого світла зорі. Оскільки Земля розташована дуже далеко від зорі, то всі промені, які йдуть від планети до Землі, можна вважати паралельними.

8.5. Практика проти теорії

Учень почав самостійно вивчати тему «Теплові явища» і вирішив розв'язати задачу з підручника:

«Знайдіть, яку кількість теплоти має передати нагрівач постійної потужності твердому тілу масою 400 г, що виготовлене з криптоніту та має температуру -40°C , щоб перевести його у рідкий стан і нагріти до температури $+30^{\circ}\text{C}$ у посудині з теплоємністю 200 Дж/ $^{\circ}\text{C}$ (втратами теплоти та випаровуванням в навколишнє середовище можна знехтувати). Побудуйте графік залежності температури посудини з речовиною від часу, якщо тривалість всього процесу становить 15 хв».

Результати своїх обчислень (довідникові дані були в підручнику) учень записав у таблицю (наведено нижче), побудував графік з трьох прямолінійних ділянок і побіг до батька в гараж перевіряти все на практиці, чомусь запам'ятавши, що рідкий криптоніт має питому теплоємність утричі більшу за твердий. Підібравши відповідне обладнання, він почав експеримент, але з сумом виявив, що все йде не за планом:

- через теплообмін з повітрям усі процеси тривають зовсім інший час, ніж планувалося;

- ділянки нагрівання, які на графіку були прямими, виявилися викривленими;

- хоч скільки нагрівав посудину з криптонітом, але вище ніж 28°C нагріти її не вдалося.

τ , хв	...	...	6	9	12	15
t , $^{\circ}\text{C}$	...	...	10	10	15	30

Учень у розпачі вимкнув нагрівач, поспостерігав за процесами охолодження та кристалізації криптоніту, випадково розлив рідину на таблицю з експериментальними даними й пішов геть. З усіх записів

залишилися частина теоретично розрахованої таблиці й тривалість процесів плавлення та кристалізації в реальних умовах — 10 і 15 хв відповідно.

Завдання:

а) використовуючи дані реальних вимірювань, визначте, скільки часу тривав процес плавлення за теоретичними розрахунками учня для ідеалізованих умов задачі з підручника;

б) за залишками теоретичної таблиці розв'яжіть задачу з підручника: побудуйте графік залежності температури від часу і знайдіть необхідну на весь процес кількість теплоти;

в) визначте температуру повітря в гаражі та вважайте її постійною упродовж всього експерименту;

г) схематично зобразіть залежність температури від часу (координатна сітка теоретичного і схематичного графіків повинна збігатись) для реального процесу нагрівання криптоніту в гаражі й обґрунтуйте, чому викривлені ділянки мають такий вигляд.

Примітка. Слід вважати, що теплова потужність теплообміну між посудиною з криптонітом і повітрям прямо пропорційна різниці температур між ними з постійним коефіцієнтом пропорційності.

Експериментальний тур

8.1. Ручка-стрибунець

Обладнання: ручка, що має кнопку на пружині; лінійка; дошка, один бік якої вкритий шліфувальним папером.

Завдання:

а) запропонуйте спосіб, за якого ручка завдяки пружині підстрибує на максимальну висоту;

б) запропонуйте спосіб визначення коефіцієнта тертя між бічною поверхнею ручки та шліфувальним папером (дошку зі шліфувальним папером слід розташувати горизонтально з використанням наданого обладнання); визначте цим способом коефіцієнт тертя.

У звіті наведіть:

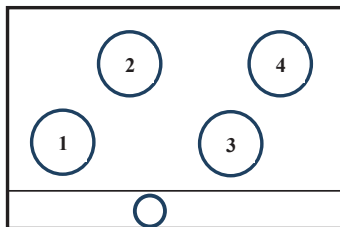
- опис запропонованих способів;
- рисунки з поясненнями, результати вимірювань і розрахунки;
- опис, що зроблено для підвищення точності результату.

Увага! Дошку використовувати *виключно* в горизонтальному положенні. Відривати шліфувальний папір від дошки *забороняється*. Ручку, надану як обладнання, розбирати *забороняється*.

8.2. Чорна скринька з ілюмінацією

Обладнання: джерело живлення; чорна скринька, всередині якої містяться 2 однакові резистори, лампа, за яскравістю якої можна спостерігати, з'єднувальні дроти нехтовно малого опору; 4 контакти, які виходять назовні зі скриньки.

Для опису експерименту поверніть чорну скриньку так, щоб ви бачили світіння лампочки, та пронумеруйте виводи схеми зліва направо: 1, 2, 3, 4 (див. рис.).



Завдання: відтворіть схему всього, що міститься в скриньці.

У звіті наведіть:

- методику проведення експерименту;
- результати спостережень і висновки з них;
- відтворену схему.

Увага! Батарейка під час тривалої експлуатації (особливо у разі короткого замикання) доволі швидко розряджається, тому всі контакти варто замикати короткочасно.

8.3. Губка — шприц

Обладнання: індивідуальне — кухонна губка (суха), шприц відомого об'єму без голки; групове — посудина з водою, нитка, скотч.

Завдання: для сухої кухонної губки визначте:

- а) масу;
- б) об'єм;
- в) середню густину.

У звіті наведіть:

- методику проведення експерименту;
- необхідні рисунки, теоретичну модель, результати вимірювань і розрахунки;

- остаточні результати;
- опис, що було зроблено для підвищення точності.

Примітка. Протягом усього експерименту губка має залишатися сухою. Набирати та зливати воду зі шприца можна довільну кількість разів. На губці за потреби можна робити позначки ручкою.

Увага! Обладнання з однієї задачі не може бути використане для розв'язання інших задач, якщо воно не прописане в переліку обладнання.

Демонстраційний тур

8.1. Нерухома пляшка

Обладнання	• Порожня сірникова коробка • Пластиковая пляшка, 0,5 л, приблизно на 1/4 заповнена водою • Металева лінійка, 30 см
Стислий опис експерименту	1. Пластикову пляшку, на третину заповнену водою, загвинчуємо кришкою 2. Ставимо пляшку догори дном на порожню коробку з-під сірників 3. Тримаючи металеву лінійку за один кінець, іншим штовхаємо коробку, діючи на неї тривалий час; при цьому коробка та пляшка зміщуються разом 4. Повторюємо дослід, але цього разу за допомогою лінійки різким рухом вибиваємо коробку з-під пляшки; при цьому пляшка залишається стояти догори дном на столі й не падає
Запитання	1. Завдяки якій властивості тіл пляшка залишається на місці? 2. Чому коробку вдається вибити з-під пляшки, а повільно вийняти, не перекинувши пляшки, дуже важко?
Час для написання відповіді	1 хв

8.2. Два мандарини

Обладнання	• Два мандарини • Дві посудини з водою
Стислий опис експерименту	1. Беремо посудину з водою та мандарин, опускаємо його у воду 2. Зауважуємо, що нечищений мандарин плаває 3. Повністю очищуємо мандарин від шкірки, опускаємо його в ту саму посудину з водою — очищений мандарин тоне 4. Звертаємо увагу глядачів, що мандарин без шкірки має меншу масу, але тоне у воді
Запитання	Чому мандарин у шкірці плаває у воді, а після очищення тоне?
Час для написання відповіді	1 хв

8.3. Сито і полум'я

Обладнання	• Сухий спирт • Спиртівка (підставка для палахкого спирту) • Сито для проціджування заварки • Сірники
Стислий опис експерименту	1. Розташовуємо перед глядачами спиртівку або металеву підставку для розпалювання сухого спирту 2. Запалюємо спирт та даємо 10–15 с, щоб спирт погорів і було добре видно полум'я — для цього за спиртівкою розміщуємо темний екран 3. Згадуємо, що полум'я — це потік йонізованого нагрітого газу 4. Розташовуємо над полум'ям металеве сито, вносимо його у полум'я, при цьому чітко бачимо полум'я під ситом, але не бачимо над ним 5. Прибираємо сито й бачимо, як витягається полум'я

	6. Звертаємо увагу глядачів, що, змінюючи розташування сита у полум'ї спиртівки, ми можемо змінювати його висоту <i>Примітка.</i> Не слід тримати сито у полум'ї довгий час, щоб воно не прогоріло
Запитання	Чому за розміщення металевого сита у полум'ї ми перестаємо бачити його над ситом?
Час для написання відповіді	1 хв

8.4. Парадокс із пляшкою

Обладнання	• Скляна пляшка з широким горлечком • Кулька для настільного тенісу • Посудина з водою
Стислий опис експерименту	1. Беремо скляну пляшку з широким горлечком, кладемо на горлечко тенісну кульку і перевертаємо пляшку догори дном 2. Демонструємо, що кулька не буде триматись на горлечку пляшки 3. Заповнюємо пляшку повністю водою (по вінця), на відкрите горлечко пляшки знову кладемо ту саму кульку й перевертаємо пляшку догори дном 4. Демонструємо, що тенісна кулька не відпадає 5. Звертаємо увагу глядачів, що в першому експерименті у пляшці над тенісною кулькою міститься стовпчик повітря, а у другому — стовпчик води, при цьому густина води значно більша за густину повітря, однак кулька не падає
Запитання	Які сили діють на кульку в другому досліді? Вкажіть їх напрямки
Час для написання відповіді	2 хв

8.5. Вага двох склянок

Обладнання	• Шалькові терези • Дві посудини (пластикові прозорі судки), 0,5 л • Два дерев'яні бруски однакової маси • Вода • Піпетка, за допомогою якої легко врівноважити воду в посудинах шляхом її переливання з однієї в другу
Стислий опис експерименту	1. Розташовуємо врівноважені шалькові терези перед глядачами 2. Зважуємо на терезах посудини, в кожна з яких налито приблизно 350 мл води; врівноважуємо терези: за допомогою піпетки відкачуємо воду із важчої посудини й переливаємо у легшу, поки не встановиться рівновага 3. Звертаємо увагу глядачів, що маси посудин з рідиною однакові 4. Розташовуємо на терезах два бруски; врівноважуємо терези: якщо маса якогось бруска менша, наклеюємо на цей брусок шматочок пластиліну, і так до врівноваження 5. Звертаємо увагу глядачів, що маси брусків однакові 6. Кладемо брусок у першу посудину так, щоб він плавав, а в другу — так, щоб він стояв у воді, торкаючись дна 7. Звертаємо увагу глядачів, що в першій посудині брусок плаває, а в другій стоїть на дні
Запитання	Вага якої системи «посудина — вода — брусок» більша?
Час для написання відповіді	1 хв

8.6. Запальничка

Обладнання	• Смушка фольги шириною 1–2 см • Вата • Свічка
-------------------	--

	• Гальванічний елемент • З'єднувальні дроти • Ножиці
Стислий опис експерименту	1. Складаємо електричне коло із гальванічного елемента, фольги та з'єднувальних дротів <i>Увага!</i> Джерело працює в режимі короткого замикання, тому коло слід замикати короткочасно 2. Кладемо фольгу на свічку, а зверху — шматочок вати; замикаємо коло — вата і свічка не загоряються 3. Робимо приблизно посередині на смужці фольги 2 надрізи у протилежних напрямках на невеликій відстані один від одного 4. Кладемо фольгу надрізаною частиною на свічку, а зверху — шматочок вати; замикаємо коло — вата спалахує і запалює свічку
Запитання	Чому після надрізування вдалось підпалити вату?
Час для написання відповіді	1 хв

8.7. Кулька, що тоне та спливає

Обладнання	• Дві посудини однакової місткості з холодною та теплою водою (харчові пластикові бокси), 1,5 л (або більше) • Кулька для настільного тенісу • Шприц
Стислий опис експерименту	1. За допомогою шприца повністю заповнюємо тенісну кульку холодною водою, після чого отвір, крізь який заливали воду, слід обов'язково заклеїти шматочком скотчу чи пластиліну 2. Звертаємо увагу глядачів, що в обидві посудини налито воду без будь-яких домішок 3. Занурюємо кульку у першу посудину (з холодною водою), при цьому вона спливає на поверхню води 4. Занурюємо кульку у другу посудину (з теплою водою), при цьому вона тоне

Запитання	Чому кулька в одній посудині з водою тоне, а в іншій спливає?
Час для написання відповіді	1 хв

8.8. Рівновага

Обладнання	• Два калориметричні тіла (алюмінієве та латунне) • Важіль • Штатив • Скріпки канцелярські • Два пластикові стаканчики з водою • Мірний циліндр
Стислий опис експерименту	1. Наливаємо воду у мірний циліндр; занурюємо по черзі калориметричні тіла у воду та демонструємо глядачам, що об'єми тіл однакові 2. Розташовуємо калориметричні тіла на шальках терезів і показуємо, що латунне тіло має більшу масу, ніж алюмінієве 3. Врівноважуємо латунне й алюмінієве тіла на терезах; звертаємо увагу глядачів, що відстань від осі обертання важеля до точки підвішування латунного тіла менша, ніж від осі обертання до точки підвішування алюмінієвого 4. Розташовуємо перед глядачами два пластикові стаканчики з водою 5. Занурюємо одночасно обидва тіла у стаканчики з водою і звертаємо увагу глядачів, що латунне тіло переважає
Запитання	Як зміниться рівновага важеля, якщо обидва тіла повністю занурити у воду? Відповідь обґрунтуйте
Час для написання відповіді	1 хв

9 клас

Теоретичний тур

9.1. Полювання

По колу з радіусом R бігає мураха з постійною за модулем швидкістю v . У певній точці цього кола перебуває ящірка. Вона дуже любить бігати за мурахами, але її швидкість u менша за v і спрямована завжди на мурашу. Згодом виявилось, що відстань між ними перестала змінюватися.

Завдання: визначте, якою стала відстань між ящіркою та мурахою.

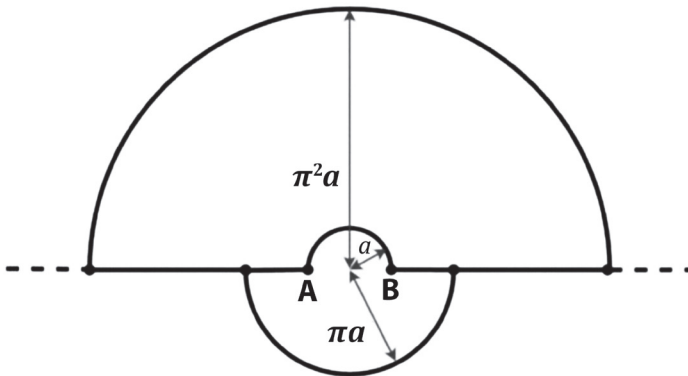
Примітка. Мурашу та ящірку слід вважати матеріальними точками.

9.2. Нескінченні π -вкола

З мідного дроту діаметром $0,1$ мм зібрали нескінченну схему, як зображено на рисунку. Вона складається з півкіл та з'єднань між ними вздовж діаметра. Кожне наступне півколо має радіус у π разів більший за попередній. Радіус найменшого півкола: $a = 50$ см.

Завдання: знайдіть опір такої нескінченної схеми між точками A та B .

Примітка. Питомий опір міді: $\rho = 0,017 \frac{\text{Ом} \times \text{мм}^2}{\text{м}}$. Слід вважати, що $\pi = 3,14$.



9.3. Не стій — стрибай!

Гумову кульку відпускають без початкової швидкості з певної висоти над горизонтальною рівною підлогою так, що кулька увесь час рухається вертикально і поступально. На скриншоті аудіозапису (див. с. 53) зафіксовано перших 6 ударів кульки об підлогу і для зручності додано більш детальну шкалу часу у вигляді клітинок. Дослідник не встиг увімкнути аудіозапис синхронно з моментом відпускання кульки.

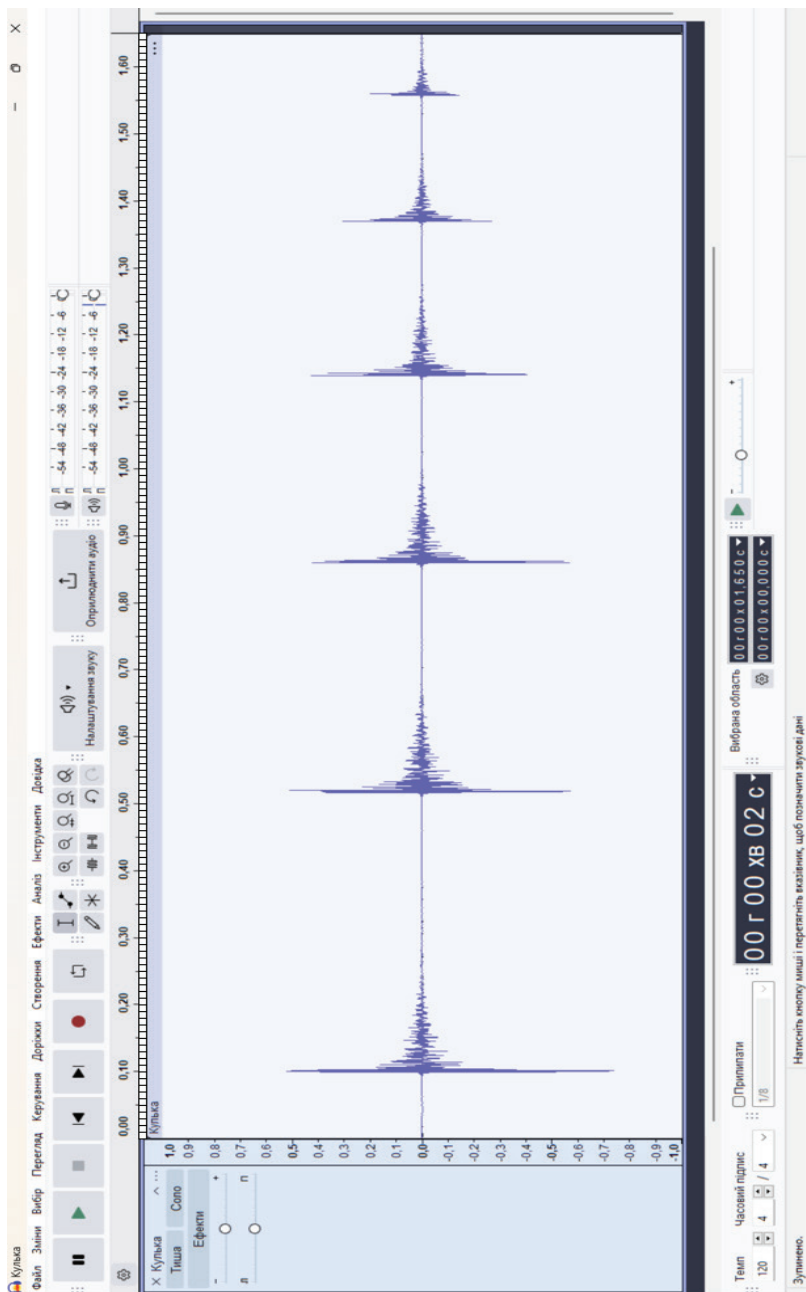
Важливою характеристикою пружного зіткнення двох тіл є коефіцієнт відновлення, що визначається як відношення швидкостей тіл до та після пружного удару.

Завдання:

- а) користуючись скриншотом, знайдіть коефіцієнт відновлення;
- б) визначте початкову висоту, з якої відпустили кульку;
- в) вкажіть шлях, пройдений кулькою до моменту п'ятого удару.

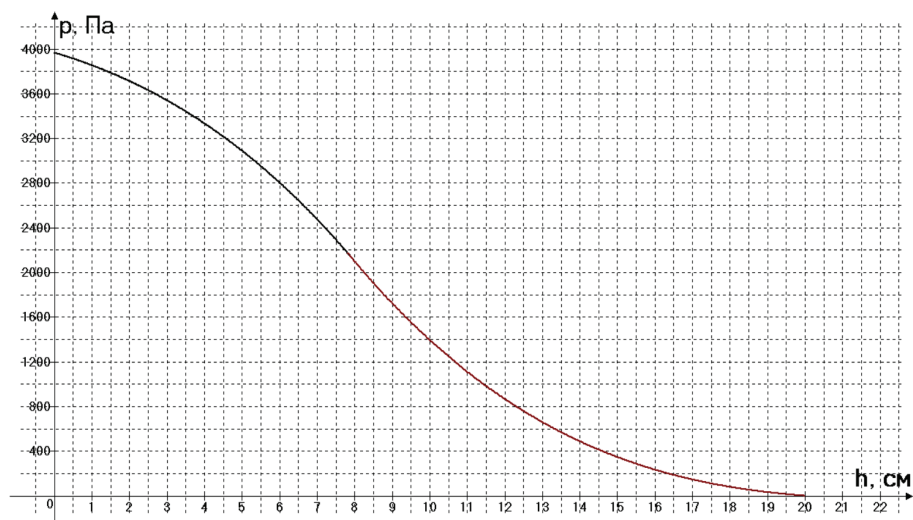
Примітка. Опором повітря під час польоту кульки можна знехтувати.

Слід вважати, що $g = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.



9.4. Спливаємо?

У велику порожню посудину кладуть симетричне відносно вертикальної осі тіло складної форми з пласкою нижньою поверхнею площею S , що прилягає до дна, і починають обережно повільно наливати воду таким чином, щоб вона не лилась згори безпосередньо на тіло, а вільно підтікала під нього. На графіку (див. рис.) зображена залежність тиску тіла на дно (відношення сили тиску до площі S) від висоти рівня рідини. Воду припиняють наливати в посудину, коли її рівень доходить до верхньої точки тіла.



Завдання 1: знайдіть густину цього тіла.

Далі тіло кладуть у точно таку саму порожню посудину, але з мулистим дном (таким, щоб вода не могла підтекти під тіло), і знову аналогічним чином обережно повільно наливають воду до верхньої точки тіла.

Завдання 2: визначте, чи зможе в цьому випадку тіло спливати.

Завдання 3: знайдіть рівень води, за якого тиск тіла на мулисте дно буде найменшим.

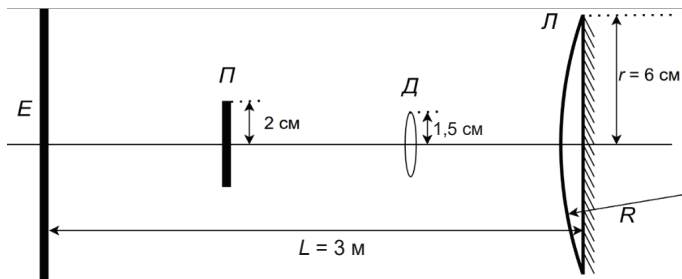
Примітка. Слід вважати, що $g = 10 \text{ м/с}^2$, а густина води: $\rho_v = 1000 \text{ кг/м}^3$. Для виконання завдань можна здійснити побудови на рисунку, тоді він стане частиною розв'язку, і вкласти його в роботу.

Увага! У жодному разі НЕ підписуйте цей аркуш.

9.5. Оптична лава

Оптична система складається з великого екрана E , непрозорої пластини $П$ у формі диска, радіус якого 2 см, джерела світла $Д$ у формі тонкого кільця, радіус якого 1,5 см, та плоско-опуклої тонкої лінзи $Л$ з радіусом оправи: $r = 6 \text{ см}$, послідовно розташованих вздовж осі системи (див. рис.). Плоска поверхня лінзи вкрита сріблом і віддзеркалює світло. Показник заломлення речовини лінзи: $n = 1,35$. Усі елементи розташовані в площинах, перпендикулярних до спільної головної оптичної осі системи, а їхні центри лежать на цій осі. Відстань від екрана до лінзи: $L = 3 \text{ м}$.

Пластину встановили на певній відстані x від екрана, після чого почали пересувати джерело світла вздовж оптичної осі. При цьому виявилось, що повна тінь на екрані зникає лише тоді, коли джерело розміщене в єдиному положенні на відстані l від екрана.



Завдання: визначте, за якого максимального значення радіуса R кривини опуклої поверхні лінзи це можливо.

Примітка. Розміри всіх елементів слід вважати набагато меншими за відстань L .

Підказка. Залежність оптичної сили плоско-опуклої тонкої лінзи від радіуса кривини її опуклої поверхні та показника заломлення задається формулою:

$$D = \frac{n - 1}{R}.$$

Експериментальний тур

9.1. Дзеркалізація у просторі

Обладнання: невеличке дзеркало; тіло у формі паралелепіпеда; лінійка; маленький шматочок пластиліну (тільки для можливої фіксації).

Завдання: запропонуйте метод визначення висоти кімнати; визначте висоту цим методом.

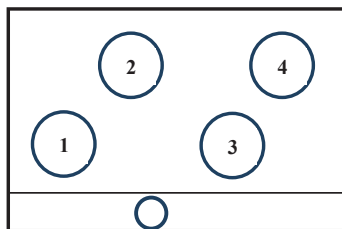
У звіті наведіть:

- методику проведення експерименту та її обґрунтування;
- необхідні рисунки;
- результати безпосередніх вимірювань;
- розрахунки остаточного результату та похибки;
- опис, що зроблено для підвищення точності результату.

Примітка. Роботу з дзеркальцем виконуйте *виключно* в межах робочого місця (парти).

9.2. Чорна скринька з ілюмінацією

Обладнання: джерело живлення; чорна скринька, всередині якої містяться 2 однакові резистори, лампа, за яскравістю якої можна спостерігати, з'єднувальні дроти нехтовно малого опору; 4 контакти, які виходять назовні зі скриньки.



Для опису експерименту поверніть чорну скриньку так, щоб ви бачили світіння лампочки, та пронумеруйте виводи схеми зліва направо; 1, 2, 3, 4 (див. рис.).

Завдання: відтворіть схему всього, що міститься в скриньці.

У звіті наведіть:

- методику проведення експерименту;
- результати спостережень і висновки з них;
- відтворену схему.

Увага! Батарейка під час тривалої експлуатації (особливо у разі короткого замикання) доволі швидко розряджається, тому всі контакти варто замикати короткочасно.

9.3. Слінки

Обладнання: вантаж відомої маси; штатив з лапкою та кільцем; металева пружина — слінки.

Завдання: якомога точніше визначте масу наданої слінки.

У звіті наведіть:

- методику проведення експерименту та її обґрунтування;
- необхідні креслення, розрахунки та результати;
- опис, що зроблено для підвищення точності результату;
- фактори, які вплинули на точність.

Примітка. На початку роботи вкажіть номер комплекту, написаний на внутрішній частині коробки.

Увага! У цій роботі не передбачено вимірювання довжини. Обладнання з однієї задачі *не може бути використане* для розв'язання інших задач, якщо воно не прописане в переліку обладнання.

Демонстраційний тур

9.1. Нерухома пляшка

Обладнання	• Порожня сірникова коробка • Пластичова пляшка, 0,5 л, приблизно на 1/4 заповнена водою • Металева лінійка, 30 см
Стислий опис експерименту	1. Пляшку, на третину заповнену водою, загвинчуємо кришкою 2. Ставимо її догори дном на сірникову коробку 3. Тримаючи металеву лінійку за один кінець, іншим штовхаємо коробку, діючи на неї тривалий час; коробка та пляшка зміщуються разом 4. Повторюємо дослід, але цього разу за допомогою лінійки різким рухом вибиваємо коробку з-під пляшки; пляшка продовжує стояти на столі догори дном, не падає
Запитання	1. Завдяки якій властивості тіл пляшка залишається на місці? 2. Чому коробку вдається вибити з-під пляшки, а повільно виїняти, не перекинувши пляшки, дуже важко?

Час для написання відповіді	1 хв
------------------------------------	------

9.2. Два мандарини

Обладнання	• Два мандарини • Дві посудини з водою
Стислий опис експерименту	1. Беремо посудину з водою та мандарин, опускаємо його у воду 2. Зауважуємо, що нечищений мандарин плаває 3. Повністю очищуємо мандарин від шкірки, опускаємо його в ту саму посудину з водою — мандарин тоне 4. Звертаємо увагу глядачів, що мандарин без шкірки має меншу масу, але тоне у воді
Запитання	Чому мандарин у шкірці плаває у воді, а після очищення тоне?
Час для написання відповіді	1 хв

9.3. Сито і полум'я

Обладнання	• Сухий спирт • Спиртівка (підставка для палахкого спирту) • Сито для проціджування заварки • Сірники
Стислий опис експерименту	1. Розташовуємо перед глядачами спиртівку або металеву підставку для розпалювання сухого спирту 2. Запалюємо спирт і даємо йому погоріти 10–15 с, щоб було добре видно полум'я — для цього за спиртівкою розміщуємо темний екран 3. Згадуємо, що полум'я — це потік йонізованого нагрітого газу 4. Розташовуємо над полум'ям металеве сито, вносимо його у полум'я; при цьому чітко бачимо полум'я під ситом, але не бачимо над ним

	5. Прибираємо сито й бачимо, як витягається полум'я 6. Звертаємо увагу глядачів, що, змінюючи розташування сита у полум'ї спиртівки, ми можемо змінювати його висоту Примітка. Не слід тримати сито у полум'ї довгий час, щоб воно не прогоріло
Запитання	Чому за розміщення металевого сита у полум'ї ми перестаємо бачити його над ситом?
Час для написання відповіді	1 хв

9.4. Парадокс із пляшкою

Обладнання	• Скляна пляшка з широким горлечком • Кулька для настільного тенісу • Посудина з водою
Стислий опис експерименту	1. Беремо скляну пляшку з широким горлечком, кладемо на горлечко тенісну кульку і перевертаємо пляшку догори дном 2. Демонструємо, що кулька не буде триматись на горлечку пляшки 3. Заповнюємо пляшку повністю водою (по вінця), на відкрите горлечко пляшки знову кладемо ту саму кульку й перевертаємо пляшку догори дном 4. Демонструємо, що тенісна кулька не відпадає 5. Звертаємо увагу глядачів, що в першому експерименті у пляшці над тенісною кулькою міститься стовпчик повітря, а у другому — стовпчик води, при цьому густина води значно більша за густину повітря, однак кулька не падає
Запитання	Які сили діють на кульку в другому досліді? Вкажіть їх напрямки
Час для написання відповіді	2 хв

9.5. Вага двох склянок

Обладнання	- Шалькові терези - Дві посудини (пластикові прозорі судки), 0,5 л - Два дерев'яні бруски однакової маси - Вода - Піпетка, за допомогою якої легко врівноважити воду в посудинах шляхом її переливання з однієї в другу
Стислий опис експерименту	- Розташовуємо врівноважені шалькові терези перед глядачами - Зважуємо на терезах посудини, в кожену з яких налито приблизно 350 мл води; врівноважуємо терези: за допомогою піпетки відкачуємо воду із важчої посудини й переливаємо у легшу, поки не встановиться рівновага - Звертаємо увагу глядачів, що маси посудин з рідиною однакові - Розташовуємо на терезах два бруски; врівноважуємо терези: якщо маса якогось бруска менша, наклеюємо на цей брусок шматочок пластиліну, і так до врівноваження - Звертаємо увагу глядачів, що маси брусків однакові - Кладемо брусок у першу посудину так, щоб він плавав, а в другу — так, щоб він стояв у воді, торкаючись дна - Звертаємо увагу глядачів, що в першій посудині брусок плаває, а в другій стоїть на дні
Запитання	Вага якої системи «посудина — вода — брусок» більша?
Час для написання відповіді	1 хв

9.6. Запальничка

Обладнання	- Смужка фольги шириною 1–2 см - Вата
-------------------	--

	• Свічка • Гальванічний елемент • З'єднувальні дроти • Ножиці
Стислий опис експерименту	1. Складаємо електричне коло із гальванічного елемента, фольги та з'єднувальних дротів Увага! Джерело працює в режимі короткого замикання, тому коло слід замикати короткочасно 2. Кладемо фольгу на свічку, а зверху — шматочок вати; замикаємо коло — вата і свічка не загоряються 3. Робимо приблизно посередині на смужці фольги 2 надрізи у протилежних напрямках на невеликій відстані один від одного 4. Кладемо фольгу надрізаною частиною на свічку, а зверху — шматочок вати; замикаємо коло — вата спалахує і запалює свічку
Запитання	Чому після виконання надрізів вдалось підпалити вату?
Час для написання відповіді	1 хв

9.7. Кулька, що тоне та спливає

Обладнання	• Дві посудини однакової місткості з холодною та теплою водою (харчові пластикові бокси), 1,5 л (або більше) • Кулька для настільного тенісу • Шприц
Стислий опис експерименту	1. За допомогою шприца повністю заповнюємо тенісну кульку холодною водою, після чого отвір, крізь який заливали воду, слід обов'язково заклеїти шматочком скотчу чи пластиліну 2. Звертаємо увагу глядачів, що в обидві посудини налито воду без будь-яких домішок 3. Занурюємо кульку у першу посудину (з холодною водою), при цьому вона спливає на поверхню води

	4. Занурюємо кульку у другу посудину (з теплою водою), при цьому вона тоне
Запитання	Чому кулька в одній посудині з водою тоне, а в іншій спливає?
Час для написання відповіді	1 хв

9.8. Рівновага

Обладнання	• Два калориметричні тіла (алюмінієве та латунне) • Важіль • Штатив • Скріпки канцелярські • Два пластикові стаканчики з водою • Мірний циліндр
Стислий опис експерименту	1. Наливаємо воду у мірний циліндр; занурюємо по черзі калориметричні тіла у воду та демонструємо глядачам, що об'єми тіл однакові 2. Розташовуємо калориметричні тіла на шальках терезів і показуємо, що латунне тіло має більшу масу, ніж алюмінієве 3. Врівноважуємо латунне й алюмінієве тіла на терезах; звертаємо увагу глядачів, що відстань від осі обертання важеля до точки підвішування латунного тіла менша, ніж від осі обертання до точки підвішування алюмінієвого 4. Розташовуємо перед глядачами два пластикові стаканчики з водою 5. Занурюємо одночасно обидва тіла у стаканчики з водою і звертаємо увагу глядачів, що латунне тіло переважає
Запитання	Як зміниться рівновага важеля, якщо обидва тіла повністю занурити у воду? Відповідь обґрунтуйте

Час для написання відповіді	1 хв
------------------------------------	------

9.9. Пташка, що п'є

Обладнання	Іграшка «Пташка, що п'є»
Стислий опис експерименту	1. Перед початком демонстрації змочити носик пташки водою і надати їй коливального руху 2. Демонструємо, що пташка здійснює циклічний рух 3. Звертаємо увагу глядачів, що під час коливань пташки налита у неї підфарбована рідина поступово підіймається з нижньої частини іграшки до верхньої 4. Демонструємо, коли амплітуда коливань іграшки найбільша, рідина досягає верхньої частини — носика пташки; у цю мить рідина швидко перетікає в нижню частину іграшки 5. Звертаємо увагу глядачів, що ця іграшка є різновидом теплового двигуна Примітка. Тепловий двигун має три функціональні частини: нагрівач, робоче тіло й холодильник
Запитання	Що для цієї моделі є нагрівачем, робочим тілом і холодильником?
Час для написання відповіді	2 хв

9.10. Аркуш і лінійка

Обладнання	• Лінійка дерев'яна, 30 см • Аркуш А4 • Тягарець, 100 г • Коробка сірників • Тенісна куля
Стислий опис експерименту	1. Лінійку кладемо на край стола так, щоб її частина виступала за край (приблизно 10 см)

	2. Розташовуємо на краю лінійки, яка лежить на столі, тягарець, а на інший кінець лінійки кидаємо з невеликої висоти (20–30 см) тенісну кульку — після удару кульки об край лінійки система «лінійка — тягарець» не відірвалась від поверхні стола 3. Розташовуємо на краю лінійки, яка лежить на столі, коробку сірників, а на інший кінець лінійки кидаємо з невеликої висоти (20–30 см) тенісну кульку — лінійка і коробка перекидаються і падають 4. Розташовуємо на краю лінійки, яка лежить на столі, аркуш А4; наголошуємо, що маса аркуша значно менша за масу коробки сірників; на інший кінець лінійки кидаємо з невеликої висоти (20–30 см) тенісну кульку — система «лінійка — аркуш» (як і в першому досліді) не перекидається і практично не відривається від поверхні стола
Запитання	Що не дає лінійці можливості відірвати аркуш паперу від поверхні стола?
Час для написання відповіді	2 хв

9.11. Летючий цвях

Обладнання	• U-подібний магніт • Залізний цвях на мотузці • Тягарець, 500 г • Дерев'яна лінійка • Залізний кутник • Штатив з лапкою
Стислий опис експерименту	1. Чіпляємо нитку до кінців цвяха, а середину нитки з допомогою скріпки — до тягарця 2. На штативі за допомогою лапки кріпимо U-подібний магніт полюсами донизу 3. Розташовуємо цвях горизонтально біля полюсів магніту так, щоб він завис у повітрі

	4. Звертаємо увагу глядачів, що цвях перебуває у рівновазі, бо сила магнітної взаємодії, яка діє на цвях, скомпенсована силою тяжіння та силою натягу нитки 5. Демонструємо, якщо розмістити дерев'яну лінійку поблизу магніту та цвяха або навіть між ними, то взаємодія цвяха і магніту не зміниться й цвях продовжуватиме «висіти у повітрі», а якщо наблизити збоку до полюсів магніту масивний залізний кутник (не торкаючись магніту), то цвях падає
Запитання	Чому порушується рівновага цвяха у разі піднесення заліза?
Час для написання відповіді	2 хв

10 клас

Теоретичний тур

10.1. Доплер-трамваї

Два однакові швидкісні трамваї їдуть назустріч один одному і час від часу подають сигнали на однаковій частоті ν_0 . Водії кожного з трамваїв вимірюють частоту прийнятих сигналів від іншого трамваю мобільними телефонами. Коли трамваї зближувалися, водій першого трамваю фіксував частоту сигналу від другого: $\nu_1 = 2323,2$ Гц. Коли ж трамваї роз'їхалися, частота звуку сигналу від другого трамваю суттєво спала: $\nu'_1 = 1694,0$ Гц. Водій другого трамваю в цей самий час побачив, що частота сигналів від першого трамваю становить: $\nu'_2 = 1687,5$ Гц.

Примітка. Слід вважати, що в обох випадках відстань між трамваями була набагато більшою, ніж відстань між коліями.

Завдання:

- а) знайдіть частоту сигналів ν_0 ;
- б) знайдіть швидкості трамваїв, зважаючи, що швидкість звуку у повітрі дорівнює 330 м/с;
- в) вкажіть, які будуть швидкості трамваїв, враховуючи, що весь час в напрямку руху першого трамваю дув вітер зі швидкістю 4 м/с.

Підказка. Коли відстань між джерелом сигналів і приймачем зменшується, приймач реєструє коротший проміжок часу між сигналами, а коли збільшується — довший. Так само змінюється і період звукових хвиль.

10.2. Клубок резисторів

Учениця знайшла клубок резисторів, з якого стирчали три контакти. Позначимо їх А, В, С. Щоб дослідити цей клубок дівчинка увімкнула джерело невідомої постійної напруги між контактами АВ й амперметр — між контактами АС, який показав струм I_1 . Не відключаючи джерела, учениця увімкнула амперметр вже між контактами ВС, і прилад зафіксував такий самий струм — I_1 . Врешті вона увімкнула амперметр послідовно з джерелом між контактами АВ, після чого він показав інший струм — I_2 .

Завдання: знайдіть силу струму, який протікатиме крізь амперметр, якщо його увімкнути послідовно з джерелом між контактами ВС.

Підказка. Амперметр та джерело вважайте ідеальними. Можна змодельовати клубок резисторів схемою з мінімально можливою їх кількістю.

10.3. Гумова електростатика

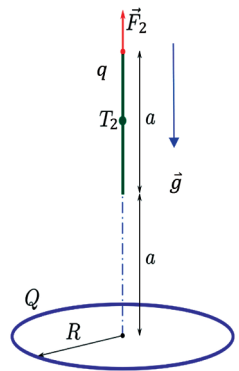
Гумове кільце з радіусом R , рівномірно заряджене зарядом Q , зафіксовано в горизонтальній площині. Діелектричний важкий стрижень довжиною a , рівномірно заряджений по довжині зарядом q протилежного знаку, розміщений на осі кільця на великій відстані від нього. Щоб утримувати стрижень в рівновазі, до його верхнього кінця прикладають силу F_1 , а сила натягу всередині дорівнює T_1 .

У другому експерименті стрижень пересунули так, щоб його нижній кінець опинився на висоті a від кільця. При цьому необхідна для утримання сила, прикладена до верхнього кінця стрижня, становила F_2 , а сила натягу всередині стрижня дорівнювала T_2 (див. рис.).

У третьому експерименті стрижень ще додатково підіймають на відстань a вгору, а гумове кільце розтягують удвічі.

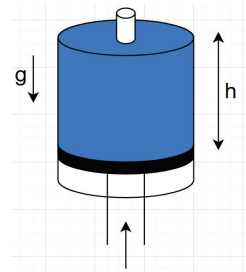
Завдання: з'ясуйте, якою силою можна тепер утримувати стрижень у рівновазі.

Примітка. Поляризацією матеріалу стрижня та деформацією можна знехтувати.



10.4. Прискорений шприц

Шприц з маленьким носиком повністю заповнили водою й утримують вертикально носиком вгору, підтримуючи поршень шприца так, щоб вода не витікала. Висота води в шприці дорівнює h , носик не заповнений, площа поперечного перерізу шприца становить S_1 , а площа перерізу носика — S_2 (S_2 можна вважати



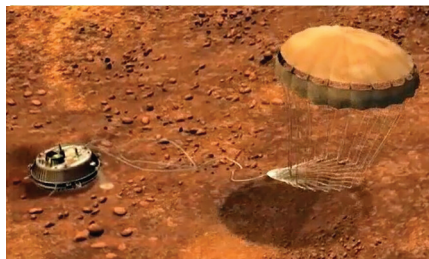
набагато меншою ніж S_1). На поршень почала діяти сила F , спрямована вертикально вгору і більша за силу, потрібну для утримання його в нерухомому стані. Через доволі короткий час під дією сили F поршень починає рухатися з невеликим прискоренням.

Завдання: знайдіть величину цього прискорення, вважаючи його сталим.

Примітка. Поверхневими явищами, в'язкістю води та тертям між поршнем і стінками шприца можна знехтувати.

10.5. Титан

370 років тому, 25 березня 1655 року, нідерландський вчений Християн Гюйгенс відкрив супутник Сатурну Титан. Титан — єдиний супутник планет Сонячної системи, що має щільну атмосферу. Крім того, атмосферний тиск на його поверхні перевищує земний майже в 1,5 рази і становить:
 $P = 146,7$ кПа.



Завдання 1: з'ясуйте, у скільки разів маса атмосфери Титану менша за масу супутника без атмосфери.

Примітка. Гравітаційна стала: $G = 6,674 \times 10^{-11} \text{ Н} \times \text{м}^2 / \text{кг}^2$, а прискорення вільного падіння на поверхні Титану — $1,352 \text{ м/с}^2$.

20 років тому, 14 січня 2005 року, космічний зонд «Гюйгенс» Європейського космічного агентства здійснив м'яку посадку на поверхню Титану. На рисунку зображено фрагмент відеоінтерпретації перших секунд після посадки зонда і падіння парашута, розрахованих на основі отриманих даних.

Завдання 2: оцініть швидкість зонда перед зіткненням з поверхнею з урахуванням того, що сила опору повітря залежить від швидкості руху зонда, густини атмосфери й площі поперечного перерізу (безрозмірний коефіцієнт пропорційності у відповідному співвідношенні вважати рівним порядку одиниці).

Примітка. Діаметр зонда: $d = 1,3$ м; маса: $m = 320$ кг. Атмосфера Титану (як і Землі) складається переважно з азоту N_2 , але її температура становить -180 °С. Універсальна газова стала: $R = 8,3$ Дж/(моль $\times$ К). Азот слід вважати ідеальним газом.

Завдання 3: врахуйте, що Титан зі швидкістю $5,6$ км/с за 16 діб робить оберт навколо Сатурну в тому самому напрямі, в якому Сатурн зі швидкістю $9,7$ км/с за 29 років обертається навколо Сонця; беручи до уваги, що орбіта Титану лежить у площині орбіти Сатурну, зобразіть у системі відліку Сонця фрагмент траєкторії Титану та визначте мінімальний і максимальний радіуси її кривини.

Експериментальний тур

10.1. Бронеплита з пінопласту

Обладнання: пластина з пінопласту; електронні ваги; металева кулька; гвинтик; штангенциркуль; лінійка, 30 см; ручка; олівець.

Завдання:

а) визначте мінімальний тиск, потрібний, щоб зробити отвір у пінопласті;

б) оцініть мінімальну швидкість, яку повинна мати металева кулька, щоб пробити пінопластову пластину (можна скористатись отриманим у попередньому пункті результатом).

У звіті наведіть:

- методику проведення експерименту та її обґрунтування;
- необхідні креслення та розрахунки;
- результати та оцінку їх точності.

Увага! Обладнання з однієї задачі *не може бути використане* для розв'язання інших задач, якщо воно не прописане в переліку обладнання.

10.2. Дизайнерський термометр

Обладнання: пробірка; корок з герметично припасованою трубкою; електронні ваги; суміш води з льодом; дві порожні посудини.

Завдання: визначте температуру повітря в приміщенні.

У звіті наведіть:

- план проведення експерименту;

- результати вимірювань і розрахунків;
- фактори, що впливають на точність, та дії для її покращення.

Примітка. У цій задачі не передбачено вимірювання розмірів.

Увага! Будьте обережними з пробкою — з неї стирчить вістря голки шприца.

10.3. Тюль

Обладнання: шматок москітної сітки в картонній оправі; листок міліметрового паперу.

Завдання: визначте товщину нитки сітки.

У звіті наведіть:

- методику проведення експерименту;
- результати вимірювань і необхідні креслення;
- фактори, які вплинули на точність кінцевого результату.

Примітка. Будьте обережні під час роботи з москітною сіткою, не допускайте її вигинів, інакше результати можуть бути суттєво неточними. Рамку зроблено спеціально для того, щоб сітка була настільки пласкою, наскільки це можливо.

Увага! Обладнання з однієї задачі не може бути використане для розв'язання інших задач, якщо воно не прописане в переліку обладнання.

Демонстраційний тур

10.1. Парадокс із пляшкою

Обладнання	• Скляна пляшка з широким горлечком • Кулька для настільного тенісу • Вода
Стислий опис експерименту	1. Беремо скляну пляшку з широким горлечком, кладемо на горлечко тенісну кульку і перевертаємо пляшку догори дном 2. Демонструємо, що кулька не буде триматись на горлечку пляшки 3. Заповнюємо пляшку повністю водою (по вінця), на відкрите горлечко пляшки знову кладемо ту саму кульку й перевертаємо пляшку догори дном

	4. Демонструємо, що тенісна кулька не відпадає 5. Звертаємо увагу глядачів, що в першому експерименті у пляшці над тенісною кулькою міститься стовпчик повітря, а у другому — стовпчик води, при цьому густина води значно більша за густину повітря, однак кулька не падає
Запитання	Які сили діють на кульку в другому досліді? Вкажіть їхній напрямок
Час для написання відповіді	1 хв

10.2. Вода у решеті

Обладнання	• Скляна пляшка з широким горлечком • Марля або бинт, складені у 2–3 шари • Гумка (для фіксації марлі на горлечку) • Зубочистки • Посудина з водою
Стислий опис експерименту	1. Заповнюємо скляну пляшку з широким горлечком повністю водою (по вінця) 2. На горлечко пляшки, заповненої водою, накладаємо марлю (бинт), складену у 2–3 шари, за допомогою гумки фіксуємо її на горлечку, щоб не сповзала 3. Нахиляємо трохи пляшку і звертаємо увагу глядачів, що вода з пляшки крізь марлю витікає 4. Перевертаємо пляшку догори дном — вода перестає витікати 5. Звертаємо увагу глядачів, що горлечко пляшки нічим, окрім марлі, не закрито, а марля має сітчасту структуру, для цього крізь отвори у марлі проштовхуємо всередину пляшки кілька зубочисток, які спливають у воді (це добре видно завдяки прозорим стінкам)
Запитання	Під дією яких сил вода утримується в пляшці, перевернутій догори дном?

Час для написання відповіді	1 хв
------------------------------------	------

10.3. Навздогін

Обладнання	• Пляшка з-під чаю (0,5 л), заповнена водою • Пляшка з-під чаю (0,5 л), заповнена сумішшю піску та пінопласту • Похила площина • Шалькові терези
Стислий опис експерименту	1. Демонструємо, що є дві повністю заповнені пляшки: перша — водою, друга — сумішшю піску та пінопласту 2. Розташовуємо пляшки на терезах і звертаємо увагу глядачів, що пляшки мають однакову масу 3. Зауважуємо, що обидві пляшки будуть скочуватись похилими площинами з однакової висоти
Запитання	Яка з пляшок раніше досягне основи похилої площини? Відповідь обґрунтуйте
Час для написання відповіді	2 хв

10.4. Світильник із сосиски

Обладнання	• Сосиска • Виделки, 2 шт. • Лабораторний автотрансформатор (ЛАТР) • Світлодіоди (кілька штук, бажано різного кольору) • З'єднувальні дроти • Подовжувач • Демонстраційний столик
Стислий опис експерименту	1. У сосиску з обох кінців вставляємо дві виделки, які за допомогою з'єднувальних дротів під'єднуємо до ЛАТРа

	2. Пояснюємо глядачам принцип роботи світлодіода: за однієї полярності напруги, яка подається на контакти світлодіода, він світиться, у разі зміни полярності — не світиться. 3. Заздалегідь в сосиску вставляємо світлодіоди: одні вставляємо так, щоб ніжки були розташовані на еквіпотенціальній поверхні електричного поля, а інші — щоб ніжки були розташовані вздовж силових ліній поля 4. Подаємо на виделки напругу і звертаємо увагу глядачів, що одні діоди світяться, а інші — ні
Запитання	Чому одні діоди, вставлені в сосиску, світяться, а інші — ні?
Час для написання відповіді	1 хв

10.5. Незвична взаємодія

Обладнання (Черненко О.)	• Кулька для настільного тенісу • М'ячик для великого тенісу
Стислий опис експерименту	1. Кидаємо кульку і м'ячик з однакової висоти (30 см) на поверхню парти (без початкової швидкості) 2. Демонструємо, що після приземлення і кулька, і м'ячик підскакують не більше, ніж на $\frac{2}{3}$ початкової висоти падіння 3. Розміщуємо кульку на м'ячику і відпускаємо з тієї самої висоти 4. Демонструємо, що після приземлення кулька відскочить значно вище за початкову висоту кидання
Запитання	Чому кулька у другому експерименті відскочила значно вище за висоту, з якої її кинуто?
Час для написання відповіді	1 хв

10.6. Фонтан навпаки

Обладнання	• Установка для демонстрації досліду (посудина з вертикальною і врізаною в неї тоншою трубками) • Склянка з підфарбованою водою
Стислий опис експерименту	1. До дна посудини, розташованої на певній висоті (приблизно 30 см) над поверхнею стола, прикріплюємо вертикальну трубку 2. У посудину наливаємо воду, а отвір трубки закорковуємо пробкою 3. Тоншу трубку, врізану у вертикальну, опускаємо в склянку з підфарбованою рідиною 4. Звертаємо увагу учнів, що вода витікатиме через трубку з верхньої посудини під дією вагового тиску стовпчика рідини
Запитання	Як змінюватиметься рівень рідини у склянці з підфарбованою водою, якщо з верхньої посудини через трубку витікатиме вода? Відповідь обґрунтуйте
Час для написання відповіді	1 хв

10.7. Запальничка № 2

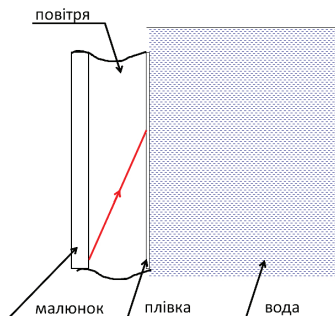
Обладнання (Сапсай В.)	• Смужка фольги шириною 1–2 см • Вата • Свічка • Гальванічний елемент • З'єднувальні дроти • Ножиці
Стислий опис експерименту	1. Складаємо електричне коло із гальванічного елемента, фольги та з'єднувальних дротів <i>Увага!</i> Джерело працює в режимі короткого замикання, тому коло слід замикати короткочасно 2. Кладемо фольгу на свічку, а зверху — клаптик вати; замикаємо коло — вата і свічка не загоряються

	3. Робимо приблизно посередині на смужці фольги 2 надрізи у протилежних напрямках на невеликій відстані один від одного 4. Кладемо фольгу надрізаною частиною на свічку, а згори — клаптик вати; замикаємо коло — вата спалахує і запалює свічку
Запитання	1. Чому після надрізування фольги вдалось підпалити вату? 2. У якому випадку (до надрізування чи після) повна потужність у колі буде більшою?
Час для написання відповіді	3 хв

10.8. Пакетик-невидимка

Обладнання	• Пакетик (невеликого розміру, щоб умістився в склянку) із зіпером • Кольоровий малюнок на маленькому аркуші паперу (має вміститись у пакетик) • Посудина з водою
Стислий опис експерименту	1. Малюнок поміщаємо у пакет, який щільно закриваємо зіпером 2. Занурюємо пакетик з малюнком у склянку з водою 3. Звертаємо увагу глядачів, що за певного кута спостереження, якщо дивитись крізь шар води, пакет виглядає дзеркальним (сріблястим), при цьому його вміст неможливо розгледіти
Запитання	Чому за певного кута спостереження неможливо розгледіти кольори малюнка? Зробіть схематичний рисунок напрямку променів, що проілюструє відповідь
Час для написання відповіді	3 хв

Рисунок-
запитання



10.9. Папір проти пластику

Обладнання	• Гравіювальна машина (на акумуляторі) • Круг, вирізаний з паперу • Пластиковий стаканчик
Стислий опис експерименту	1. У гравіювальну машину (мініелектродриль) вставляємо замість диска паперовий круг такого самого розміру 2. Звертаємо увагу глядачів, що паперовий диск м'який і у разі контакту з пластиковим стаканчиком добре гнеться 3. Вмикаємо гравіювальну машину, паперовий диск починає швидко обертатись 4. Звертаємо увагу глядачів, що паперовий диск, обертаючись і контактуючи з пластиковим стаканчиком, може легко його розрізати
Запитання	Чому під час обертання паперовий диск не гнеться і, контактуючи зі стаканчиком, ріже його?
Час для написання відповіді	1 хв

10.10. Магнітний двигун

Обладнання	• Алюмінієва внутрішня посудина калориметра • Олівець (гострий) • Три кільцеві магніти • Штатив з лапкою
-------------------	---

	Залізний предмет (будь-який, наприклад ключі чи металева кулька)
Стислий опис експерименту	1. Демонструємо, що три складені разом кільцеві магніти у разі піднесення до залізних предметів (кульки або ключів) добре їх притягують 2. Нагадуємо, що магніт не взаємодіє з алюмінієм, адже цей метал — парамагнетик 3. Алюмінієву банку перевертаємо догори дном і врівноважуємо на вістрі олівця, закріпленого вертикально у лапці штатива 4. Рухаємо магніт біля банки й демонструємо, що ніякої взаємодії між магнітом і банкою немає 5. Не торкаючись банки, рухаємо магніти по колу над дном банки — банка починає обертатись у напрямі руху магнітів 6. Звертаємо увагу глядачів, що у разі зміни напрямку колового руху магнітів, зміниться й напрям обертання банки
Запитання	Які фізичні явища спричиняють обертання банки? Опишіть їх і вкажіть послідовність
Час для написання відповіді	2 хв

10.11. Перекидань

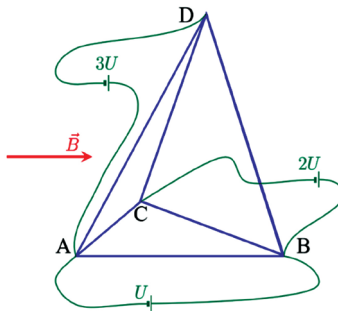
Обладнання	- Іграшка-перекидань - Похила площина
Стислий опис експерименту	1. З паперу і металевої кульки робиться конструкція: порожня коробочка, всередині якої може кататись металева кулька 2. Кладемо конструкцію на похилу площину — іграшка не ковзає, а починає перекидатися
Запитання	У чому секрет іграшки?
Час для написання відповіді	2 хв

11 клас

Теоретичний тур

11.1. Електромагнітна стереометрія

Правильний тетраедр $ABCD$ із довжиною ребра l виготовлено з однорідного дроту (опір кожного ребра тетраедра R). Між точками A і B приєднують ідеальне джерело з напругою U , між точками B і C — ще одне джерело з напругою $2U$, а між точками A і D — третє джерело з напругою $3U$. Тетраедр розташований в однорідному магнітному полі, вектор індукції якого $\vec{B}$ направлений вздовж ребра AB .



Завдання:

- а) визначте електричний опір тетраедра між двома його вершинами;
- б) знайдіть силу струму у кожному ребрі тетраедра;
- в) доведіть, що сила Ампера, яка діє на тетраедр, дорівнює силі Ампера, що діє на прямий провідник, який з'єднає точки підключення напруги;
- г) знайдіть силу, яка діє на тетраедр з боку зовнішнього однорідного магнітного поля.

Підказка. Можна використати твердження з пункту в), навіть якщо ви не змогли його довести.

11.2. Схематозне безумство

Коливний контур, зображений на рисунку 1, складається з двох конденсаторів: $C = 1000$ мкФ, котушки індуктивності: $L = 0,1$ Гн та ключа. Спочатку ключ був розімкнутий, а заряд на кожному конденсаторі дорівнював: $q = 1$ мкКл.

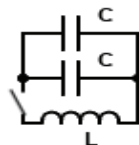


Рисунок 1

Завдання 1: визначте максимальний струм через котушку $I_{\max}$ після замикання ключа.

Змінимо контур і приєднаємо до кожного елемента коливного контуру резистор з опором: $R = 10 \text{ Ом}$ (див. рис. 2). У певний момент часу виконуються умови: $\frac{dI_L}{dt} = 0$, $I_1 = 10 \text{ А}$, $I_2 = 12 \text{ А}$.

Завдання 2: обчисліть, яка максимальна кількість теплоти Q може виділитися в системі, починаючи з цього моменту часу.

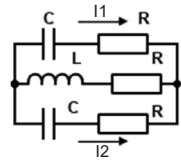


Рисунок 2

Додатково модифікуємо контур, замінимо резистори з опором $R = 10 \text{ Ом}$ на резистори різного опору і під'єднаємо контур до джерела змінної напруги з відомим амплітудним значенням U_0 та циклічною частотою ω (див. рис. 3). Відомо, що параметри системи зв'язані між собою співвідношенням: $\frac{1}{C_1 \omega R_1} = \frac{\omega L}{R_3} = \sqrt{3}$.

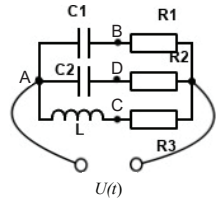


Рисунок 3

Завдання 3: виразіть амплітудні значення U_{CA} та U_{BA} через U_0 після встановлення коливальних.

11.3. Інопланетний диск

Космічна станція інопланетян, що має форму тонкого плаского диска, готується до подорожі галактикою.

Штучна гравітація. Інопланетяни мають великі запаси енергії й розв'язали проблему відсутності гравітації: розігнали свою станцію так, щоб на ній відчувалось прискорення: $a = 15 \text{ м/с}^2$.

Завдання 1: враховуючи, що станція стартує біля центру галактики, обчисліть швидкість, яку вона набере відносно цього центру, коли за галактичним годинником пройде: $t = 2 \times 10^7 \text{ с}$.

Примітка. Швидкість світла у вакуумі: $c = 3 \times 10^8 \text{ м/с}$.

Зіткнення. Безпосередньо перед стартом, коли станція ще не оберталась, інопланетяни помічають поблизу астероїд з масою m , що летить в їхній бік.

Завдання 2: врахуйте, що удар астероїда абсолютно не пружний, а безпосередньо перед зіткненням він перебував на відстані b від центра станції й мав невелику швидкість v , спрямовану перпендикулярно до

площини її диска, і знайдіть, в яких місцях на станції не відчувалось прискорення від удару.

Примітка. Маса станції M , момент інерції однорідного диска відносно осі, що проходить крізь центр мас і лежить в площині диска, дорівнює $MR^2/4$.

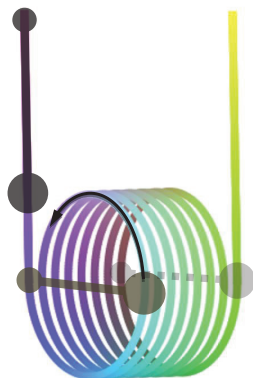
Також може знадобитись інтеграл: $\int (1 - x^2)^{-3/2} dx = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} + C$.

11.4. Від гвинта!

На рисунку зображено жорсткий дріт у вигляді фрагмента гвинтової лінії з розпрямленими вертикальними кінцями. На дріт настромлені дві кульки, шарнірно з'єднані легким стрижнем максимально можливою довжиною, що дає можливість цій «гантельці» рухатись вздовж гвинтової лінії. У початковому положенні нижня кулька (більшого розміру) утримувалась на рівні верхніх частин витків дроту. Кульки відпускають.

Завдання 1: знайдіть час руху «гантельки» вздовж дуг гвинтової лінії, тобто від одного крайнього горизонтального положення стрижня до іншого (див. рис.).

Примітка. Слід вважати, що маси кульок однакові, а відстань між витками гвинтової лінії набагато менша за її радіус. Силами тертя, опору повітря, розміром кульок можна знехтувати. Прискорення вільного падіння: $g = 9,8 \text{ м/с}^2$, радіус гвинтової лінії: $R = 20 \text{ см}$. Наведений рисунок є схематичним, але кількість витків на ньому вказано точно.



Розглянемо випадки, коли більша за розміром кулька має втричі більшу масу, а відстань між витками: $h = 18 \text{ см}$.

Завдання 2: розрахуйте, на яку максимальну висоту підніметься більша кулька після проходження гвинтової лінії.

Завдання 3: визначте період малих коливань кульок через великий проміжок часу, враховуючи, що внаслідок малих сил тертя й опору рух кульок поступово сповільнюється.

Увага! Не забудьте врахувати зміну довжини «гантельки».

Підказка. Відстань між витками: $h = 18$ см, вимірюється вона вздовж осі симетрії гвинтової лінії, а радіус R — у перпендикулярному напрямку.

11.5. День / ніч

Космічна експедиція дісталася зоряної системи, що складається з центральної масивної зорі (З), однієї планети (П) та її супутника (С). Радіус планети дорівнює 6000 км, радіус супутника — 1000 км. Супутник рухається коловою орбітою з радіусом 400 000 км. Середня густина планети й супутника однакова: $\rho = 5000$ кг/м³. Відстань від планети до зорі становить кілька сотень мільйонів кілометрів. Доба на планеті триває 12 земних годин, вісь добоного обертання утворює прямий кут з площиною A орбіти планети навколо зорі. Експедиція вимірює прискорення вільного падіння на планеті. Гравітаційна стала дорівнює: $6,67 \times 10^{-11} \frac{\text{Н} \times \text{м}^2}{\text{кг}^2}$.

Завдання 1: з'ясуйте, на скільки відсотків відрізняється прискорення вільного падіння на полюсі й на екваторі внаслідок добоного обертання планети.

Завдання 2: оцініть, на скільки відсотків *може* відрізнятись прискорення вільного падіння у різних точках екватора внаслідок гравітаційного впливу супутника планети.

Супутник є кулею без атмосфери, кожна маленька ділянка поверхні якої поглинає 40 % енергії падучого світла в будь-якому діапазоні довжин хвиль, а решту відбиває в усіх напрямках таким чином, що всі освітлені частини диска супутника здалеку виглядають однаково яскравими. Нехай α — це кут між напрямками «супутник — зоря» (С–З) і «супутник — планета» (С–П). Площина орбіти руху супутника навколо планети збігається з площиною A , а можливість затемнень можна не враховувати. Експедиція спостерігає за змінами освітленості E точки екватора планети протягом тривалого часу.

Завдання 3: визначте залежність відношення $\frac{E_{\text{ніч}}}{E_{\text{день}}}$ від α , де $E_{\text{ніч}}$, $E_{\text{день}}$ — освітленість, відповідно, опівночі й опівдні за однакового значення кута α , і накресліть схематичний графік цієї залежності.

Експериментальний тур

11.1. Криптоніт

Обладнання: штангенциркуль пластиковий; магнітометр з мультиметром і джерелом живлення (див. інструкцію з використання магнітометра); магніт (південний полюс позначений синьою точкою); викрутка; підкладки для регулювання висоти; два аркуші міліметрового паперу; досліджуваний зразок — криптоніт; шматок двостороннього скотчу для кріплення криптоніту; ножиці (групове).

Вказівка. Запропоновані для дослідження зразки криптоніту, мабуть, були завезені на Землю прибульцями, оскільки матеріали з такими магнітними властивостями ніколи не траплялись дослідникам раніше. Криптоніт буває двох видів: північний і південний (північним називають той, до якого з обох боків (полюсів) притягується південний кінець стрілки компаса). Зразки одного виду відштовхуються, а різних видів — притягуються, незалежно від того, якими поверхнями прикладати один до одного. Дехто з дослідників висловив припущення, що криптоніт містить магнітні монополі (магнітні заряди): північний — одного знаку, а південний — протилежного, які взаємодіють аналогічно точковим електричним зарядам.

Завдання: для з'ясування магнітних властивостей досліджуваного зразка криптоніту:

- складіть установку й установіть нуль на шкалі магнітометра, проградуйте магнітометр (встановіть коефіцієнт пропорційності між індукцією магнітного поля та показами мультиметра), використовуючи наявний магніт (на відстані 4,2 см від полюса магніту вздовж його осі індукція магнітного поля становить 1 мТл);

- визначте вид досліджуваного зразка криптоніту (північний чи південний);

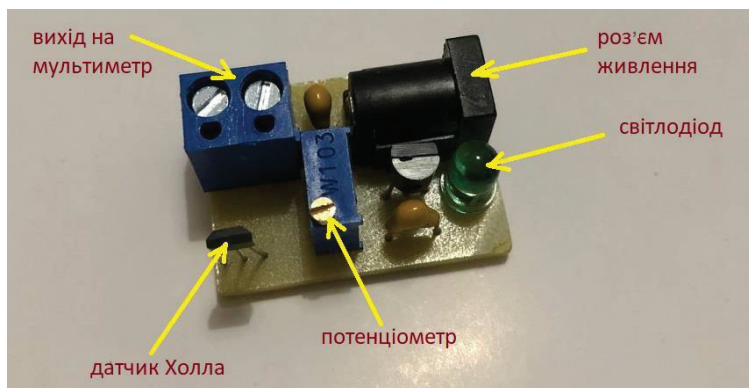
- встановіть залежність індукції магнітного поля *магніту* від відстані між центром магніту і магнітометром; вважаючи цю залежність степеневою, визначте показник степеня; порівняйте залежність індукції магнітного поля магніту від відстані з теоретичною залежністю від напруженості поля електричного диполя;

- встановіть залежність індукції магнітного поля криптоніту від відстані до магнітометра і визначте показник цієї залежності, вважаючи її степеневою;
- спираючись на результати попереднього пункту, перевірте припущення, що зразок криптоніту містить магнітний монополь;
- запропонуйте гіпотезу щодо внутрішньої структури зразка криптоніту.

Примітка. Звичайний магніт можна розглядати як диполь, бо він має два полюси аналогічно електричному диполю.

Інструкція з використання магнітометра

Магнітометр, що застосовується для розв'язання задачі, побудований на основі датчика Холла. Принцип його роботи полягає у відхиленні носіїв заряду (електронів або дірок) силою Лоренца під час проходження струму крізь напівпровідник за наявності перпендикулярного магнітного поля. Внаслідок такого відхилення виникає поперечна різниця потенціалів, пропорційна індукції магнітного поля. Мікросхема 49 Е містить такий датчик і підсилювач напруги. Чутливий до магнітного поля елемент розміщений у центрі корпусу датчика Холла.



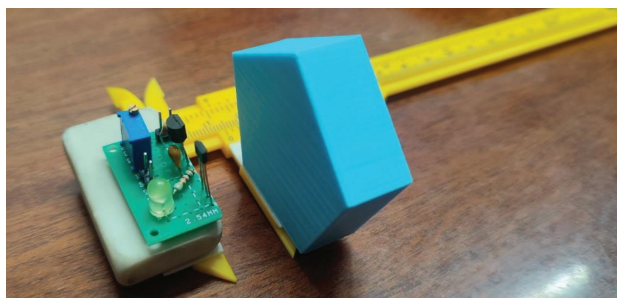
Для початку роботи магнітометра потрібно подати на нього напругу живлення 6–15 В, а до вихідного конектора (синього кольору) за допомогою викрутки під'єднати щупи мультиметра.

Увага! Затискаючи гвинти, не докладайте надмірних зусиль: надійний контакт забезпечується за легкої фіксації щупів.

Мультиметр працює в режимі вольтметра. Необхідний діапазон вимірювання обираємо залежно від величини магнітного поля. Наявність напруги живлення показує світлодіод.

За допомогою потенціометра і викрутки встановлюється нульова вихідна напруга (за відсутності магнітного поля).

Для виконання вимірювань магнітометр і досліджуваний зразок прикріплюємо до губок штангенциркуля за допомогою двостороннього скотчу. Використовуємо додаткові підкладки для того, щоб датчик Холла і центр зразка розміщувались на одній висоті.



11.2. Конденсаторна чорна скринька

Обладнання: чорна скринька, що має 2 виводи, резистор і конденсатор; батарейка; резистор; з'єднувальні дроти; мультиметр; секундомір.



Завдання:

- встановити, як з'єднані у скриньці резистор і конденсатор (послідовно чи паралельно);
- визначити внутрішній опір мультиметра в режимі вольтметра у діапазоні до 20 В;
- встановити ємність конденсатора;
- визначити опір резистора (того, що у чорній скриньці).

У звіті наведіть: застосовану методику експерименту й оцінку її ефективності; рисунки, результати вимірювань, розрахунок результату; опис, що саме зроблено для покращення точності результату.

Інструкція з використання мультиметра

Мультиметр DT-9208A — багатофункціональний електровимірювальний прилад, за допомогою якого можна вимірювати силу струму, напругу (як постійні, так і змінні), опір, ємність, частоту; перевіряти справність напівпровідникових діодів і біполярних транзисторів; з допомогою зовнішньої термопари вимірювати температуру.

Потрібний тип вимірювання задається обертовим перемикачем у центрі передньої панелі. Мультиметр вмикається і вимикається жовтою клавішею «ON/OFF» у лівому верхньому кутку. Один щуп підключають до клеми «COM» — загальний, мінус, а другий — до клеми, позначеної:

- «V Ω Hz» — для вимірювання напруги, опору чи частоти;
- «mA», «20A» — для вимірювання сили струму (залежно від його величини).

Якщо полярність напруги або струму виявиться протилежною до описаної вище, то на екрані з'являється знак «—» перед вимірюваною величиною. Якщо вимірювана величина перевищує межі обраного діапазону вимірювання, то на екрані з'являється «OL». Це відбувається, наприклад, у випадку, коли мультиметр перевели в режим вимірювання опору («зелені» положення перемикача в лівому верхньому секторі, позначені символом « Ω »), а вимірюваний опір не під'єднали, або коли величина опору виходить за межі обраного діапазону.

Мультиметр має захист від неправильного приєднання або перевищення діапазону вимірювання в розумних межах, окрім режимів вимірювання сили струму. Тому під час вимірювання сили струму подбайте, щоб вона не перевищувала встановлений діапазон вимірювання. Наприклад, не можна приєднувати мультиметр у режимі вимірювання сили струму до батарейки без обмежувального опору, бо він може вийти з ладу.

Похибка під час вимірювання мультиметром, згідно з інформацією від виробника, становить 1–2 одиниці найменшого розряду індикації (для різних діапазонів вимірювання).

Під час розв'язування задачі варто використовувати всі можливості мультиметра, але слід пам'ятати, що вольтметр і амперметр у мультиметрі не є ідеальними, тобто мають певний внутрішній опір, який може залежати від діапазону вимірювання.

Розв'язання задач

8 клас

Теоретичний тур

8.1. Нашестя кульок

Розв'язання. З огляду на те, що після перерізування нитки положення кульок не змінилось, сила натягу цієї нитки у стані рівноваги дорівнювала 0 (нитка не натягнута). Отже, кожна кулька утримувалась у стані рівноваги дією сил тяжіння, Архімеда та кулонівської взаємодії. З урахуванням того, що кульки набули однойменних зарядів, вони повинні відштовхуватись, отже, кулька з меншою густиною мала б бути насаджена на стрижень нижче, ніж з більшою густиною.

З умови рівноваги кожної кульки:

$$m_1 g = F_{\text{ел}} + F_{\text{Арх1}};$$

$$m_2 g + F_{\text{ел}} = F_{\text{Арх2}}.$$

Додавши два рівняння, отримаємо:

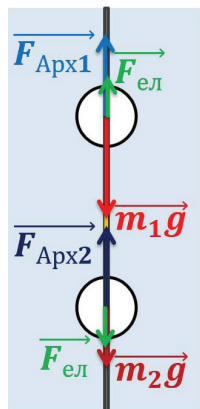
$$\rho_p g V_1 - m_1 g + \rho_p g V_2 - m_2 g = 0.$$

Ділимо обидві частини рівняння на gV_2 :

$$\rho_p \frac{V_1}{V_2} - \rho_1 \frac{V_1}{V_2} + \rho_p - \rho_2 = 0;$$

$$\frac{V_1}{V_2} (\rho_p - \rho_1) = \rho_2 - \rho_p;$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\rho_p - \rho_2}{\rho_1 - \rho_p} = \frac{1000 - 240}{1200 - 1000} = \frac{760}{200} = 3,8.$$



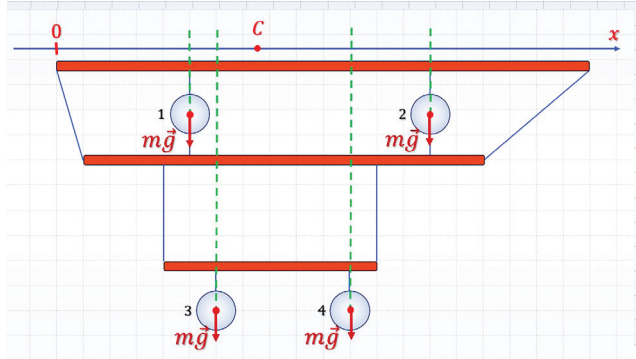
8.2. Гірлянда

Розв'язання:

а) це завдання можна розв'язати двома способами.

Спосіб 1. Позначимо масу кожної кулі як m , а довжину сторони клітинки — l . Скористаємося умовою рівноваги: сума моментів усіх зовнішніх сил, які обертають важіль проти руху годинникової стрілки,

дорівнює сумі моментів усіх зовнішніх сил, які обертають важіль за рухом годинникової стрілки (буде зручніше, якщо прирівняти алгебраїчну суму моментів до нуля). Таких зовнішніх сил тут чотири — сили тяжіння, що діють на кожну кулю. На рисунку вертикальним пунктиром зображено *лінії дії* цих сил. Точка C (її координату x_C слід знайти) вказує, де саме проходить вісь обертання (цвях). Плече кожної сили тяжіння дорівнює модулю різниці координати x_C і координати центра відповідної кулі (x_1, x_2 тощо).



Умова рівноваги має такий вигляд:

$$mg(x_C - x_1) + mg(x_C - x_3) = mg(x_2 - x_C) + mg(x_4 - x_C).$$

Як бачимо з рисунка:

$$x_1 = 5l, x_2 = 14l, x_3 = 6l, x_4 = 11l.$$

Отже, після підставлення отримуємо:

$$x_C = 9l.$$

Саме таку координату має вісь обертання системи (тобто отвір і цвях). Вони розташовані на відстані 9 клітинок від лівого кінця верхнього стрижня (чи на відстані 11 клітинок від правого кінця).

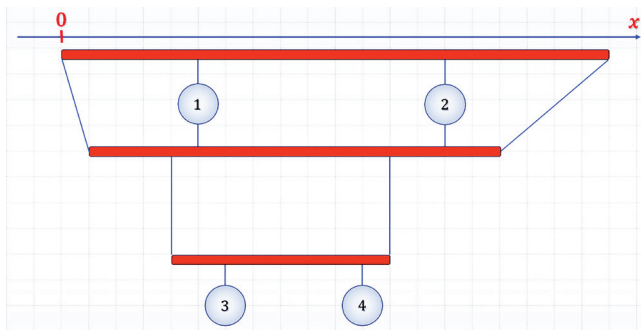
Легко переконатися, що спроба розташувати вісь обертання десь на іншій частині верхнього стрижня (не між x_3 і x_4) буде невдалою.

Також невдалою буде спроба визначити сили натягу ниток, розташованих між верхнім і середнім стрижнями (для цього потрібні дані, відсутні в умові задачі);

Спосіб 2. Позначимо масу кожної кулі як m , а довжину сторони клітинки — l . Пригадаємо, що у стані рівноваги (стійкої) центр ваги системи (точка C) займає найнижче з усіх можливих положень. Якщо система може

обертатися навколо нерухомої осі, то в рівновазі центр ваги обов'язково має бути на вертикалі, що проходить через вісь обертання.

У нашому випадку знайти положення центра ваги дуже легко (тим більше, що цікавить тільки горизонтальна координата цієї точки). Не будемо навіть застосовувати загальні формули.



Центр ваги *однакових* куль 1 і 2 має координату:

$$x_{C\ 1,2} = \frac{x_{C1} + x_{C2}}{2} = \frac{5l + 14l}{2} = 9,5l.$$

Аналогічно знаходимо центр ваги куль 3 і 4:

$$x_{C\ 3,4} = \frac{x_{C3} + x_{C4}}{2} = \frac{6l + 11l}{2} = 8,5l.$$

Оскільки тіла 1, 2 і 3, 4 мають однакові маси, легко знайти координату центра ваги всієї системи:

$$x_C = \frac{x_{C\ 1,2} + x_{C\ 3,4}}{2} = \frac{9,5l + 8,5l}{2} = 9l.$$

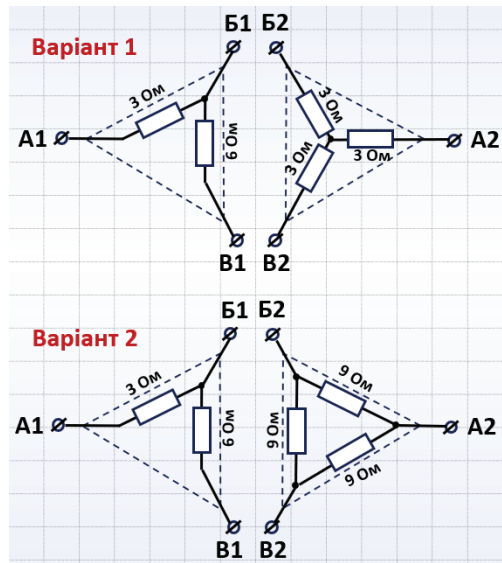
Саме таку координату має вісь обертання системи (тобто отвір і цвях). Вони розташовані на відстані 9 клітинок від лівого кінця верхнього стрижня (чи на відстані 11 клітинок від правого кінця);

б) тепер до зовнішніх сил, які діють на систему, додаються сили Архімеда, що діють на кожен кулю (виштовхувальною силою, яка діє на стрижні, можна знехтувати, оскільки за умовою задачі вони дуже тонкі). Очевидно, що кожна сила Архімеда за модулем втричі менша, ніж сила тяжіння кожної кулі. Отже, умовно все зводиться до зменшення ваги кожної кулі на величину сили Архімеда. Головне — ці сили лишаються *однаковими* й лінії дії цих сил *не змінюються*. Таким чином, отримана в пункті а) відповідь є справедливою.

8.3. Електрична комбінаторика

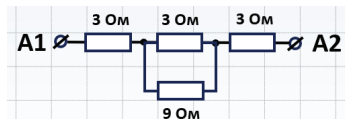
Розв'язання:

а) добирання можливих варіантів для вмісту ЧС-1 стане легким, якщо звернути увагу, що опір між клемми A1 і B1 дорівнює сумі двох інших опорів між клемми. Тому «найтекономніша» схема складається тільки з двох резисторів з опором 3 і 6 Ом. Що ж до вмісту ЧС-2, то достатньо звернути увагу на однакові значення всіх опорів між клемми. Тут можливі два варіанти стандартних схем (зображено на рисунку) — зірка або трикутник. Легко переконалися, що обійтися меншою кількістю резисторів неможливо.



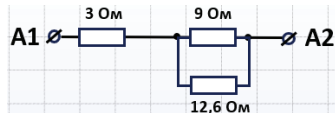
Таким чином, найменша можлива кількість застосовних резисторів — це 2 резистори в ЧС-1 і 3 резистори в ЧС-2;

б) для визначення опору «об'єднаного» кола між клемми A1 і A2 варіант 1 є зручнішим. Еквівалентну схему можна легко побудувати.



З наведеної схеми легко отримати повний опір кола: $R = 8,25 \text{ Ом}$.

Наведемо розрахунок, що спирається на варіант 2. Після з'єднання клем Б1 і Б2, В1 і В2 резистори з опором 6 і 9 Ом з'єднані паралельно і їх можна замінити одним резистором з опором 3,6 Ом. Послідовно з цим резистором у колі з'єднаний резистор з опором 9 Ом, тому остаточна еквівалентна схема набуває такого вигляду.



$$\text{Повний опір кола: } R = 3 + \frac{9 \times 12,6}{9 + 12,6} = 8,25 \text{ Ом.}$$

8.4. Балістична гіпотеза

Розв'язання. Для того, щоб можна було спостерігати одну планету у двох діаметрально протилежних точках (як зображено на рисунку), світло, випущене в цих двох точках, має доходити до спостерігача одночасно, тобто:

$$\frac{l}{c - V} = \frac{l}{c + V} + T \left(\frac{1}{2} + n \right),$$

де T — період обертання планети; другий доданок праворуч — це час між випусканням світла з правої та лівої точок, який має дорівнювати половині періоду плюс певна ціла кількість обертів n .

Звідси:

$$T = \frac{4lV}{(1 + 2n)(c^2 - V^2)} = \frac{2\pi R}{V}.$$

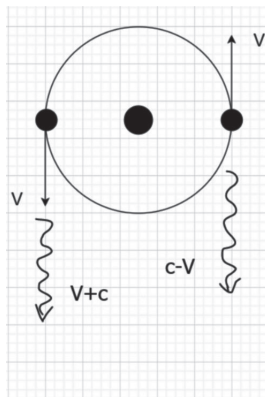
Здійснимо перетворення:

$$\begin{aligned} \frac{4lV}{(1 + 2n)(c^2 - V^2)} &= \frac{2\pi R}{V}, \\ \frac{4lV^2}{(1 + 2n)(c^2 - V^2)} &= 2\pi R, \end{aligned}$$

$$4lV^2 = 2\pi R(1 + 2n)c^2 - 2\pi R(1 + 2n)V^2,$$

$$4lV^2 + 2\pi R(1 + 2n)V^2 = 2\pi R(1 + 2n)c^2,$$

$$V^2(4l + 2\pi R(1 + 2n)) = 2\pi R(1 + 2n)c^2,$$



$$V = \sqrt{\frac{2\pi R(1+2n)c^2}{4l + 2\pi R(1+2n)'}}$$

$$V = c \times \sqrt{\frac{2\pi R(1+2n)}{4l + 2\pi R(1+2n)'}}$$

$$V = c \times \sqrt{\frac{1}{\frac{2l}{(1+2n)\pi R} + 1}}$$

За умовою задачі: $V \leq \frac{c}{100}$.

Звідси:

$$c \times \sqrt{\frac{1}{\frac{2l}{(1+2n)\pi R} + 1}} \leq \frac{c}{100}$$

$$\frac{c}{\sqrt{\frac{2l}{(1+2n)\pi R} + 1}} \leq \frac{c}{100}$$

$$\sqrt{\frac{2l}{(1+2n)\pi R} + 1} \geq 100.$$

Врахуємо, що $\frac{l}{R} = 10^5$. З допомогою прямої перевірки доходимо висновку, що ця умова задовольняється лише у разі, коли $n = 0, 1, 2$.

Тоді можливі періоди:

$$\begin{aligned} T = \frac{2\pi R}{V} &= \frac{2\pi R}{c} \times \sqrt{\frac{2l}{(1+2n)\pi R} + 1} = \frac{2\pi R}{c} \times \sqrt{1 + \frac{2 \times 10^5}{(1+2n)\pi}} \approx \\ &\approx \frac{2\pi R}{c} \times \sqrt{\frac{2 \times 10^5}{(1+2n)\pi}}, \end{aligned}$$

де $n = 0, 1, 2$.

8.5. Практика проти теорії

Розв'язання:

а) розглянемо процеси плавлення та кристалізації. Зрозуміло, що без врахування теплових втрат його тривалість τ_2 може бути знайдена через закон збереження енергії: $P\tau_2 = \lambda m$. Оскільки температуру під час фазового переходу вважаємо постійною, а потужність теплових втрат пропорційна різниці температур криптоніту й навколишнього середовища, то запис закону збереження енергії під час плавлення та кристалізації дає систему рівнянь, завдяки якій можна знайти значення τ_2 :

$$\begin{cases} P\tau'_2 = \lambda m + k(t_{\text{пл}} - t_{\text{кімн}})\tau'_2, \\ k(t_{\text{пл}} - t_{\text{кімн}})\tau''_2 = \lambda m, \\ P\tau_2 = \lambda m, \end{cases}$$

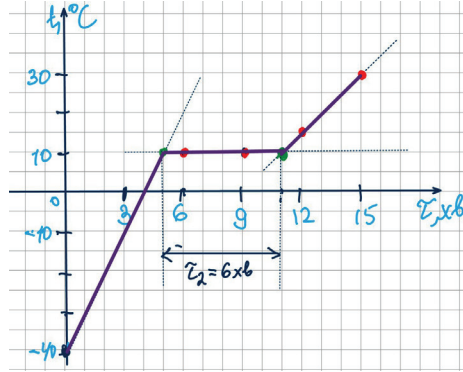
де τ'_2 і τ''_2 — це час плавлення та кристалізації в реальних умовах.

Розв'язавши систему, отримуємо: $\tau_2 = \frac{\tau'_2 \tau''_2}{\tau'_2 + \tau''_2} = 6$ хв;

б) цілком зрозуміло з таблиці, що температура плавлення криптоніту дорівнює 10°C , тому легко (або аналітично, або графічно) знайти точку перетину ліній плавлення та нагрівання рідкої речовини й побачити, що плавлення скінчилося на 11-й хвилині після початку спостереження, а тривалість третього етапу в ідеалізованих умовах: $\tau_3 = 4$ хв (що відповідає нагріванню на 20°C). У попередньому пункті було розраховано тривалість ідеалізованого плавлення: $\tau_2 = 6$ хв. Тобто нагрівання твердої фази тривало: $\tau_1 = 5$ хв (разом 15 хв за умовою), за які тіло нагрілося на 50°C . З таких міркувань шуканий графік оформлюємо у вигляді ламаної з трьох відрізків лінії (див. рис.).

Запишемо баланс енергій для всіх трьох процесів за відсутності теплообміну з повітрям:

$$\begin{cases} Q_1 = P\tau_1 = (C + c_{\text{тв}} m)\Delta t_1, \\ Q_2 = P\tau_2 = \lambda m, \\ Q_3 = P\tau_3 = (C + c_{\text{рід}} m)\Delta t_3, \\ c_{\text{рід}} = 3c_{\text{тв}}. \end{cases}$$



Розв'язавши цю систему, отримуємо:

$$c_{\text{тв}} = 500 \text{ Дж}/(\text{кг} \times ^\circ\text{C}), c_{\text{рід}} = 1500 \text{ Дж}/(\text{кг} \times ^\circ\text{C});$$

$$Q_1 = Q/3; Q_2 = 2Q/5; Q_3 = 4Q/15Q,$$

де $Q = 60 \text{ кДж}$ — шукана кількість теплоти;

$$P = 200/3 \text{ Вт} \text{ — потужність нагрівача;}$$

$$\lambda = 60 \text{ кДж/кг} \text{ — питома теплота плавлення криптоніту;}$$

в) оскільки тривале нагрівання не дало можливості нагріти посудину з рідким криптонітом вище ніж 28°C , це означає, що за цієї температури вся потужність нагрівача йде на передавання тепла зовнішньому середовищу:

$$P = k (t_{\text{макс}} - t_{\text{кімн}}).$$

Об'єднавши це рівняння з рівняннями:

$$P\tau'_2 = \lambda m + k (t_{\text{пл}} - t_{\text{кімн}})\tau'_2,$$

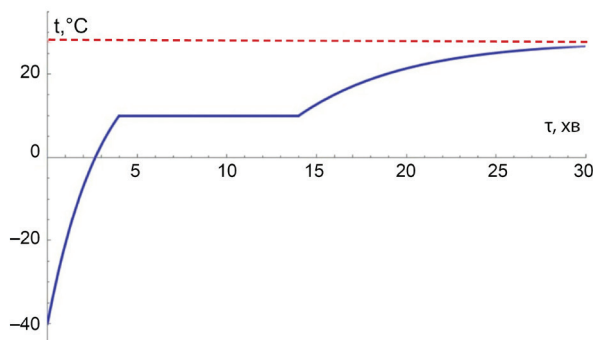
$$k (t_{\text{пл}} - t_{\text{кімн}})\tau''_2 = \lambda m,$$

отримуємо температуру в доволі холодному гаражі:

$$t_{\text{кімн}} = t_{\text{пл}} - (t_{\text{макс}} - t_{\text{пл}}) \frac{\tau'_2}{\tau''_2} = -2^\circ\text{C};$$

г) для побудови графіка врахуємо, що потужність теплових втрат пропорційна різниці температур криптоніту й навколишнього середовища. Тоді для інтервалу температур від -40°C до -2°C навколишнє середовище зумовлює пришвидшення нагрівання, а від -2°C до 28°C , навпаки, сповільнення. Такий вплив призводить до того, що процес нагрівання твердої фази завершиться швидше, а процеси плавлення й нагрівання рідкої речовини триватимуть довше, причому після позначки

28 °C лінія графіка стає горизонтальною. Відповідно, вплив теплообміну з навколишнім середовищем зображено на графіку як різкий підйом на етапі нагрівання до $-2\text{ }^{\circ}\text{C}$ і повільного після $-2\text{ }^{\circ}\text{C}$, що свідчить про викривлення графіка.



Експериментальний тур

8.1. Ручка-стрибунець

Розв'язання. Визначаємо положення стрижня ручки, за якого вона підстрибує на максимальну висоту.

Проводимо дослід з підстрибуванням ручки вертикально вгору багато разів, щоразу фіксуючи висоту підняття. Обираємо з результатів вимірювань N найбільших значень висоти й обчислюємо середнє значення, яке й будемо вважати шуканою величиною.

Для визначення коефіцієнта тертя потрібно провести експеримент, аналогічний підстрибуванню, але спрямовувати ручку горизонтально, щоб вона ковзала по шліфувальному паперу.

Енергія, накопичена пружиною, дорівнює потенціальній енергії ручки на максимальній висоті підняття під час стрибка вгору:

$$E = mgh. \quad (1)$$

Ця енергія також дорівнює роботі сили тертя під час руху ручки до зупинки:

$$E = \mu mgl. \quad (2)$$

Прирівнюючи праві частини формул (1) і (2): $mgh = \mu mgl$, отримаємо формулу для визначення коефіцієнта тертя:

$$\mu = \frac{h}{l}.$$

Знаючи максимальну висоту підстрибування ручки h та визначивши середнє значення пройденого шляху під час ковзання ручки по шліфувальному паперу l , визначаємо μ .

Під час експериментів частина енергії пружини витрачається на подолання тертя ручки об пальці. Щоб мінімізувати це, потрібно відпускати ручку швидко. Оскільки це вдається не щоразу, то досліди потрібно повторити багато разів і знайти середнє з найбільших значень.

Ручку слід намагатися розташувати перпендикулярно поверхні, від якої вона відштовхується.

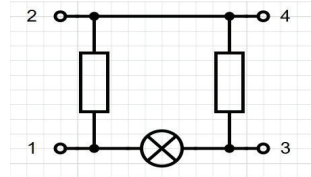
8.2. Чорна скринька з ілюмінацією

Розв'язання. Підключаємо батарейку до всіх можливих пар контактів: 1 – 2, 1 – 3, 1 – 4, 2 – 3, 2 – 4, 3 – 4. Для кожної пари засвідчуємо один з трьох варіантів:

- лампочка на чорній скриньці не світиться — «–»;
- лампочка на чорній скриньці світиться тьмяно — « $\pm$ »;
- лампочка на чорній скриньці світиться яскраво — «+».

Контакти	1	2	3	4
1		$\pm$	+	$\pm$
2	$\pm$		$\pm$	–
3	+	$\pm$		$\pm$
4	$\pm$	–	$\pm$	

Відтворюємо схему, яка реалізує отриманий розподіл варіантів.

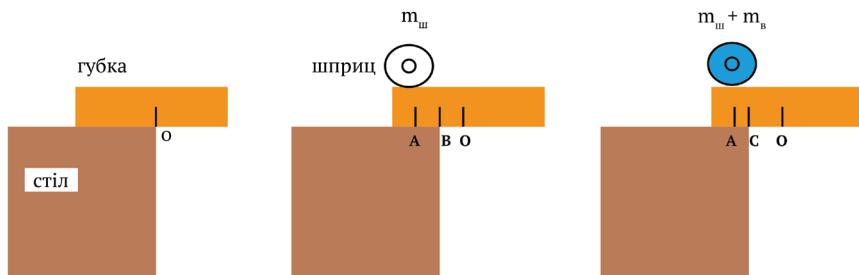


8.3. Губка — шприц

Відповідь: а) 5,7 г; б) 260 см³; в) 0,022 г/см³.

Розв'язання:

а) визначаємо масу. Кладемо губку на край парти й встановлюємо точку, що відповідає перетину перпендикуляра з центра мас. На край губки кладемо порожній шприц, а потім ще наповнений певною кількістю води. Знаходимо критичний момент стійкої рівноваги.



У прикладі з губкою й шприцом на 5 мл: у момент втрати рівноваги знаходимо серед поділок шприця відстані: AB , BO , AC , CO . Переводити в см не обов'язково.

Рівняння рівноваги:

$$\begin{cases} m_r \times BO = m_{\text{ш}} \times AB, \\ m_r \times CO = m_{\text{ш}} \times AC + m_n \times AC. \end{cases}$$

Знаючи масу води (яку можна обрати самостійно), з системи рівнянь знаходимо масу губки (5,7 г);

б) визначаємо об'єм. Шкала на шприці нестандартна. Потрібно визначити ціну її поділки в см, хоча це не обов'язково.



Дістаємо поршень і вимірюємо діаметр в поділках шприця. Для прикладу взято шприц на 5 мл. Довжина шкали, що відповідає 5 мл, становить 25 поділок. Діаметр поршня (внутрішній діаметр шприця) дорівнює 7 под.

Тоді об'єм 5 мл $= 5 \text{ см}^3$ і становить:

$$V = \frac{3,14 \times 7^2}{4} \times 25 = 962 \text{ под}^3.$$

Вимірюємо розміри й об'єм губки в кубічних поділках (под^3), а потім за пропорцією й об'єм губки (260 см^3);

в) визначаємо густину. Для цього скористаємось формулою:

$$\rho = \frac{m}{V} = 0,022 \text{ г/см}^3.$$

Для збільшення точності варто ручкою ставити поділки на губці й кілька разів перевірити втрату рівноваги у разі зміщення губки до поділок. Для точності визначення плеча сили тяжіння, що діє на шприц, його можна підвісити до губки з допомогою нитки. Для фіксації губки використаємо скотч.

Увага! Обладнання з однієї задачі не може бути використане для розв'язання інших задач, якщо воно не прописане в переліку обладнання.

Демонстраційний тур

8.1. Нерухома пляшка

Відповіді	1. Властивість — інертність 2. Якщо час дії сили на коробку малий, то важка пляшка не встигає змінити свою швидкість
Критерії оцінювання	✓ Надано правильну відповідь на одне із запитань — 50 % ✓ Надано повну правильну відповідь на обидва запитання — 100 %

8.2. Два мандарини

Відповідь	Після очищення середня густина мандарина стає більшою за густину води
Критерії оцінювання	✓ Вказано, що змінюється виштовхувальна сила, яка діє на мандарин до та після чищення — 50 % ✓ Вказано, що після очищення середня густина мандарина зменшується — 100 %

8.3. Сито і полум'я

Відповідь	Метал має високу теплопровідність, тому швидко відводить тепло, отримане від полум'я, отже, повітря над ситом слабко нагрівається
------------------	---

Критерії оцінювання	✓ Вказано, що температура нагрітого повітря над ситом та під ним є різною. Температура над ситом недостатня для того, щоб газ світився — 50% ✓ Надано повну правильну відповідь на запитання — 100 %
----------------------------	--

8.4. Парадокс із пляшкою

Відповідь	На кульку діють сили: 1) сила атмосферного тиску (направлена вертикально вгору) 2) сила гідростатичного тиску води (направлена вертикально вниз) 3) сила тяжіння кульки (направлена вертикально вниз) 4) сила реакції стінок пляшки (результуюча сила реакції стінок пляшки, направлена вертикально вниз)
Критерії оцінювання	✓ Названо будь-які дві сили з чотирьох або вказано сили, але є помилки у їхніх напрямках — 50 % ✓ Перелічено усі чотири сили й правильно вказано їхні напрямки — 100 %

8.5. Вага двох склянок

Відповідь	Вага обох систем має бути однакою, оскільки вага бруска і вага витісненої води будуть однакові
Критерії оцінювання	✓ Правильно вказано, що вага обох систем буде однакою — 50 % ✓ Правильно вказано, що вага обох систем однакою і пояснено причину цього — 100%

8.6. Запальничка

Відповідь	У місці надрізу зменшується площа поперечного перерізу фольги, й тонка смужка, утворена надрізами, має значно більший опір, ніж інша частина фольги. Відповідно до закону Джоуля — Ленца зі зростанням опору збільшується й кількість виділеного тепла у смужці. Виділеного тепла достатньо, щоб запалити вату
------------------	--

Критерії оцінювання	✓ Правильно вказано, що у місці надрізу виділятиметься кількість тепла, достатня для запалювання вати — 50 % ✓ Правильно вказано не лише, що у місці надрізу виділятиметься кількість тепла, достатня для запалювання вати, а й пояснено, що причиною цього є збільшення опору у місці надрізу внаслідок зменшення площі поперечного перерізу смужки — 100 %
----------------------------	--

8.7. Кулька, що тоне та спливає

Відповідь	У посудинах вода різної температури. Густина води залежить від температури. У першій посудині густина холодної води більша, ніж у кульки, тому вона плаває. У другій посудині густина теплої води менша, ніж у кульки, тому вона тоне
Критерії оцінювання	✓ Правильно вказано, що на кульку в обох посудинах діє різна за величиною сила Архімеда — 50 % ✓ Правильно вказано, що у посудинах міститься вода різної температури. Густина теплої води менша, ніж холодної та ніж густина кульки — 100 %

8.8. Рівновага

Відповідь	Латунне тіло переважить. Сили Архімеда, які діють на кожне тіло, однакові, оскільки об'єми тіл однакові. Однак плече сили Архімеда, яка діє на латунне тіло, менше, ніж плече сили Архімеда, що діє на алюмінієве
Критерії оцінювання	✓ Вказано, що латунне тіло переважить у разі занурення обох тіл у воду — 50 % ✓ Вказано, що латунне тіло переважить, і надано правильне пояснення, чому латунне тіло у разі занурення у воду переважить — 100 %

9 клас

Теоретичний тур

9.1. Полювання

Розв'язання. Оскільки швидкість ящірки менша, ніж швидкість мурахи, то вона не встигатиме за мурахою, зійде з колової траєкторії в середину, далі рухатиметься по спіралі доти, поки не досягне такої колової траєкторії, щоб періоди обертання обох комах зрівнялися.

Період руху мурахи:

$$T_1 = \frac{2\pi R}{v}.$$

Період руху ящірки:

$$T_2 = \frac{2\pi r}{u}.$$

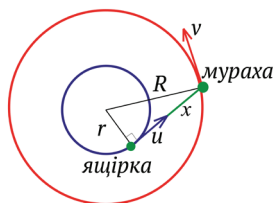
За умови незмінної відстані між тілами $x = \text{const}$ періоди $T_1 = T_2$. Звідси:

$$\frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi r}{u}.$$

Відповідно радіус кола руху ящірки: $r = Ru/v$.

Керуючись рисунком, можна розрахувати відстань:

$$x = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \frac{u^2}{v^2} R^2} = R \sqrt{1 - \frac{u^2}{v^2}}.$$



9.2. Нескінченні π -вкола

Відповідь: 2,7 Ом.

Розв'язання. Позначимо опір найменшого півкола як R_1 . З формули для опору провідника можна знайти цей опір: $R_1 = \rho \times l/S$, де $l = \pi a$ — довжина півкола, а $S = \pi d^2/4$ — площа поперечного перерізу дроту. Тоді:

$$R_1 = \rho \times \frac{\pi a}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{4\rho a}{d^2} = 3,40 \text{ Ом}.$$

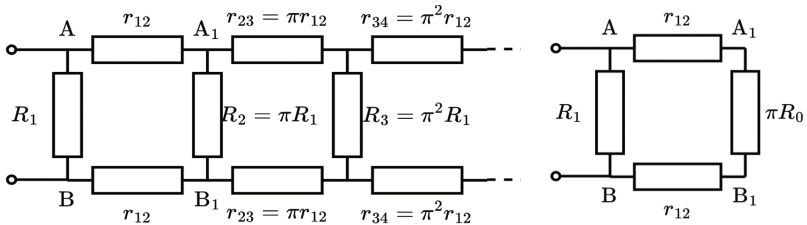
У наступного півкола радіус у π разів більший, тому і довжина півкола у π разів більша, отже, й опір у π разів більший: $R_2 = \pi R_1$. У третього півкола опір у π разів більший, ніж у другого: $R_3 = \pi R_2 = \pi^2 R_1$ — і так далі.

Тепер аналогічно розглянемо опір з'єднання між першим і другим півколом $r_{1,2}$. Довжина цього з'єднання: $l = (\pi - 1)a$, а опір дорівнює:

$$r_{1,2} = \rho \frac{(\pi-1)a}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{4\rho a(\pi-1)}{\pi d^2} = 2,32 \text{ Ом.}$$

Довжина з'єднання між другим і третім півколом: $\pi^2 a - \pi a = \pi(\pi - 1)a$, тобто у π разів довша і має в π разів більший опір: $r_{2,3} = \pi r_{1,2}$. І так далі: кожне наступне з'єднання має в π разів більший опір, ніж попереднє.

Порахувавши опори всіх елементів схеми, перемалюємо її на еквівалентну схему з резисторів. Вертикальні резистори R відповідають півколам, а горизонтальні r — з'єднанням між ними.



Виходить стандартний нескінчений ланцюг, де кожна наступна ланка (одна ланка складається з резистора R і двох резисторів r праворуч від нього) має опір у π разів більший. Щоб знайти опір такого ланцюга, скористаємось стандартним прийомом: уявно приберемо першу ланку та розглянемо опір системи між точками A_1 та B_1 . Легко помітити, що схема виглядає так само, як початкова, єдина різниця — всі опори в π разів більші. Отже, і повний опір такої схеми буде у π разів більший за повний опір початкової схеми між точками A і B . Тепер повернемося до початкової схеми й замінимо частину між A_1 та B_1 на πR_0 , де R_0 — повний опір схеми між A та B . Виразимо опір повної схеми через опір елементів на рисунку. Він складається з паралельного з'єднання R_1 та $2r_{1,2} + \pi R_0$. Тоді:

$$R_0 = \frac{R_1(2r_{1,2} + \pi R_0)}{R_1 + 2r_{1,2} + \pi R_0}.$$

У цьому рівнянні нам невідомий лише повний опір R_0 . Якщо привести доданки до спільного знаменника, отримаємо квадратне рівняння, яке можна розв'язати відносно R_0 :

$$R_0 = \frac{R_1(\pi - 1)}{2\pi} - \frac{r_{1,2}}{\pi} \pm \sqrt{\left(\frac{R_1(\pi - 1)}{2\pi} - \frac{r_{1,2}}{\pi}\right)^2 + \frac{2R_1r_{1,2}}{\pi}}.$$

Єдиний додатний розв'язок — з плюсом, тому обираємо його і підставляємо розраховані значення R_1 та $r_{1,2}$:

$$R_0 = \frac{R_1(\pi - 1)}{2\pi} - \frac{r_{1,2}}{\pi} + \sqrt{\left(\frac{R_1(\pi - 1)}{2\pi} - \frac{r_{1,2}}{\pi}\right)^2 + \frac{2R_1r_{1,2}}{\pi}} = 2,7 \text{ Ом.}$$

9.3. Не стій — стрибай!

Розв'язання. Момент удару кульки об підлогу визначаємо на аудіозаписі як пікове значення на початку ділянки.

Для перших 6 ударів кульки об підлогу ці моменти часу наведено у таблиці 1.

Таблиця 1

Удар	1	2	3	4	5	6
Момент часу, с	0,10	0,52	0,86	1,14	1,37	1,56

З цих даних можна визначити час польоту між сусідніми зіткненнями. У процесі польоту між ударами втратами енергії, за умовою задачі, можна знехтувати, отже, рух кульки між двома послідовними ударами розглядаємо як вільне падіння — рівноприскорений рух з постійним прискоренням: $g = 10 \text{ м/с}^2$.

Далі бачимо, що проміжок часу між двома послідовними ударами після кожного удару зменшується. Це пов'язано з втратами енергії під час зіткнень з підлогою, адже удари не є абсолютно пружними.

Визначаємо максимальну висоту, на яку зможе піднятися кулька у процесі польоту:

$$h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Знаючи час польоту, встановлюємо початкову швидкість:

$$v_0 = \frac{gt}{2}.$$

Таким чином, за даними, отриманими з аудіозапису (див. на с. 104), можна визначити початкову швидкість кульки після кожного удару,

максимальну висоту підйому кульки на кожному інтервалі між ударами та коефіцієнт відновлення. Результати наведено у таблицях 2 і 3.

Таблиця 2

Удар	1	2	3	4	5	6
Швидкість кульки після удару, м/с	2,10	1,70	1,40	1,15	0,95	неможливо визначити
Коефіцієнт відновлення	неможливо визначити	0,81	0,82	0,82	0,83	неможливо визначити

Таблиця 3

Інтервал	0–1	1–2	2–3	3–4	4–5	5–6	6–7
Тривалість польоту, с	неможливо визначити	0,42	0,34	0,28	0,23	0,19	неможливо визначити
Максимальна висота підйому, м	неможливо визначити	0,22	0,1445	0,098	0,066	0,045	неможливо визначити

Як видно з таблиці 2, коефіцієнт відновлення в умовах реального експерименту має певний розкид.

Середнє значення коефіцієнта відновлення для нашої задачі: $k \approx 0,82$.

Знаючи швидкість кульки після першого удару і середнє значення коефіцієнта відновлення, визначаємо швидкість кульки до першого удару:

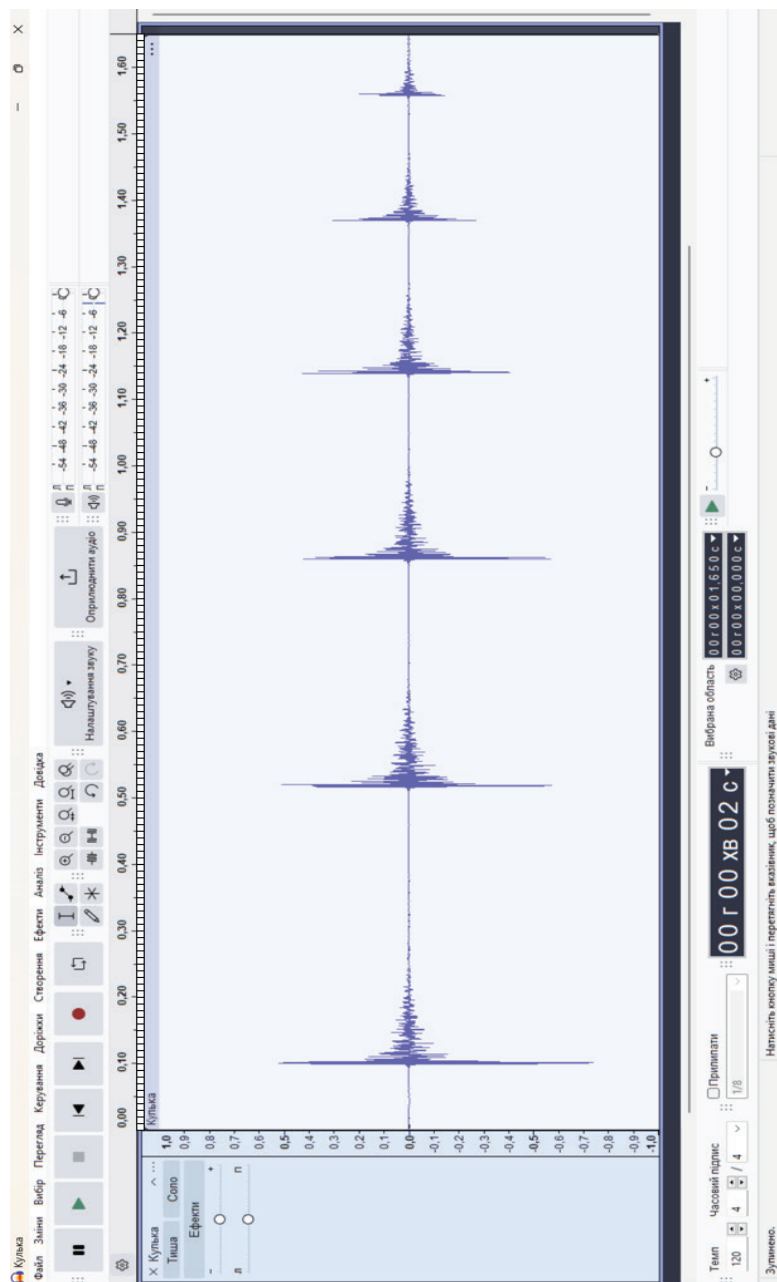
$$v_{01} = \frac{v_{11}}{k} \approx 2,56 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Тоді висота відпускання кульки до першого удару:

$$H_0 = \frac{v_{01}^2}{2g} \approx 0,33 \text{ м}.$$

Для знаходження шляху, пройденого кулькою до моменту п'ятого удару об підлогу, скористаємось такою залежністю:

$$L = H_0 + 2H_1 + 2H_2 + 2H_3 + 2H_4 \approx 1,39 \text{ м}.$$



9.4. Спливаємо?

Розв'язання:

1) коли вода доходить до верхньої межі тіла, то із зображення (рис. 1) на графіку (за $h = 20$ см тиск тіла на дно: $p(h) = 0$) доходимо висновку, що сила тяжіння дорівнює силі Архімеда, що діє на повністю занурене тіло. Це означає, що густина тіла дорівнює густині води;

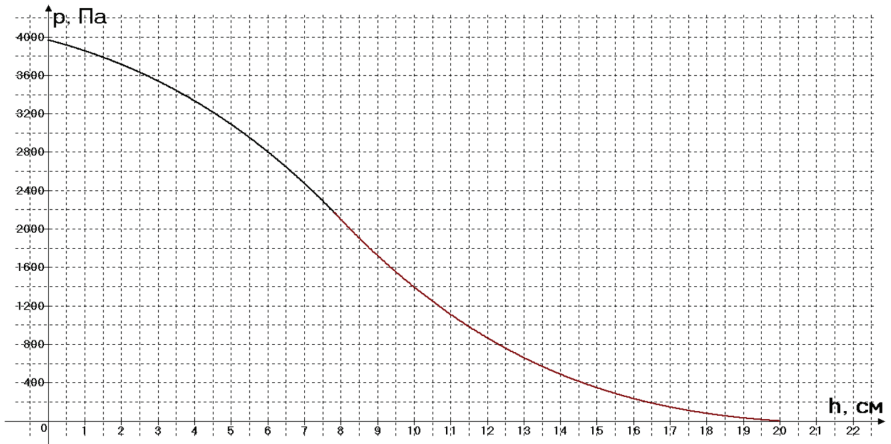


Рисунок 1

2) якщо дно є мулистим, то вода не підтікає під пласке дно тіла, відповідно на його нижню поверхню вже не може діяти сила тиску води, спрямована вертикально вгору, що дорівнює $\rho_v g h S$, де S — площа поверхні, що дотикається до дна. Отже, у разі повного занурення вода буде додатково притискати тіло до дна, а не створювати виштовхувальну силу, тому воно не спливе за жодних обставин;

3) розпишемо тиск тіла на дно у випадку підтікання води:

$$p(h) = \frac{mg - F_A(h)}{S} = \frac{mg - (F_{\text{знизу}}(h) + F_{\text{інше}}(h))}{S}.$$

Сила Архімеда є результуючою силою тиску води на тіло. Тобто її можна розкласти на 2 сили: $F_{\text{знизу}} = \rho_v g h S$ — силу гідростатичного тиску, що діє на нижню поверхню тіла, яка прилягає до дна; $F_{\text{інше}}$ — сумарну силу, що діє на інші поверхні тіла.

Тепер запишемо тиск для ситуації з мулистим дном з урахуванням того, що $F_{\text{знизу}}$ вже діяти не може:

$$p_M(h) = \frac{mg - F_{\text{інше}}(h)}{S} = p(h) + \frac{F_{\text{знизу}}}{S} = p(h) + \rho_B gh.$$

Отже, провівши додатково на графіку лінійну залежність $\rho_B gh$ (див. рис. 2) та додавши $p(h)$ і $\rho_B gh$ для однакових h , з даного в задачі графіка отримаємо залежність тиску від висоти $p_M(h)$.

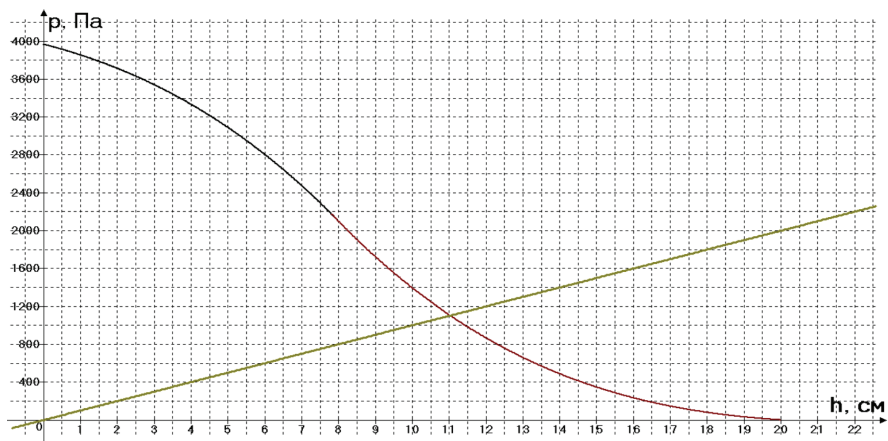


Рисунок 2

Тоді з фінального графіка $p_M(h)$ видно (рис. 3), що тиск буде найменший, коли $h \approx 16$ см.

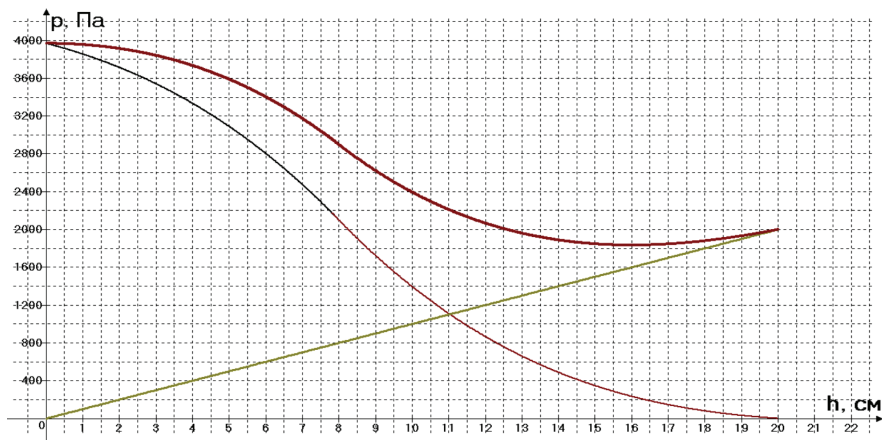
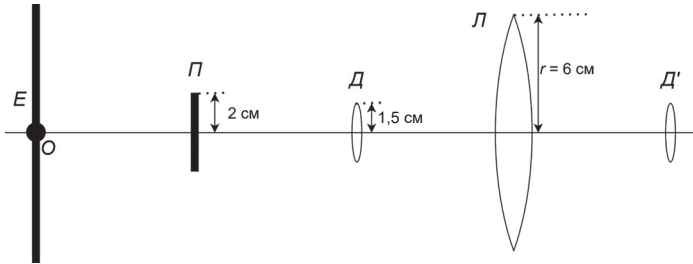


Рисунок 3

9.5. Оптична лава

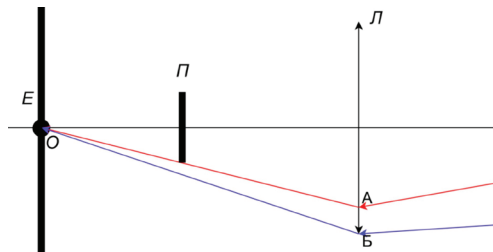
Відповідь: 0,6 м.

Розв'язання. По-перше, джерело не може освітити прямим світлом екран за перегородкою, особливо в точці О, адже світло потрапляє туди від лінзи, тобто освічується зображенням джерела. Але можемо доробити другу половину лінзи та побудувати зображення D' у дзеркалі.



Найскладніше позбутись тіні в точці О. Для можливості освітити цю точку треба, щоб перегородка не затуляла повністю лінзу, тобто кутовий розмір перегородки має бути не більший, ніж кутовий розмір лінзи.

Нехай кутовий розмір перегородки менший, ніж лінзи. Тоді є багато точок на лінзі, з яких промінь приходить в О. На рисунку це точки між А та Б.

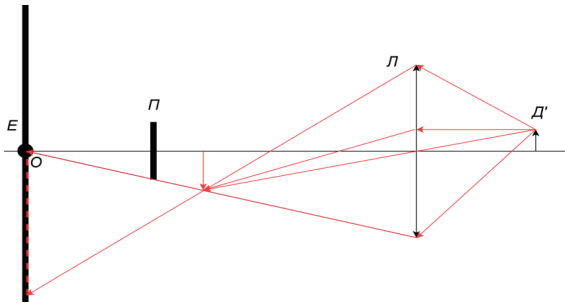


Відомо, що тінь зникає лише за одного положення джерела. Це означає, що в точку О промінь може потрапити лише за однієї умови — точки А та Б мають збігатись. Кутовий розмір перешкоди й лінзи мають бути однаковими, звідси:

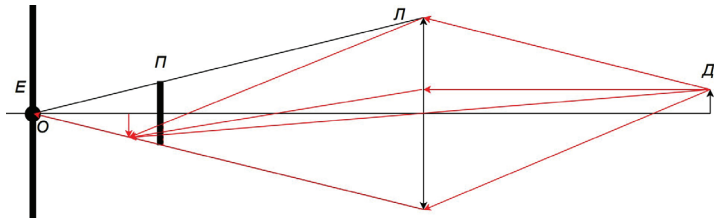
$$x = L \times (2 \text{ см} / 6 \text{ см}) = \frac{L}{3}.$$

Побудуємо зображення і проведемо від лінзи до нього граничні промені, щоб зрозуміти, як підсвічується екран. Зображення має розташовуватись на прямій ОА (чи ОА'), щоб промінь міг влучити в точку О.

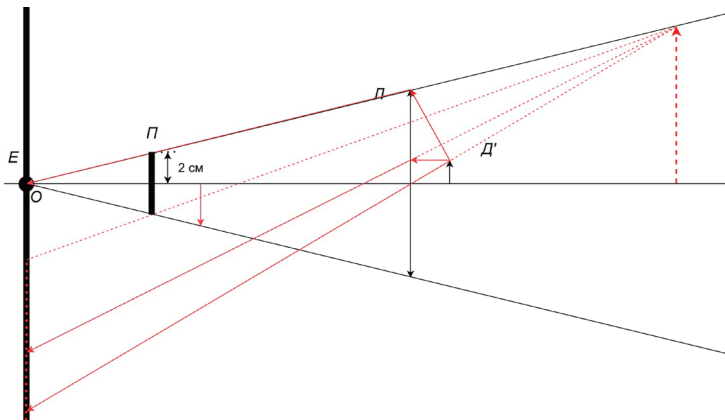
Реальне зображення за перегородкою: тінь прибирається повністю — підходить.



Зображення перед перегородкою: усі промені від лінзи попадуть на перегородку — не підходить.



Уявне зображення: точка O підсвітиться, але навколо неї залишиться тінь, а всі інші промені впадуть або на перегородку, або на екран, але на великій відстані від оптичної осі — не підходить.



Позначимо відстані від лінзи до джерела як d і від лінзи до зображення як f . Нехай розмір зображення буде H .



















Розглянемо ситуацію, коли спостерігач дивиться вертикально на дзеркальце і, змінюючи кут нахилу, знаходить положення, коли потрібний елемент на стелі не буде видно у певній точці дзеркальця (наприклад, на одному з його країв). За допомогою доміно можна точніше встановити кут нахилу, а отже, й кут падіння променів у двох випадках.

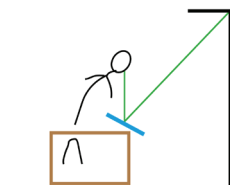


Рисунок 1

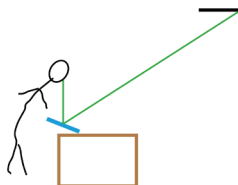


Рисунок 2

Кут нахилу дзеркала α визначимо шляхом розв'язування геометричної задачі (рис. 1):

$$\alpha_1 = \arcsin\left(\frac{h}{L}\right).$$

Далі встановимо кут нахилу променя β , який йде від кута кімнати (об'єкта на стелі) на дзеркало (рис. 2):

$$\beta = 90^\circ - 2\alpha.$$

Позначимо всі величини згідно з рисунками 3, 4, 5, 6.

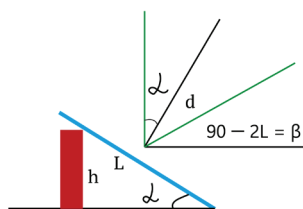


Рисунок 3

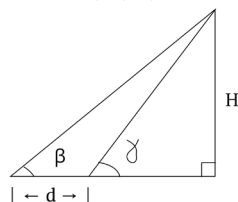


Рисунок 4

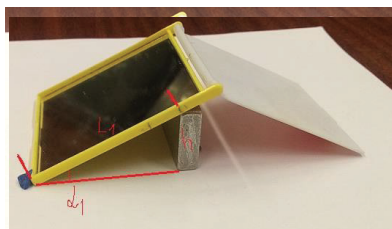


Рисунок 5

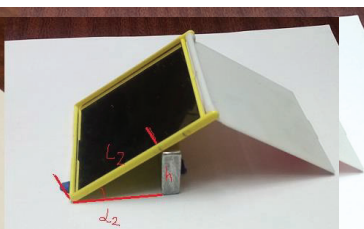


Рисунок 6

Знаходження висоти. Є два кути між променями та горизонтом (β і γ) і відстань між ними d , тоді маємо:

$$|H \times \operatorname{ctg} \beta - H \times \operatorname{ctg} \gamma| = d \Rightarrow H = \frac{d}{|\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \gamma|}.$$

Оскільки H визначається відносно стола, то потрібно додати до отриманого значення висоту стола, отже:

$$H_{\text{кімнати}} = H_{\text{стола}} + \frac{d}{|\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \gamma|}.$$

Варіант 2. На одному з країв горизонтального дзеркала закріпимо доміно у вертикальному положенні.

Сутність методу полягає в тому, щоб знайти кут, за якого зображення верхньої грані доміно і зображення певного предмета на стелі збігалося (див. рис. 7).

За кожного фіксованого положення дзеркала будемо робити на ньому позначку, де положення доміно і предмета на стелі збігаються. Позначимо відстань від краю парти до стіни: $FE = L_0$, $SE = H_1$; відстань від краю парти до дзеркала: $FA = y$; відстань до зображення верхньої грані доміно: $AC = x$, і висоту доміно: $AB = h$.

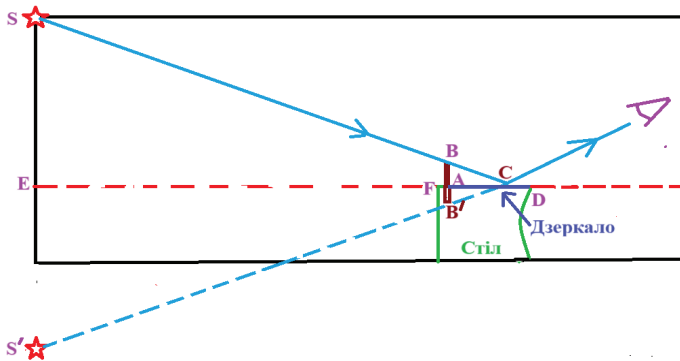


Рисунок 7

З подібності трикутників ABC та ESC маємо: $\frac{ES}{AB} = \frac{CE}{AC}$.

Або, використовуючи позначення, вжиті раніше, можемо записати так:

$$\frac{H_1}{h} = \frac{L_0 + y + x}{x}.$$

Далі, оскільки $\frac{L_0 + y + x}{x} = \frac{L_0}{x} + \frac{y}{x} + 1$, коригуємо запис: $\frac{H_1}{h} = \frac{L_0}{x} + \frac{y}{x} + 1$.

Помноживши останню рівність на x і згрупувавши доданки, отримаємо робочу формулу: $y = \left(\frac{H_1}{h} - 1\right)x - L_0$, яка відповідає лінійній залежності виду: $y = kx + b$.

З допомогою графічної побудови $y = y(x)$ можемо знайти параметри цієї залежності, зокрема кутовий коефіцієнт k . Після цього знаходимо висоту стелі над партою:

$$H_1 = (k + 1)h. \quad (1)$$

Вимірявши висоту парти H_0 лінійкою, можна встановити загальну висоту кімнати:

$$H = H_1 + H_0. \quad (2)$$

Приклади обчислень

Виміряна висота парти: $H_0 = 75$ см.

Для двох тіл на стелі проведено серію дослідів, результати вимірювань представлено у таблиці 1.

Таблиця 1

№ досліду	у, см	х, см
1	3	4,1
2	21	4,5
3	35	4,8
4	57	5,1
5	75	5,5

№ досліду	у, см	х, см
1	1,5	2,3
2	21,7	2,6
3	38,6	3,0
4	63,5	3,4
5	79,3	3,9

Користуючись даними (табл. 1), побудуємо графік залежності $y(x)$ (див. рис. 8, 9) і за допомогою МНК визначимо кутовий коефіцієнт k .

Використаємо (1) та (2) і визначимо висоту стелі H .

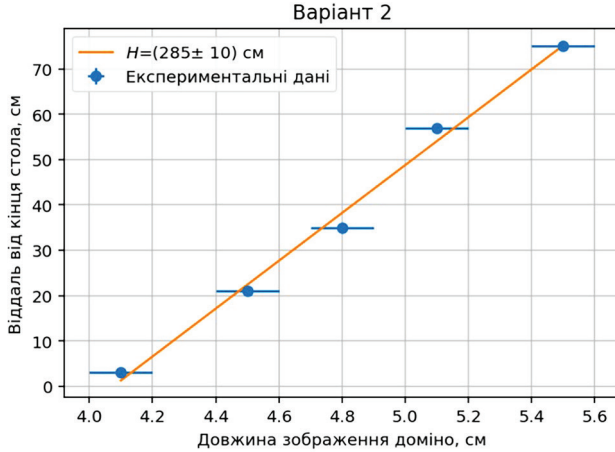


Рисунок 8

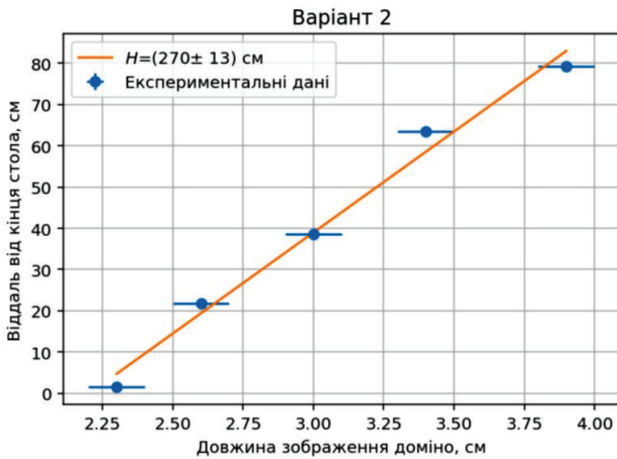


Рисунок 9

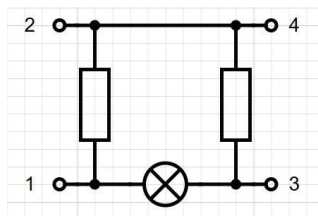
9.2. Чорна скринька з ілюмінацією

Розв'язання. Підключаємо батарейку до всіх можливих пар контактів: 1 – 2, 1 – 3, 1 – 4, 2 – 3, 2 – 4, 3 – 4. Для кожної пари засвідчуємо один з трьох варіантів:

- лампочка на чорній скриньці не світиться — «–»;
- лампочка на чорній скриньці світиться тьмяно — «±»;
- лампочка на чорній скриньці світиться яскраво — «+».

Контакти	1	2	3	4
1		$\pm$	+	$\pm$
2	$\pm$		$\pm$	—
3	+	$\pm$		$\pm$
4	$\pm$	—	$\pm$	

Відтворюємо схему, яка реалізує отриманий розподіл варіантів.



9.3. Слінки

Розв'язання

Спосіб 1. На першому етапі кріпимо до кінця пружини-слінки тягарець відомої маси й підвішуємо її на штативі таким чином, щоб тягарець був біля самої підлоги, але не торкався її. Для того, щоб це зробити, доведеться кріпити на лапку штатива слінки не за останній виток, а певну кількість витків залишити не розтягнутими. Після цього треба порахувати, скільки витків N_1 висять між точкою підвішування та рівнем стола, а також кількість витків N_2 , що висять нижче рівня стола.

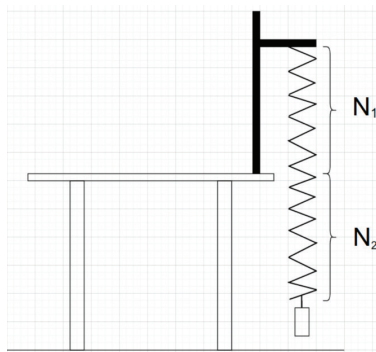


Рисунок 1

На другому етапі прибираємо тягарець і підвішуємо слінки таким чином, щоб між рівнем стола і точкою підвішування так само висіло N_1 витків. Рахуємо, скільки для цього знадобилось витків N_3 нижче рівня стола.

В обох випадках кількість витків N_1 над рівнем стола розтягнуті однаково, отже, маса N_2 витків і тягарця дорівнює масі N_3 витків. Порахувавши повну кількість витків у пружині, отримуємо повну масу пружини.

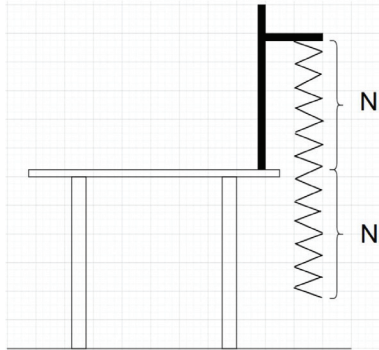


Рисунок 2

Під час закріплювання пружини на штативі важливо стежити, щоб верхні витки біля точки підвішування були в однакових початкових умовах на обох етапах експерименту.

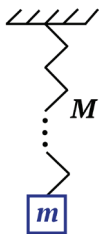


Рисунок 3

Спосіб 2. Спочатку виведемо формулу для розтягнення пружини під власною вагою та під вантажем (див. рис. 3).

Побудуємо теоретичну модель безмасової пружини, розбивши її на багато дуже маленьких частин $(N - 1)$ (рис. 4).

Увага! Рисунки 3, 4, 5 схематичні, насправді верхні частини пружини розтягнуті значно сильніше за нижні.

Кожна частина пружини має масу: $\Delta M = M/N$ і жорсткість: $\kappa = kN$, де k — жорсткість всієї пружини. Перша зверху частина пружини розтягнута вагою: $(N\Delta M + m)g$, друга частина розтягнута вагою: $((N - 1) \times \Delta M + m)g$, і так далі, отже:

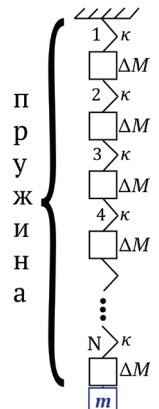


Рисунок 4

$$\begin{cases} (N\Delta M + m)g = \kappa\Delta L_1, \\ ((N-1)\Delta M + m)g = \kappa\Delta L_2 \Rightarrow \\ \vdots \\ (\Delta M + m)g = \kappa\Delta L_N \Rightarrow \\ \Rightarrow \kappa\Delta L = ((1+2+\dots+N)\Delta M + mN)g, \end{cases}$$

де $\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \dots + \Delta l_N$ видовження всієї пружини.

Обчислимо суму $S = 1 + 2 + \dots + N$:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} S = 1 + 2 + \dots + N, \\ S = N + (N-1) + \dots + 1 \end{cases} \Rightarrow \\ & \Rightarrow 2S = (N+1) + (N-1+2) + (N-2+3) + \dots + (1+N) = \\ & = \underbrace{(N+1) + (N+1) + \dots + (N+1)}_{N \text{ разів}} = N(N+1) \Rightarrow S = \frac{N(N+1)}{2}. \end{aligned}$$

Тож $\kappa\Delta L = \left(\frac{N(N+1)}{2}\Delta M + mN\right)g$, а з урахуванням того, що $\Delta M = \frac{M}{N}$

та $\kappa = kN$, маємо:

$$kN\Delta L = \left(\frac{N(N+1)}{2}\Delta M + mN\right)g \Rightarrow k\Delta L = \frac{M}{2} \times \left(1 + \frac{1}{N}\right)g + mg$$

(через те, що $N \gg 1$, виразом $\frac{1}{N}$ можна знехтувати), та $\Delta l = \frac{Mg}{2k} + \frac{mg}{k}$.

У випадку, коли тягарець відсутній і пружина розтягується під власною вагою:

$$\Delta l = \frac{Mg}{2k}.$$

Перекинемо через лапку штатива слінки так, як зображено на рисунку 5: до лівої частини пружини прикріплено тягарець, нижній рівень обох частин пружини збігається (його не можна виміряти, але можна помітити, що він однаковий).

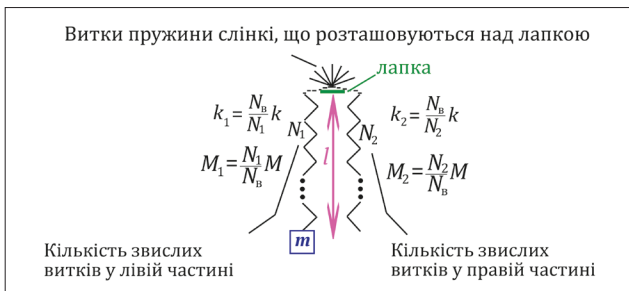


Рисунок 5

Фактично ліва частина пружини є пружиною з N_1 витків, права частина пружини є пружиною з N_2 витків (йдеться саме про звислі частини пружин, частину пружини над лапкою штатива не враховуємо).

Згідно з виведеною вище формулою для розтягування пружини випишемо:

$$\begin{cases} l - l_1 = \frac{M_1 g}{2k_1} + \frac{mg}{k_1}, \\ l - l_2 = \frac{M_2 g}{2k_2}, \end{cases}$$

де довжина l зображена на рисунку, а l_1, l_2 — довжини не розтягнутих (навіть під власною вагою) лівої та правої частин, відповідно. Через те, що $l_1 \ll l$ та $l_2 \ll l$, знехтуємо величинами l_1, l_2 та матимемо:

$$\begin{cases} l = \frac{M_1 g}{2k_1} + \frac{mg}{k_1}, \\ l = \frac{M_2 g}{2k_2}. \end{cases}$$

Звідси:

$$\frac{M_1}{2k_1} + \frac{m}{k_1} = \frac{M_2}{2k_2}.$$

Нехай N_B — загальна кількість витків пружини (в лівій, правій частинах і тих, що над лапкою). Тоді з урахуванням виразів: $M_1 = \frac{N_1}{N_B} M, M_2 = \frac{N_2}{N_B} M, k_1 = \frac{N_B}{N_1} k, k_2 = \frac{N_B}{N_2} k$, остаточно отримаємо:

$$\left(\frac{N_1}{N_B}\right)^2 \frac{M}{2k} + \frac{N_1 m}{N_B k} = \left(\frac{N_2}{N_B}\right)^2 \frac{M}{2k} \Rightarrow M = \frac{2N_1 N_B}{N_2^2 - N_1^2} \times m.$$

Наприклад, для одного з наборів, в якому $m = 51,2$ г, а $N_B = 78$, у журі вийшло: $N_1 = 26, N_2 = 42$, знайдена маса пружини: $M \approx 190,87$ г, що дуже наближено збігається з реальною масою пружини, яка дорівнює: $M \approx 189,32$ г.

Примітка. Окрім нехтування довжинами l_1, l_2 не розтягнутих частин, тут також не враховувався факт, що тягарець, причіплений до низу лівої частини пружини, дещо перекошує її нижні витки. Також нехтувалось можливою початковою деформацією виготовленої пружини у стані, коли її витки розташовані впритул (за наявності початкової деформації у пружини нижні витки можуть бути стиснутими впритул один до одного у звислому

стані). Однак ці факти не завадили отримати адекватний результат. Ймовірно, описані два способи розв'язування не єдині можливі методи.

Демонстраційний тур

9.1. Нерухома пляшка

Відповіді	1. Властивість — інертність 2. Якщо час дії сили на коробку малий, то важка пляшка не встигає змінити свою швидкість
Критерії оцінювання	✓ Надано правильну відповідь на одне запитання — 50 % ✓ Надано відповіді на обидва запитання — 100 %

9.2. Два мандарини

Відповідь	Після очищення середня густина мандарина стає більшою за густину води
Критерії оцінювання	✓ Вказано, що змінюється виштовхувальна сила, яка діє на мандарин до та після чищення — 50 % ✓ Вказано, що після очищення середня густина мандарина зменшується — 100 %

9.3. Сито і полум'я

Відповідь	Метал має високу теплопровідність, тому швидко відводить тепло, отримане від полум'я, отже, повітря над ситом слабко нагрівається
Критерії оцінювання	✓ Вказано, що температура нагрітого повітря над ситом та під ситом є різною. Температура над ситом недостатня для того, щоб газ світився — 50% ✓ Надано повну правильну відповідь — 100 %

9.4. Парадокс із пляшкою

Відповідь	На кульку діють сили: а) сила атмосферного тиску (направлена вертикально вгору) б) сила гідростатичного тиску води (направлена вертикально вниз)
------------------	--

	в) сила тяжіння кульки (направлена вертикально вниз) г) сила реакції стінок пляшки (результуюча сила реакції стінок пляшки, направлена вертикально вниз)
Критерії оцінювання	✓ Названо будь-які дві сили з чотирьох або вказані сили, але є помилки у їхніх напрямках — 50 % ✓ Перелічено усі чотири сили й правильно вказано їхні напрямки — 100 %

9.5. Вага двох склянок

Відповідь	Вага обох систем має бути однакою, оскільки вага бруска і вага витісненої води будуть однакові
Критерії оцінювання	✓ Правильно вказано, що вага обох систем буде однакою — 50 % ✓ Правильно вказано, що вага обох систем однакова і пояснено причину цього — 100%

9.6. Запальничка

Відповідь	У місці надрізу зменшується площа поперечного перерізу фольги, й тонка смужка, утворена надрізами, має значно більший опір, ніж інша частина фольги. Відповідно до закону Джоуля — Ленца зі зростанням опору збільшується й кількість виділеного тепла у смужці. Виділеного тепла достатньо, щоб запалити вату
Критерії оцінювання	✓ Правильно вказано, що у місці надрізу виділятиметься кількість тепла, достатня для запалювання вати — 50 % ✓ Правильно вказано не лише, що у місці надрізу виділятиметься кількість тепла, достатня для запалювання вати, а й пояснено, що причиною цього є збільшення опору у місці надрізу внаслідок зменшення площі поперечного перерізу смужки — 100 %

9.7. Кулька, що тоне та спливає

Відповідь	У посудинах вода різної температури. Густина води залежить від температури. У першій посудині густина холодної води більша, ніж у кульки, тому вона плаває
------------------	--

	У другій посудині густина теплої води менша, ніж у кульки, тому вона тоне
Критерії оцінювання	✓ Правильно вказано, що на кульку в обох посудинах діє різна за величиною сила Архімеда — 50 % ✓ Правильно вказано, що у посудинах міститься вода різної температури. Густина теплої води менша, ніж холодної та ніж густина кульки — 100 %

9.8. Рівновага

Відповідь	Латунне тіло переважить. Сили Архімеда, які діють на кожне тіло, однакові, оскільки об'єми тіл однакові. Однак плече сили Архімеда, яка діє на латунне тіло, менше, ніж плече сили Архімеда, що діє на алюмінієве
Критерії оцінювання	✓ Вказано, що у разі занурення обох тіл у воду латунне тіло переважить — 50 % ✓ Вказано, що латунне тіло переважить, і надано правильне пояснення, чому у разі занурення у воду переважить саме воно — 100 %

9.9. Пташка, що п'є

Відповідь	1. Нагрівач — навколишнє середовище 2. Робоче тіло — пара у трубці 3. Холодильник — носик пташки, з якого здійснюється випаровування води
Критерії оцінювання	✓ Правильно названі будь-які дві з трьох функціональних частин — 50 % ✓ Правильно вказані усі три функціональні частини — 100 %

9.10. Аркуш і лінійка

Відповідь	Сила різниці атмосферного тиску і тиску під аркушем паперу <i>Примітка.</i> Відповідь «Сила опору руху» також зараховується
------------------	---

Критерії оцінювання	✓ Вказано, що причиною, чому аркуш паперу не відривається від поверхні стола, є дія сили атмосферного тиску — 50 % ✓ Надано повну правильну відповідь на запитання — 100 %
----------------------------	---

9.11. Летючий цвях

Відповідь	Залізо — феромагнетик, у разі піднесення до магніту воно намагнічується. Розташування полюсів у залізної смужки і цвяха однакове, тому залізо після намагнічування відштовхує цвях
Критерії оцінювання	✓ Вказано, що після піднесення залізного тіла магнітна сила, яка діє на цвях, зменшується — 50 % ✓ Надано повну правильну відповідь — 100 %

10 клас

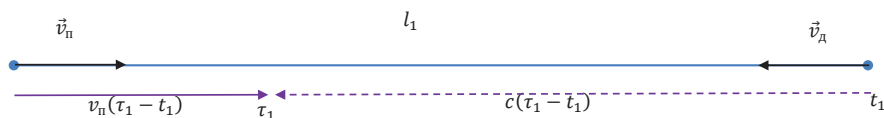
Теоретичний тур

10.1. Доплер-трамваї

Розв'язання:

а) розглянемо джерело сигналів і приймач, які рухаються назустріч один одному зі швидкостями v_d і v_n . Нехай відстань між ними в момент часу t_1 відправлення сигналу дорівнює l_1 . У момент часу τ_1 приймач отримує сигнал. Тоді відстань l_1 приймач і сигнал подолали разом за час $\tau_1 - t_1$ (див. рис.), тобто:

$$l_1 = (v_n + c)(\tau_1 - t_1).$$



Для другого сигналу, який був відправлений джерелом у момент часу t_2 , можна записати аналогічне рівняння:

$$l_2 = (v_n + c)(\tau_2 - t_2).$$

За час $\Delta t = t_2 - t_1$ між відправленням першого і другого сигналів відстань між приймачем і джерелом скоротилася на $(v_n + v_d)(t_2 - t_1)$. Віднімаємо: $l_1 - l_2$, і далі отримуємо:

$$(v_n + c)(\Delta t - \Delta \tau) = (v_n + v_d)\Delta t.$$

З цього рівняння виражаємо інтервал часу $\Delta \tau$ між отриманням двох сигналів приймачем через інтервал часу між їх надсиланням джерелом Δt :

$$\Delta \tau = \frac{c - v_d}{c + v_n} \Delta t.$$

Якщо під Δt і $\Delta \tau$ розуміти періоди звукової хвилі, то зв'язок частот, обернених до періоду величин, матиме такий вигляд:

$$\nu = \nu_0 \frac{c + v_n}{c - v_d}.$$

Зміну частоти внаслідок взаємного руху називають ефектом Доплера. У нашому випадку ефект Доплера для всіх трьох випадків:

$$v_1 = v_0 \frac{1 + v_1/c}{1 - v_2/c}; \quad v'_1 = v_0 \frac{1 - v_1/c}{1 + v_2/c}; \quad v'_2 = v_0 \frac{1 - v_2/c}{1 + v_1/c}.$$

З першого і третього рівнянь одразу знаходимо:

$$v_0 = \sqrt{v_1 v'_2} = 1980 \text{ Гц};$$

б) з першого і другого рівнянь з урахуванням v_0 знаходимо швидкості трамваїв:

$$v_1 = 22 \text{ м/с}; \quad v_2 = 30 \text{ м/с};$$

в) знайдені у попередньому пункті швидкості є насправді швидкостями відносно системи відліку «повітря», яка рухається вздовж напрямку руху першого трамваю з $v = 4 \text{ м/с}$. Тоді відносно землі перший трамвай мав рухатись зі швидкістю: $u_1 = v_1 + v = 26 \text{ м/с}$, а другий йому назустріч також зі швидкістю:

$$u_2 = v_2 - v = 26 \text{ м/с}.$$

Отже, трамваї рухались з однаковими швидкостями, тому а) залишиться без змін: $v_0 = \sqrt{v_1 v'_2} = 1980 \text{ Гц}$.

10.2. Клубок резисторів

Розв'язання

Спосіб 1. Для будь-якої комбінації резисторів, що має два виходи (позначимо їх X та Y), можна порахувати загальний опір між виходами XY — R_{XY} . Тоді в усіх експериментах, де використовуються тільки ці два виходи XY , комбінація резисторів (клубок) буде поводитись як один резистор з опором R_{XY} ¹.

Аналогічні міркування можна застосувати і для будь-якого клубка резисторів, що має три виходи — A, B, C . Але тепер підключитись можна трьома різними способами (AB, BC, AC), тому замінити все на один резистор не вийде, але можна замінити на еквівалентні три резистори, які з'єднують, наприклад, у вигляді трикутника або зірки. Як відомо, є зв'язок

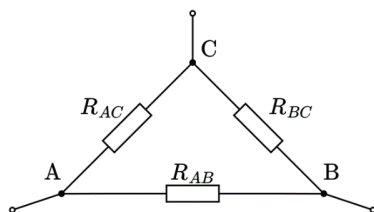


Рисунок 1

¹ За допомогою законів Кірхгофа.

між трикутником та зіркою, тому можна обрати будь-яку конфігурацію, але в цій задачі з'єднання у формі трикутника буде зручнішим.

Тобто клубок, який знайшла учениця в загальному випадку, можна замінити на трикутник резисторів, як зображено на рисунку 1 — з трьох невідомих резисторів R_{AB} , R_{BC} , R_{AC} .

Тепер розглянемо випадки підключень джерела й амперметра. На рисунку 2 зображено перший випадок: джерело підключено до контактів AB , амперметр — до контактів AC . Оскільки амперметр ідеальний, то його опір дорівнює нулю, тому через резистор R_{AC} струм йти не буде. Тоді зрозуміло, що струм, який йде через амперметр, дорівнює струму, який йде через резистор R_{BC} , відповідно:

$$I_1 = \frac{U_0}{R_{BC}},$$

де U_0 — невідома напруга ідеального джерела.

Аналогічно буде для випадку, коли амперметр підключений до контактів BC :

$$I_1 = \frac{U_0}{R_{AC}}.$$

Звідси випливає, що опори між точками AC та BC — однакові, позначимо їх як R :

$$R_{AC} = R_{BC} = R = \frac{U_0}{I_1}. \quad (1)$$

Тепер розглянемо третій випадок: коли амперметр послідовно з джерелом підключений до точок AB (див. рис. 3). Із законів послідовного та паралельного з'єднань легко знайти струм через амперметр. Виходить:

$$I_2 = \frac{U_0(2R + R_{AB})}{2RR_{AB}}.$$

Далі виразимо з цього рівняння R_{AB} :

$$R_{AB} = \frac{U_0 2R}{2RI_2 - U_0'}$$

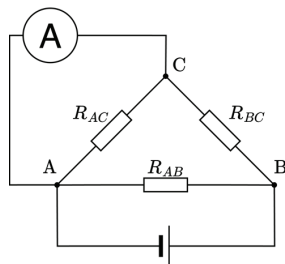


Рисунок 2

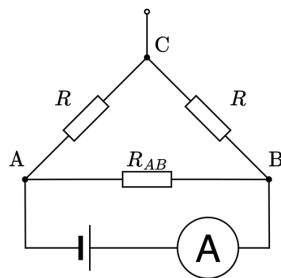


Рисунок 3

підставляючи $R = \frac{U_0}{I_1}$, отримаємо:

$$R_{AB} = \frac{2U_0}{2I_2 - I_1}. \quad (2)$$

Разом рівняння (1) та (2) виражають всі три опори через напругу U_0 та струми I_1, I_2 .

Тепер розглянемо останній випадок, де нам треба порахувати струм, коли амперметр послідовно з батарейкою підключений до контактів BC (див. рис. 4).

Використовуючи закони послідовного та паралельного з'єднання, знайдемо формулу для струму через опори резисторів та напругу джерела:

$$I = \frac{U_0(2R + R_{AB})}{R(R + R_{AB})}.$$

Підставимо в цю формулу рівняння (1) та (2) й отримаємо:

$$I = \frac{U_0 \left(2\frac{U_0}{I_1} + \frac{2U_0}{2I_2 - I_1} \right)}{\frac{U_0}{I_1} \left(\frac{U_0}{I_1} + \frac{2U_0}{2I_2 - I_1} \right)} = I_1 \frac{2(2I_2 - I_1) + 2I_1}{2I_2 - I_1 + 2I_1} = \frac{4I_1I_2}{2I_2 + I_1}.$$

Отже, амперметр покаже струм: $I = \frac{4I_1I_2}{2I_2 + I_1}$, якщо його послідовно з джерелом підключити до контактів BC .

Спосіб 2. Клубок резисторів можна також замінити на зірку з резисторів. Позначимо їх r_A, r_B, r_C відповідно до контактів, до яких кожний резистор підключений (див. рис. 5). З перших двох вимірювань дізнаємось: коли джерело підключене до контактів AB , амперметр, під'єднаний до контактів AC і BC , дає однакові покази. Це означає, що вся схема симетрична відносно контактів A та B , отже, і опори біля цих контактів мають бути однаковими: $r_A = r_B = r$.

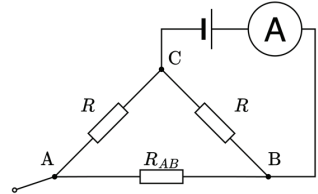


Рисунок 4

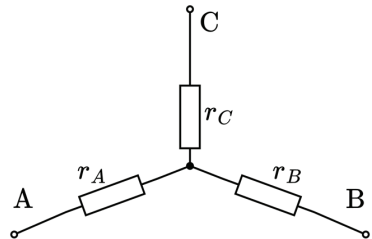


Рисунок 5

З простих правил послідовного й паралельного з'єднання можна виразити струм I_1 через опори r , r_C і невідому напругу джерела U_0 :

$$I_1 = \frac{U_0}{2r_C + r}.$$

Аналогічно, розглянувши третє вимірювання, коли амперметр послідовно з джерелом підключений до точок AB , отримаємо:

$$I_2 = \frac{U_0}{2r}.$$

З цього рівняння можемо виразити опір r :

$$r = \frac{U_0}{2I_2},$$

а підставивши це у рівняння на I_1 , знайдемо також опір r_C :

$$r_C = \frac{U_0}{2I_1} - \frac{U_0}{4I_2}.$$

Тепер, виразивши невідомі опори через напругу і струми, перейдемо до останнього випадку: амперметр послідовно з батарейкою підключений до контактів BC . У цьому випадку струм:

$$I = \frac{U_0}{r + r_C},$$

або, підставляючи r та r_C :

$$I = \frac{U_0}{\frac{U_0}{2I_2} + \frac{U_0}{2I_1} - \frac{U_0}{4I_2}} = \frac{1}{\frac{1}{4I_2} + \frac{1}{2I_1}} = \frac{4I_1I_2}{I_1 + 2I_2}.$$

Тобто, як і очікувалось, відповідь не залежить від того, як розглядати клубок — еквівалентний трикутнику чи зірці.

Частинний випадок, запропонований учасником олімпіади

Під час розв'язування цієї задачі один з учасників олімпіади — Микола Ніколенко з Дніпра — інтерпретував підказку в умові як необхідність мінімізації можливої кількості резисторів і зумів змодельовати клубок навіть двома резисторами. Зазначимо, що його розв'язання не є загальним для довільних струмів I_1 та I_2 , значення яких не було задане в

умові. Учень знайшов окремий розв'язок для співвідношення струмів $I_1 = 2I_2$, що формально міститься в авторському. Що ж стосується кількості резисторів, то за цієї умови в авторському розв'язку для трикутника $R_{AB} \rightarrow \infty$, а нескінченний опір інтерпретується як розрив ділянки, тобто відсутність третього резистора. Наведемо цей адаптований розв'язок.

Проаналізуємо, як дівчина приєднувала джерело напруги й амперметр до клубка:

1) оскільки амперметр ідеальний і має нульовий опір, то він показуватиме струм через ділянку BC (рис. 7):

$$I_{BC} = I_1 = \frac{U}{r_{BC}};$$

2) у другому випадку аналогічно:

$$I_{AC} = I_1 = \frac{U}{r_{AC}},$$

тож робимо висновок, що $r_{AC} = r_{BC}$, відповідно опори клубка резисторів між точками A і C та B і C однакові;

3) третє підключення має такий вигляд (рис. 8).

З цих трьох дослідів бачимо, що система має вісь симетрії a , яка проходить між точками A та B і через точку C .

У підказці до завдання зазначено, що потрібно використати мінімальну кількість резисторів. З одного резистора зробити модель не вийде, бо у нього лише дві точки, а в завданні три контакти. Проте у двох резисторів достатньо ніжок, щоб побудувати таку схему. Розташуємо їх, дотримуючись симетрії (рис. 9).

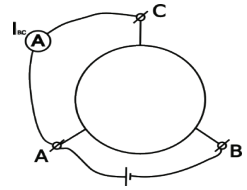


Рисунок 6

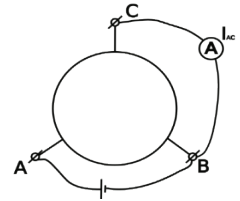


Рисунок 7

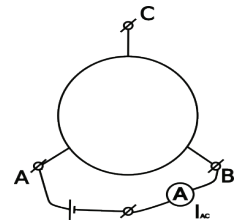


Рисунок 8

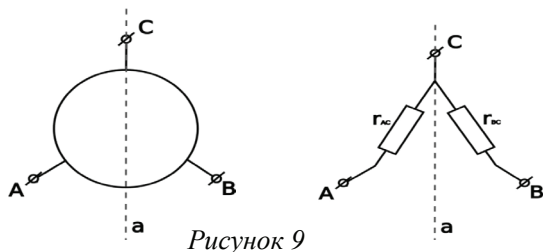


Рисунок 9

Підключимо до схеми джерело й амперметр, як про це сказано в умові (див. рис. 10). Тоді амперметр покаже струм: $I' = \frac{U}{r_{BC}} = I_1$.

Отже, $I' = I_1$.

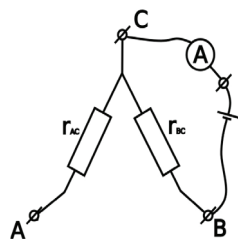


Рисунок 10

10.3. Гумова електростатика

Розв'язання. У першій ситуації сила, якою утримується стрижень, дорівнює силі тяжіння, що діє на стрижень: $F_1 = mg$. Розглянемо тепер умову рівноваги нижньої половинки стрижня: на неї діє вдвічі менша сила тяжіння, сила відштовхування F_e від верхньої половинки стрижня, направлена вниз, і сила натягу, направлена вгору. Отже:

$$T_1 = \frac{F_1}{2} + F_e.$$

У другій ситуації сила натягу в середній точці відрізняється від T_1 на величину сили притягання F_r нижньої половини стрижня до кільця:

$$T_2 = T_1 + F_r.$$

Для аналізу третьої ситуації скористаємось методом подібності. Хоча явно вираз для сили взаємодії кільця зі стрижнем написати не можна (це можна зробити лише інтегруванням по довжині стрижня), але можливо порівняти цю силу у другій і третій конфігурації. Коли збільшимо відстань від стрижня до кільця і радіус кільця удвічі, то і вся система стає збільшеною *майже* удвічі — незмінною лишається тільки довжина стрижня. Але можна уявити, що його наростили до вдвічі більшої довжини (і заряду), так що він став половинкою вдвічі

збільшеного стрижня. У разі збільшення вдвічі всіх розмірів системи сила взаємодії зменшиться в чотири рази. Окрім того, заряд вдвічі збільшеного стрижня стане вдвічі більшим, тому сила взаємодії з ним буде лише у два рази меншою, отже, сила притягання між кільцем і стрижнем буде $\frac{F_r}{2}$. Це означає, що сила натягу всередині стрижня у другій ситуації дає можливість знайти повну силу, що діє на весь стрижень у третій ситуації. Тобто шукана сила становить:

$$F_3 = F_1 + \frac{F_r}{2} = F_1 + \frac{T_2 - T_1}{2}.$$

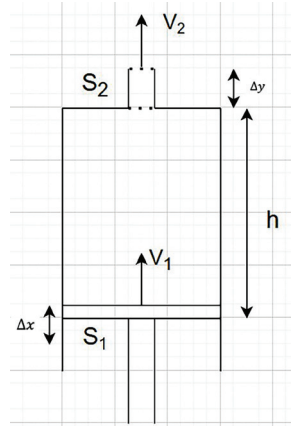
10.4. Прискорений шприц

Розв'язання. Застосуємо закон зміни енергії для води у шприці за зміщення поршня на невелику відстань Δx :

$$A_{\text{зовн}} = \Delta W_{\text{мех}},$$

де $A_{\text{зовн}} = F\Delta x$, а $\Delta W_{\text{мех}}$ — зміна механічної енергії води, яка складається зі зміни потенціальної енергії води під час її підймання та зміни кінетичної енергії внаслідок появи прискорення.

Закон зміни енергії вже для випадку, коли поршень підіймається вгору із певною швидкістю v_1 (за висоти стовпчика рідини у шприці h'):



$$F\Delta x = \Delta x S_1 \rho h' g + \frac{\Delta x S_1 \rho v_2^2}{2} + \frac{(h' - \Delta x) S_1 \rho (v_1 + a\Delta t)^2}{2} - \frac{h' S_1 \rho v_1^2}{2}.$$

Перший доданок — це зміна потенціальної енергії в полі сили тяжіння, другий доданок — кінетична енергія води в носіку у разі витискання в нього води зі шприца. Третій і четвертий компоненти — це різниця енергій всієї води у тубусі за зміщення поршня на Δx . Будемо лишати лише доданки із першим ступенем малості. Тоді за умови, що $\Delta x \approx v_1 \Delta t$:

$$F v_1 \Delta t = v_1 \Delta t S_1 \rho h' g + \frac{v_1 \Delta t S_1 \rho v_2^2}{2} + h' S_1 \rho v_1 a \Delta t - \frac{v_1 \Delta t S_1 \rho v_1^2}{2}.$$

Останній доданок у правій частині значно менший за другий ($v_1^2 \ll v_2^2$), тому ним можна знехтувати. Далі скоротимо на $v_1 \Delta t$:

$$F = S_1 \rho h' g + \frac{S_1 \rho v_2^2}{2} + h' S_1 \rho a.$$

Використовуючи рівняння нерозривності $S_1 v_1 = S_2 v_2$, отримаємо:

$$v_1^2 = \frac{2S_2^2}{S_1^2} \left(\frac{F}{\rho S_1} - h'(g + a) \right). \quad (1)$$

Швидкість за рівноприскореного руху і прискорення пов'язані кінематичним співвідношенням:

$$v_1^2 = v_0^2 + 2a(H - h'), \quad (2)$$

де H — висота стовпчика води, за якої можна стверджувати, що прискорення вже встановилось, а швидкість v_0 — початкова швидкість у рівноприскореному русі:

$$v_0^2 = \frac{2S_2^2}{S_1^2} \left(\frac{F}{\rho S_1} - h'g \right).$$

Рівняння (1) та (2) містять змінну невідому величину h' . Кожне з рівнянь можна представити у такому вигляді:

$$v_1^2 = A_1 - B_1 \times h';$$

$$v_1^2 = A_2 - B_2 \times h'.$$

Порівнюючи коефіцієнти B_1 та B_2 , отримуємо:

$$2a = \frac{2S_2^2}{S_1^2} (g + a).$$

$$\text{Отже, } a = \frac{g}{\frac{S_2^2}{S_1^2} - 1} \approx g \frac{S_2^2}{S_1^2}.$$

Примітка. Варто зазначити, що перехідний процес від прискорення з першої частини задачі, яке дорівнює $\frac{F}{m} - g$, до прискорення $g \frac{S_2^2}{S_1^2}$ відбувається нетривалий час, за який швидкість dorостає до V_0 . Але розгляд самого перехідного процесу наразі не потрібен.

Зверніть також увагу на те, що пряме застосування рівняння Бернуллі у цій задачі було б недоцільним, адже його використовують лише для стаціонарних потоків. Воно не враховує, для прикладу, зміну енергії води всередині між двома крайніми перерізами внаслідок наявного прискорення, а для розв'язання задачі це відіграє ключову роль.

10.5. Титан

Розв'язання:

1) масу атмосфери знайдемо за допомогою формули: $m_a g = P_a \times 4\pi R^2$, а масу Титану без атмосфери з виразу для прискорення вільного падіння на поверхні: $g = \frac{Gm}{R^2}$. Звідси:

$$\frac{m}{m_a} = \frac{g^2}{4\pi G P} \approx 14\,900;$$

2) з розмірних міркувань сила опору повітря:

$$F = k\rho S v^2,$$

де k — безрозмірний коефіцієнт, S — площа парашута, діаметр якого згідно з рисунком удвічі більший за діаметр d самого зонда, тому вважатимемо, що радіус парашута дорівнює d .

Під час тривалого падіння швидкість тіла встановлюється такою, щоб сила опору повітря компенсувала силу тяжіння. Отже, з $k\rho S v^2 = mg$ знаходимо:

$$v \approx \sqrt{\frac{mg}{\rho S}}.$$

За рівнянням стану ідеального газу розрахуємо густину атмосфери поблизу поверхні. Навіть без застосування цього рівняння, а з аналізу розмірностей, можна отримати:

$$\rho = \frac{\mu P}{RT}.$$

Остаточню маємо:

$$v \approx \sqrt{\frac{mgRT}{\pi d^2 \mu P}} \approx 3 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Швидкість зонда перед посадкою згідно з даними була 4,4 м/с;

3) в обох системах відліку — Сатурну і Сонця — в однаковому положенні на Титан діють однакові сили гравітації й викликають однакове прискорення, нормальна складова якого становить $\frac{v_{\text{відн}}^2}{r_{\text{кр}}}$. Але внаслідок різної відносної швидкості $v_{\text{відн}}$ радіуси кривини траєкторій будуть різними. За умовою Титан рухається відносно Сатурну зі швидкістю: $v = 5,6 \text{ км/с}$, і його траєкторію у цій системі відліку можна вважати колом,

радіус якого і є радіусом кривини траєкторії $r = \frac{v}{\omega} = \frac{vT_{\text{тит}}}{2\pi}$ в системі відліку

Сатурну. У системі відліку Сонця з рівності прискорень маємо: $r_{\text{кр}} = r \frac{v_{\text{відн}}^2}{v^2}$.

Тоді для найближчої та найвіддаленішої від Сонця точок:

$$r_{\min} = r \frac{(V - v)^2}{v^2} = \frac{vT_{\text{тит}}}{2\pi} \left(\frac{V}{v} - 1 \right)^2 = 660 \text{ тис. км};$$

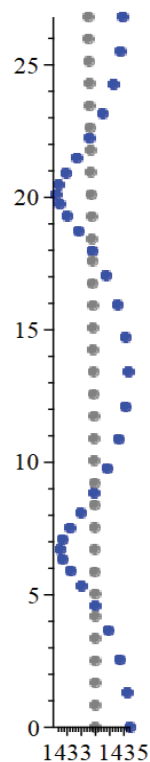
$$r_{\max} = r \frac{(V + v)^2}{v^2} = \frac{vT_{\text{тит}}}{2\pi} \left(\frac{V}{v} + 1 \right)^2 = 9,2 \text{ млн км}.$$

Насправді все складніше, тому сприйматимемо це як певне наближення. Зазначимо, що у системі відліку Сатурну траєкторія Титану справді може вважатися колом, оскільки сила, з якою Титан притягується до Сатурну, більша за середню силу його притягання до Сонця приблизно

$$\text{в } \frac{GM_{\text{сат}}/r^2}{GM_{\text{сон}}/R^2} = \frac{v^2/R^2}{v^2/R} = \frac{v}{V} \frac{T_{\text{сат}}}{T_{\text{тит}}} \approx 380 \text{ разів}.$$

За допомогою пакета комп'ютерної алгебри побудовано послідовні, з інтервалом в одну добу, положення Сатурну (кружечки вздовж майже прямої вертикальної лінії) і Титану (кружечки вздовж звивистої лінії) відносно Сонця, яке розміщується ліворуч на відстані приблизно 1434 млн км (див. рис.). Усі відстані наведені у млн км, за віссю абсцис вказано два значення 1433 і 1435 млн км — приблизно мінімальна й максимальна відстані від Титану до Сонця (що міститься далеко ліворуч). Якщо з'єднати відрізком відповідні зображення Сатурну й Титану, можна побачити, що цей відрізок рівномірно обертається, а повний оберт навколо Сатурну робить за 16 діб.

З рисунка бачимо, що траєкторія Титану вигинається в бік Сатурну у крайніх відносно Сонця положеннях, як і має бути за нашими розрахунками. Тому обов'язково між цими положеннями відбудеться зміна траєкторії з опуклості на вгнутість. У таких точках радіус кривини траєкторії прямує до нескінченності, а рівнодійна сил тяжіння Титану до Сонця й Сатурну в цей момент спрямована вздовж



дотичної до траєкторії і тому не викривляє її. Якщо рахувати, починаючи з нижніх точок графіка, то вперше на ньому це фіксуватиметься приблизно на п'яту-шосту добу.

Отже, остаточно:

$$r_{\min} = 660 \text{ тис. км};$$

$$r_{\max} \rightarrow \infty.$$

Експериментальний тур

10.1. Бронеплита з пінопласту

Розв'язання:

1) для знаходження межі міцності пінопласту будемо вимірювати силу, яку необхідно докласти до гвинтика, щоб продавити пінопласт. Оскільки ця сила більша, ніж межа вимірювання вагів, застосуємо важіль. Поділивши силу на площу гвинтика, дізнаємося межу міцності:

$$\sigma = \frac{F}{S_{\text{гвинт}}};$$

2) куля, що пробиває пінопласт, витрачає свою енергію на подолання сили опору (цей дослід робити не треба, розрахуємо теоретично):

$$\frac{Mv^2}{2} = \sigma S_{\text{кулі}} \times d = \pi R^2 \sigma d,$$

де d — товщина пінопласту.

Зважаючи кулю M , вимірюючи її радіус та товщину пінопласту, дізнаємося мінімальну швидкість кулі, необхідну для пробиття пінопласту:

$$v = \sqrt{\frac{2\pi R^2 \sigma d}{M}}.$$

Примітка. У цій задачі ще є опір шарів пінопласту, які куля, пробиваючи пінопласт, має розігнати до певної швидкості, тобто передати їм частину кінетичної енергії. Але оскільки завданням є розрахувати мінімальну швидкість кулі, то кінцеву швидкість шарів пінопласту можна вважати нульовою і відповідну енергію не враховувати.

10.2. Дизайнерський термометр

Розв'язання:

1) зважуємо порожню пробірку, що має корок і трубку (m_0);

2) занурюємо порожню пробірку за кімнатної температури, закрити корком з трубкою, у суміш води з льодом. При цьому важливо спочатку занурити відкритий кінець трубки, а потім все інше. Повітря стискається, і у трубку набирається вода. Затискаємо відкритий кінець трубки під водою і переносимо всю конструкцію у порожню посудину, заздалегідь встановлену на терезах (перед перенесенням, тримаючи трубку вертикально, протираємо її та пробірку серветкою). Зважуємо пробірку з корком, трубкою і набраною водою (m_1);

3) набираємо повну пробірку і трубку води й зважуємо все разом (m_2). Для того, щоб набрати у трубку воду, можна її просто всмоктати, але це не гігієнічно. Краще нагріти пробірку руками й повторити дослід. У цьому випадку трубка наповниться водою повністю.

З $m_2 - m_0$ дізнаємося початковий об'єм повітря в пробірці та трубці, а з $m_1 - m_0$ — зміну об'єму під час охолодження. З цих даних розраховуємо температуру в приміщенні.

Тиск газу в пробірці у процесі експерименту залишається сталим. Тому за рівнянням ізобари:

$$\frac{V_0}{T_0} = \frac{V_1}{T_1},$$

де V_0, T_0 — до занурення пробірки в льодяну воду, тобто T_0 — температура повітря в кімнаті, а V_1, T_1 — після занурення пробірки в льодяну воду, тобто $T_1 = 0^\circ\text{C}$.

$$V_0 = \frac{m_2 - m_0}{\rho_{\text{в}}}, \quad V_1 = V_0 - \frac{m_1 - m_0}{\rho_{\text{в}}}.$$

Підставляємо V_0, V_1 у рівняння ізобари й отримуємо:

$$T_0 = T_1 \frac{m_2 - m_0}{(m_2 - m_0) - (m_1 - m_0)} = T_1 \frac{m_2 - m_0}{m_2 - m_1}.$$

Примітка. Запропонований спосіб дає доволі точний результат, але є багато факторів, що можуть зумовити похибки. Спочатку треба виконувати всі вимірювання для сухої трубки й пробірки. Температура пробірки може бути вища за температуру повітря в кімнаті через контакт з руками. Після того, як вставили корок у пробірку, треба залишити пробірку на столі на кілька хвилин для встановлення теплової рівноваги.

Пробірку бажано після цього тримати за корок, щоб не нагріти її й, відповідно, повітря в ній. Під час проведення досліду пробірка має бути повністю занурена у воду, експеримент має тривати не менше ніж 4–5 хв, слід періодично перемішувати суміш води з льодом для встановлення теплової рівноваги. На зовнішніх поверхнях конструкції можуть лишитися краплі рідини, а враховуючи, що маса води в трубці близько 2 грамів, наявність крапель суттєво вплине на результат. Після проведення досліду й перенесення конструкції для зважування пробірку і трубку треба зовні протерти серветкою. У процесі експерименту в посудині накопичується вода, тому перед кожним зважуванням рекомендується використовувати кнопку «Tag».

10.3. Тюль

Розв'язання:

1) беремо в руку рамку із сіткою, розміщуємо площину із сіткою перпендикулярно до площини міліметрового паперу (рис. 1);

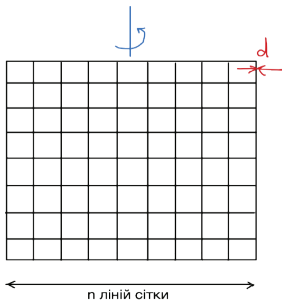


Рисунок 1

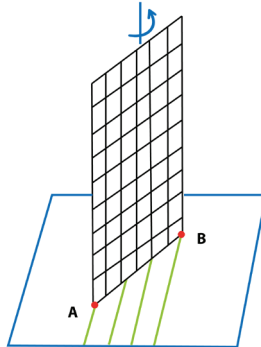


Рисунок 2

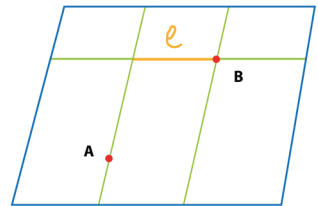


Рисунок 3

2) дивимось паралельно лініям міліметрового паперу (на рис. 2 позначені зеленим кольором) і повертаємо рамку до моменту, поки просвіт у сітці не зникне;

3) позначаємо на міліметровому папері точки A та B, де перебували кінці рамки;

4) вимірюємо відстань l , зображену на рисунку 3 (по лінії, перпендикулярній до ліній сітки, вздовж яких дивились). Товщина сітки:

$$d = \frac{l}{n}.$$

Вимірювання проводимо як мінімум 10 разів, щоб зменшити вплив людського фактору.

Демонстраційний тур

10.1. Парадокс із пляшкою

Відповідь	На кульку діють сили: а) сила атмосферного тиску (направлена вертикально вгору) б) сила гідростатичного тиску води (направлена вертикально вниз) в) сила тяжіння кульки (направлена вертикально вниз) г) сила реакції стінок пляшки (результуюча сила реакції стінок пляшки, направлена вертикально вниз).
Критерії оцінювання	✓ Названо будь-які дві сили з чотирьох або вказано сили, але є помилки у напрямках — 50 % ✓ Перелічено усі чотири сили й правильно вказано їхні напрямки — 100 %

10.2. Вода у решеті

Відповідь	Воду в пляшці утримують такі сили: а) різниця сил атмосферного тиску й тиску рідини над поверхнею води у пляшці (тиск над поверхнею рідини трохи менший за атмосферний) б) сили поверхневого натягу
Критерії оцінювання	✓ Правильно названо одну з двох сил — 50 % ✓ Правильно названо обидві сили — 100 %

10.3. Навздогін

Відповідь	Раніше досягне основи похилої площини пляшка, заповнена водою. Під час скочування пляшки з сумішшю піску та пінопласту потенціальна енергія системи переходить у кінетичну енергію поступального руху центра мас і кінетичну енергію обертального руху
------------------	--

	Під час спуску пляшки з водою потенціальна енергія системи переходить практично вся в кінетичну енергію поступального руху води, тому середня швидкість її більша
Критерії оцінювання	✓ Вказано, що раніше досягне основи пляшка, заповнена водою — 50 % ✓ Вказано, що раніше досягне основи пляшка, заповнена водою, та надано правильне пояснення цього явища — 100 %

10.4. Світильник із сосиски

Відповідь	Діоди, розташовані вздовж екіпотенціальної поверхні, світитись не будуть, а вздовж ліній електричного поля — будуть, бо між їхніми ніжками-контактами є різниця потенціалів
Критерії оцінювання	✓ Вказано, що між контактами світлодіодів, які не світяться, немає напруги — 50 % ✓ Надано повну правильну відповідь з поясненням, чому одні діоди світяться, а інші не світяться — 100 %

10.5. Незвична взаємодія

Відповідь	У момент удару об поверхню парти відбувається обмін енергіями між кулькою та м'ячиком. Частина потенціальної енергії деформації м'ячика перетворюється у кінетичну енергію кульки, і ця частина потенціальної енергії деформації м'ячика більша за початкову потенціальну енергію піднятої над столом кульки
Критерії оцінювання	✓ Вказано, що після удару об поверхню м'ячика кінетична енергія кульки виявилась більшою за початкову потенціальну енергію — 50 % ✓ Надано повну правильну відповідь з поясненням — 100 %

10.6. Фонтан навпаки

Відповідь	Рівень рідини у посудині з підфарбованою рідиною буде зменшуватись. Через витікання рідини з верхньої посудини тиск у трубці буде меншим за атмосферний, відповідно до закону Бернуллі. Внаслідок цього підфарбовану воду засмоктуватиме в трубку і її рівень у склянці буде зменшуватись
Критерії оцінювання	✓ Вказано, що рівень рідини у склянці з підфарбованою рідиною буде зменшуватись — 50 % ✓ Надано повну правильну відповідь з поясненням — 100 %

10.7. Запальничка № 2

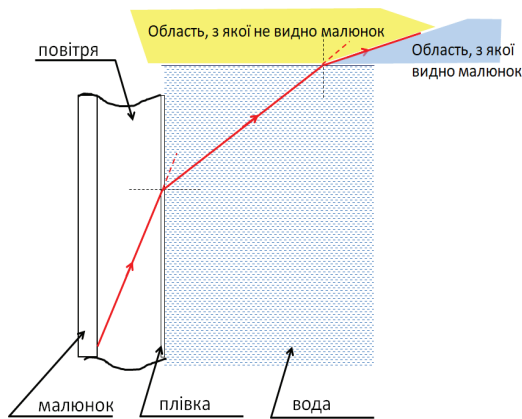
Відповідь	1. У місці надрізу зменшується площа поперечного перерізу фольги й тонка смужка, утворена надрізами, має значно більший опір, ніж інша частина фольги. Згідно з законом Джоуля — Ленца: зі зростанням опору збільшується і кількість виділеного тепла у смужці. Виділеного тепла достатньо, щоб запалити вату 2. Повна потужність дорівнює добутку перемножених ЕРС джерела і сили струму в колі. У другому випадку, внаслідок надрізування й зменшення в місці надрізу площі поперечного перерізу фольги, опір кола зростає, тому сила струму є меншою, ніж до надрізання, отже, і повна потужність у колі буде меншою
Критерії оцінювання	✓ Надано правильну повну відповідь на одне із запитань — 50 % ✓ Надано повну правильну відповідь на обидва запитання — 100 %

10.8. Пакетик-невидимка

Відповідь	За певного ракурсу спостереження промені спрямовані на поверхню пакета практично під нульовим кутом
------------------	---

	Вони заломлюються так, що є область, з якої неможливо побачити малюнок крізь шар води
Критерії оцінювання	✓ Надано правильну відповідь на запитання або зроблено пояснювальний рисунок — 50 % ✓ Надано повну правильну відповідь та зроблено пояснювальний рисунок — 100 %

Рисунок-відповідь



10.9. Папір проти пластику

Відповідь	Завдяки інертним властивостям під час обертання зростають сили натягу в папері. Диск здатний різати стаканчик завдяки силі тертя, а сам стаканчик руйнується внаслідок деформації зсуву
Критерії оцінювання	✓ Часткова відповідь: коли правильно пояснено, що під час обертання зростають сили натягу в стаканчику або що диск ріже стаканчик завдяки силі тертя та деформації зсуву — 50 % ✓ Надано повну правильну відповідь на запитання — 100 %

10.10. Магнітний двигун

Відповідь	1. У стінках банки внаслідок явища електромагнітної індукції виникають колові струми 2. Ці струми течуть радіально в дні банки 3. Індукційні струми взаємодіють з магнітним полем, внаслідок чого магнітне поле розкручує банку
Критерії оцінювання	✓ Правильно вказано два із трьох фізичних явищ — 50 % ✓ Надано повну правильну відповідь на запитання — 100 %

10.11. Перекидань

Відповідь	Всередині паперової коробки є важка металева кулька (циліндр), яка скочується вниз. У нижньому положенні кулька вдаряється об заокруглену внутрішню поверхню коробки, й момент її сили тяжіння обертає іграшку
Критерії оцінювання	✓ Правильно вказано, що всередині іграшки міститься важка кулька або циліндр — 50 % ✓ Надано повну правильну відповідь на запитання — 100 %

11 клас

Теоретичний тур

11.1. Електромагнітна стереометрія

Розв'язання:

а) опір тетраедра $ABCD$ (див. рис. 1) між двома його вершинами, скажімо A і B , легко розрахувати, якщо знати, що потенціали точок C і D будуть при цьому однаковими. Тоді в еквівалентній схемі ребро CD можна вилучити, що не призведе до зміни загального опору, так що схема зводиться до послідовних і паралельних з'єднань, а її сумарний опір становить $\frac{R}{2}$.

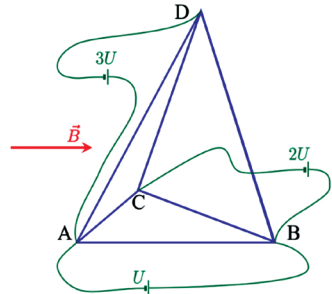


Рисунок 1

Завдяки симетричності тетраедра опір не залежатиме від того, яку пару вершин розглядати як точки приєднання джерела живлення;

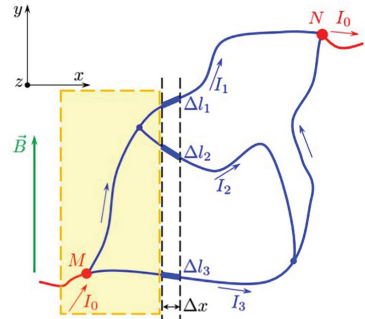
б) значення сил струмів, які протікають вздовж ребер тетраедра, можна розрахувати різними методами: скласти й розв'язати систему рівнянь Кірхгофа, скористатися методом однакових потенціалів, методом контурних струмів, методом суперпозиції. Результат розрахунку:

$$I_{AB} = -I_0, \text{ де } I_0 = \frac{U}{R},$$

$$I_{AC} = I_0, I_{BC} = 2I_0, I_{AD} = 3I_0,$$

$$I_{BD} = 4I_0, I_{CD} = 2I_0;$$

в) доведемо твердження (що сила Ампера, яка діє на тетраедр, дорівнює силі Ампера, що діє на прямий провідник, який з'єднує точки підключення напруги) в загальному випадку довільного розтікання струмів у тривимірному просторі (див. рис. 2).



$$\frac{I_i}{\Delta l_i} = \frac{I_i}{\Delta y_i} + \frac{I_i}{\Delta x_i} + \frac{I_i}{\Delta z_i}$$

Рисунок 2

Введемо координати x , y і z так, щоб магнітне поле було спрямоване вздовж осі y , і знайдемо, наприклад, проєкцію на вісь z сумарної сили з боку магнітного поля. Для цього розіб'ємо всю систему площинами, перпендикулярними до осі x (показано чорними штриховими лініями на рис. 2). В одному такому шарі опинилася певна кількість шматків дротів довжинами $\Delta l_1, \Delta l_2, \dots$. Розглянемо силу з боку магнітного поля на один з таких шматків Δl_i (див. нижню частину рис. 2). Її можна представити у вигляді векторної суми сил, що діють на шматки $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$, якими тече струм такої самої сили (у цьому можна впевнитись прямим розрахунком сили на Δl_i і проєктуванням її на осі координат). Отже, проєкція на вісь z дорівнює $I_i B \Delta x_i$. Тепер розрахуємо сумарну проєкцію сили для всіх шматків у шарі, що розглядається. Вона дорівнюватиме: $\sum I_i B \Delta x_i = B \Delta x \sum I_i$, оскільки всі Δx_i для одного шару однакові.

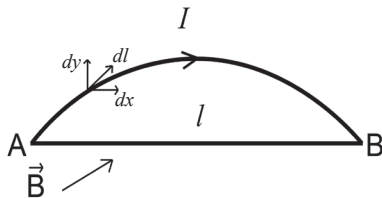
Сума ж струмів, яка фігурує в цьому виразі, дорівнює струму через клеми I_0 , оскільки, якщо розглянути виділену жовтим область, то сума всіх струмів, що з неї витікають, повинна дорівнювати струму, що затікає. Тепер залишилося взяти суму таких сил, що діють на всі шари:

$$F_z = \sum I_0 B \Delta x = I_0 B (x_N - x_M).$$

Таким чином, доведено твердження для компоненти F_z .

Аналогічно доводимо і для проєкції F_x , розбивши тепер на шари, перпендикулярні до осі z . Проєкція на вісь y дорівнює, очевидно, нулю. Отже, так можна отримати силу, що діє на будь-яку систему струмів;

г) сила Ампера, що діє на тетраедр, може бути знайдена як сума сил, що діють на його ребра. При цьому (як і у п. в) замінімо кожне з ребер на три взаємно перпендикулярні відрізки. Вводячи координату y вздовж AB , координату x перпендикулярно їй у площині ABC і координату z перпендикулярно площині ABC вгору, маємо, наприклад, таке представлення ділянки AC :



$$\left(-\frac{\sqrt{3}l}{2}, \frac{l}{2}, 0\right),$$

або ділянки BD :

$$\left(-\frac{l}{2\sqrt{3}}, -\frac{l}{2}, \sqrt{\frac{2}{3}}l\right).$$

Тепер знайдемо силу з боку магнітного поля на кожну з трьох компонент кожного з ребер тетраедра: на y -компоненту сила не діятиме, на x -компоненту сили будуть направлені вздовж осі z , а на z -компоненту сили будуть діяти вздовж осі x . Таким чином отримуємо вектори сил, що діють на кожне з ребер тетраедра:

$$\vec{F}_{AB} = (0, 0, 0), \vec{F}_{AC} = \left(0, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) I_0 B l,$$

$$\vec{F}_{BC} = (0, 0, -\sqrt{3}) I_0 B l,$$

$$\vec{F}_{AD} = \left(-\sqrt{6}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) I_0 B l,$$

$$\vec{F}_{BD} = \left(-4\sqrt{\frac{2}{3}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right) I_0 B l,$$

$$\vec{F}_{CD} = \left(-2\sqrt{\frac{2}{3}}, 0, \frac{2}{\sqrt{3}}\right) I_0 B l.$$

Тепер додамо ці вектори сил і розрахуємо модуль результуючої сили, що діє на тетраедр:

$$F = \sqrt{66} I_0 B l = \sqrt{66} U B l / R.$$

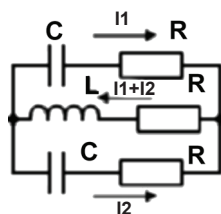
Зазначимо, що розрахунок можна спростити, виключивши з нього контурні струми, тоді він зводиться лише до двох ребер.

11.2. Схематозне безумство

Розв'язання:

а) оскільки заряди на конденсаторах однакові, то у початковий момент не буде миттєвого їх перерозподілу. Конденсатори з'єднані паралельно, тому можна їх замінити на один з ємністю $2C$ і початковим зарядом на обкладинках $2q$. Таким чином отримуємо новий коливальний контур і, знаючи, що струм через котушку максимальний, коли заряд на конденсаторі 0, із закону збереження енергії маємо:

$$\frac{(2q)^2}{2 \times 2C} = \frac{L I_{\max}^2}{2} \Rightarrow I_{\max} = \sqrt{\frac{2q^2}{LC}} = 0,14 \text{ мА};$$



б) оскільки в цей момент часу струм через котушку максимальний:

$$I_L = I_1 + I_2 \text{ (перше правило Кірхгофа),}$$

маємо:

$$\frac{dI_L}{dt} = 0 \Rightarrow \varepsilon_{\text{інд}} = -L \frac{dI_L}{dt} = 0.$$

Стає зрозуміло, що в цей момент часу заряди на конденсаторах не нульові, бо інакше друге правило Кірхгофа не буде виконуватись. Отже, за наявності активного опору в колі в момент часу, коли струм через котушку максимальний, заряд конденсаторів не нульовий. Таким чином, приймаючи заряд на першому конденсаторі за q_1 , а на другому — за q_2 , запишемо наступні рівняння Кірхгофа та після нескладних алгебраїчних перетворень отримуємо:

$$\begin{aligned} \frac{q_1}{C} &= -(I_2 + I_1)R - I_1 R = -R(I_2 + 2I_1) & W_1 &= \frac{q_1^2}{2C} = \frac{R^2 C}{2} (2I_1 + I_2)^2 \\ \frac{q_2}{C} &= -(I_2 + I_1)R - I_2 R = -R(2I_2 + I_1) & W_2 &= \frac{q_2^2}{2C} = \frac{R^2 C}{2} (2I_2 + I_1)^2 \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_{\text{заг}} = W_1 + W_2 + \frac{LI^2}{2} = \frac{R^2 C}{2} (2I_1 + I_2)^2 + \frac{R^2 C}{2} (2I_2 + I_1)^2 + \frac{L(I_1 + I_2)^2}{2} \approx \approx 133 \text{ Дж.}$$

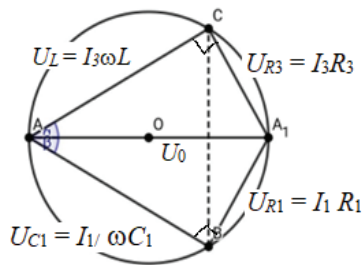
Це і є шукана кількість теплоти Q ;

в) з умов задачі й векторної діаграми для напруги зрозуміло, що:

$$\begin{aligned} \text{tg} \beta &= C_1 \omega R_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{R_3}{\omega L} = \text{tg} \alpha \Rightarrow \\ \Rightarrow \alpha &= \beta = 30^\circ. \end{aligned}$$

Також під час побудови векторної діаграми було використано той факт, що зсув фаз між коливанням дорівнює 90° . З цього бачимо, що трикутник ABC рівносторонній. Тоді з прямокутних трикутників ACA_1 та ABA_1 отримуємо:

$$U_{CA} = U_{BA} = \frac{\sqrt{3}}{2} U_0.$$



11.3. Інопланетний диск

Розв'язання:

а) за тривіальним розрахунком: $v_{\text{кінц.}} = at = 3 \times 10^8 \text{ м/с}$, що є швидкістю світла. Необхідно врахувати ефекти спеціальної теорії відносності.

Розглянемо прискорення станції в системі відліку, яка моментально має таку саму швидкість, як і сама станція — v . Тоді гамма-фактор:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}.$$

Нехай за годинником у цій системі відліку сплигло мало часу — $d\tau$, за якого станція прискориться на: $du = a_{\text{станції}} \times d\tau$. Такої самої швидкості набуде і будь-який предмет, нерухомий відносно неї. Відповідно, $a_{\text{станції}}$ і є прискоренням, що буде відчуватись, тобто: $a_{\text{станції}} = a$. Знайдемо нову швидкість станції відносно нерухомого спостерігача за релятивістською формулою додавання швидкостей:

$$\begin{aligned} v' &= \frac{v + du}{1 + v \times \frac{du}{c^2}} = (v + du) \times \left(1 + \frac{vdu}{c^2}\right)^{-1} \approx (v + du) \times \left(1 - \frac{vdu}{c^2}\right) = \\ &= v + du - \frac{v^2 du}{c^2} - \frac{v du^2}{c^2} \approx v + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) du = v + \frac{du}{\gamma^2} = \\ &= v + \frac{a d\tau}{\gamma^2}. \end{aligned}$$

$$\text{Зміна швидкості: } dv = v' - v = \frac{a d\tau}{\gamma^2}.$$

Нерухомий відносно галактики спостерігач вимірює час:

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma d\tau$$

(релятивістське сповільнення часу — коли будь-який рухомий годинник йде повільніше за такий самий нерухомий в γ разів). Тоді прискорення, виміряне в СВ галактики, це:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{a d\tau}{\gamma^2} \times \frac{1}{\gamma d\tau} = \frac{a}{\gamma^3} = a \times (1 - v^2/c^2)^{3/2}.$$

Розділимо змінні:

$$\frac{dv}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} = a \times dt.$$

Зробивши заміну: $v = \beta \times c$, проінтегруємо цей вираз:

$$\int_0^{\beta_{\text{кінц.}}} \frac{d\beta}{(1-\beta^2)^{3/2}} = \frac{a}{c} \int_0^{t_{\text{кінц.}}} dt$$

$$\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{0}{\sqrt{1-0^2}} = \frac{a}{c}(t-0),$$

$$\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{at}{c},$$

$$\beta^2 = (at/c)^2 \times (1-\beta^2),$$

$$\beta^2 \times (1 + (at/c)^2) = (at/c)^2,$$

$$\beta = \frac{at/c}{\sqrt{1+(at/c)^2}}.$$

$$v_{\text{кінц.}} = \beta \times c = \frac{at}{\sqrt{1 + (\frac{at}{c})^2}} \approx 2,12 \times 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Це кінцева швидкість, яка становить близько 71 % швидкості світла;

б) прискорення від удару не буде відчуватись в тих точках станції, які не змінюють своєї швидкості. Тому проаналізуємо удар і знайдемо їх.

Найпростіше перейти в систему відліку центра мас. Відстань від центра мас до центра станції:

$$r_c = \frac{m}{m+M}b.$$

Швидкість центра мас:

$$u = \frac{m}{m+M}v.$$

У системі відліку центра мас до удару мас станція і астероїд рухаються один на одного зі швидкостями: $u = \frac{m}{m+M}v$ і $v - u = \frac{M}{m+M}v$ відповідно, при чому лінійний імпульс кожного з них:

$$p = Mu = m(v - u) = \frac{mM}{m+M}v.$$

Тоді момент імпульсу системи відносно центра мас:

$$L = L_{\text{ст.}} + L_{\text{аст.}} = pr_c + p(b - r_c) = \frac{m^2M + mM^2}{(m+M)^2}bv = \frac{mM}{m+M}bv.$$

На відміну від енергії він зберігається: $L = L'$. Після удару планета і астероїд будуть обертатись як одне ціле навколо свого центра мас:

$$L' = I' \times \omega.$$

Момент інерції станції відносно центра мас (теорема Штейнера):

$$I'_{\text{ст.}} = \frac{1}{4}MR^2 + Mr_c^2 = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{mM^2}{(m+M)^2}b^2.$$

Момент інерції астероїда:

$$I'_{\text{аст.}} = m(b - r_c)^2 = \frac{m^2M}{(m+M)^2}b^2.$$

Загальний момент інерції після удару:

$$I' = I'_{\text{ст.}} + I'_{\text{аст.}} = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{m^2M + mM^2}{(m+M)^2}b^2 = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{mM}{m+M}b^2.$$

Отже, шукаємо таку точку, яка відразу після удару обертається навколо центра мас з такою самою швидкістю, яка була у неї до удару (x — відстань від точки обертання (центра мас)).

$$\omega x = u.$$

$$x = \frac{ul'}{L} = \frac{mv}{m+M} \frac{m+M}{mMbv} \times \left(\frac{1}{4}MR^2 + \frac{mM}{m+M}b^2 \right) = \frac{R^2}{4b} + \frac{m}{m+M}b.$$

Ця точка розташована з іншого боку від місця удару астероїда. Відстань від нього до центра диска тоді:

$$x' = x - r_c = \frac{R^2}{4b} + \frac{m}{m+M}b - \frac{m}{m+M}b = \frac{R^2}{4b}.$$

Усі такі точки утворюють смужку на поверхні станції.

11.4. Від гвинта!

Розв'язання:

1) довжина стрижня $2R$. З закону збереження енергії: $4mgR = 2\frac{mv^2}{2}$ (рівень відліку потенціальної енергії проходить через вісь симетрії гвинтової лінії, m — маса малої кульки) знаходимо швидкість руху кульок: $v = 2\sqrt{gR}$. На рисунку бачимо, що кульки проходять $N = 7$ повних обертів, отже, повний шлях кожної: $2\pi RN = 14\pi R$. Тоді час руху:

$$t = \frac{14\pi R}{2\sqrt{gR}} = 7\pi \sqrt{\frac{R}{g}} = \pi \approx 3,14 \text{ с};$$

2) з закону збереження енергії центр мас системи (ділить стрижень у співвідношенні 1:3 або $L/4 : 3L/4$) у момент зупинки підійметься на початкову висоту, тоді більша кулька підійметься на $L/2$ над рівнем верхніх частин витків, якщо припустити, що «гантелька» вертикальна (див. рис.).

Довжина стрижня L тепер більша за $2R$ (розмірами кульок, за умовою, можемо знехтувати). Визначаємо її за теоремою Піфагора, розглянувши пів витка, у крайніх точках якого перебувають з'єднані стрижнем кульки:

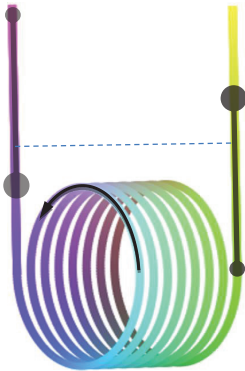
$$L = \sqrt{(2R)^2 + (h/2)^2} = 41 \text{ см.}$$

Отже, більша кулька підійметься на $\frac{41}{2} \text{ см} = 20,5 \text{ см}$ над рівнем верхніх частин витків. Але тоді менша кулька має опинитися на 20,5 см нижче, ніж рівень верхніх частин витків, або на 0,5 см нижче за прямолінійну частину дроту. За умови, що $R = 20 \text{ см}$, це відповідає куту в радіанах: $\beta = \frac{0,5}{20} = 0,025$. За такого кута відхилення від вертикалі стрижня буде: $R(1 - \cos\beta) \approx R\frac{\beta^2}{2} = 62,5 \text{ мкм}$. За довжини стрижня 41 см такою величиною можна знехтувати й вважати максимальною висотою підняття більшої кульки на 20,5 см над рівнем верхніх частин витків;

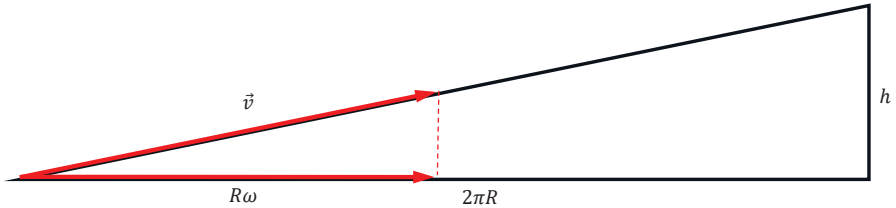
3) розглянемо малі коливання навколо положення стійкої рівноваги, коли «гантелька» перебуває між якимиись сусідніми витками гвинтової лінії (легша кулька — вгорі, важча — внизу). Позначимо через φ кут відхилення від положення рівноваги проєкції стрижня на вертикальну площину, перпендикулярну осі симетрії гвинтової лінії. Нехтуючи втрати на одному коливанні, запишемо закон збереження повної механічної енергії:

$$E = \frac{4mv^2}{2} + (-2mgR\cos\varphi) = \text{const},$$

де m — маса меншої кульки.



Виразимо швидкість v через кут φ .



Проекція швидкості v на площину кута φ дорівнює $R\omega$ і розташована з боку розгортки дуги гвинтової лінії:

$$\frac{v}{R\omega} = \frac{\sqrt{(2\pi R)^2 + h^2}}{2\pi R} = \sqrt{1 + \left(\frac{h}{2\pi R}\right)^2}.$$

Підставимо v в закон збереження енергії:

$$2mR^2 \left(1 + \left(\frac{h}{2\pi R}\right)^2\right) \omega^2 - 2mgR \cos \varphi = \text{const.}$$

Таке саме рівняння (тільки коефіцієнти інші) отримували раніше для малих коливань нитяного маятника. Продиференціюємо рівняння за часом, врахувавши, що $\omega = \dot{\varphi}$. Після скорочення виходить:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{2R \left(1 + \left(\frac{h}{2\pi R}\right)^2\right)} \sin \varphi = 0.$$

Для малих кутів $\sin \varphi \approx \varphi$ маємо рівняння гармонічних коливань з періодом:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2R}{g} \left(1 + \left(\frac{h}{2\pi R}\right)^2\right)} = \sqrt{\frac{2}{gR} ((2\pi R)^2 + h^2)} \approx 1,28 \text{ с.}$$

Положення стійкої рівноваги також можливе не між сусідніми витками гвинтової лінії, а скраю, коли менша кулька розташована на вертикальній частині дроту, а більша — на дузі гвинтової лінії. Не зрозуміло, де саме зупиниться «гантелька», тому взагалі можливими є 7 положень стійкої рівноваги, які ми вже розглянули, й ще одне скраю. Цей випадок є доволі складним, тож наведемо наступні фізичні міркування.

Позначимо через φ кут відхилення від вертикального положення проекції стрижня l на вертикальну площину, перпендикулярну осі симетрії гвинтової лінії. Зазначимо, що l залежить від φ під час коливань, бо нижня кулька зміщуватиметься вздовж гвинтової лінії в напрямку осі симетрії, а верхня — ні. Це зміщення пропорційне куту $\frac{\pi}{2} + \varphi$ (див. рис.) і дорівнює:

$$h_{\parallel} = \frac{h}{2\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right).$$

Застосовуємо теорему Піфагора:

$$l = \sqrt{L^2 - h_{\parallel}^2} = \sqrt{L^2 - h^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{\varphi}{2\pi} \right)^2}.$$

Тепер закон збереження повної механічної енергії має вигляд:

$$E = \frac{mu^2}{2} + \frac{3m(R^2\dot{\varphi}^2 + \dot{h}_{\parallel}^2)}{2} + U = \text{const},$$

де u — швидкість кульки з масою m (швидкість $u = \dot{y}$ є похідною за часом від вертикальної координати кульки: $y = l \cos \alpha - R \cos \varphi$), U — потенціальна енергія, що відносно рівня осі симетрії гвинтової лінії дорівнює:

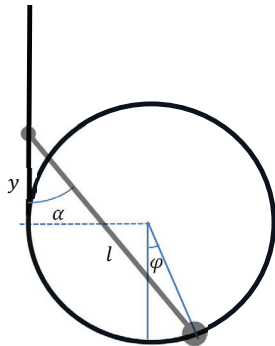
$$U = mgy - 3mgR \cos \varphi.$$

Користуючись рисунком, знаходимо зв'язок кутів $l \sin \alpha = R(1 + \sin \varphi)$, звідки:

$$l \cos \alpha = \sqrt{l^2 - R^2(1 + \sin \varphi)^2},$$

$$y = \sqrt{l^2 - R^2(1 + \sin \varphi)^2} - R \cos \varphi.$$

Як бачимо, точний розв'язок є математично складним, тому його не очікували від учасників олімпіади. Зазначимо, що рівноважний кут, навколо якого будуть спостерігатися у цьому випадку малі коливання, становитиме: $\varphi_0 \approx 0,18 \approx 10^\circ$. Враховуючи малість φ_0 , задачу можна розв'язати наближено.



11.5. День/ніч

Розв'язання:

а) сила тяжіння надає всім тілам біля поверхні планети прискорення:

$$g_0 = G \frac{M_{\text{пл}}}{R_{\text{пл}}^2} = \frac{4\pi}{3} G \rho R_{\text{пл}} = 8,38 \text{ м/с}^2.$$

Спостерігач на полюсі отримає саме такий результат вимірювання, а спостерігач на екваторі сам має доцентрове прискорення:

$$a = \omega^2 R_{\text{пл}} = \frac{4\pi^2}{T^2} R_{\text{пл}} = 0,13 \text{ м/с}^2.$$

Отже, він отримає менше значення прискорення вільного падіння:

$$g_1 = g_0 - a = 8,25 \text{ м/с}^2.$$

Відносне зменшення становить:

$$\frac{a}{g_0} = \frac{3\pi}{G\rho T^2} = 1,5 \times 10^{-2} = 1,5 \text{ \%}.$$

Воно не залежить від радіуса планети;

б) гравітаційний вплив супутника зумовлює припливні прискорення, тобто векторну різницю «абсолютного» гравітаційного прискорення в певній точці та в центрі планети. *Абсолютним* називаємо тут прискорення відносно інерціальної системи відліку. З умови випливає, що траєкторія обертання супутника відносно планети лежить у площині екватора. У точках екватора, що лежать на прямій «центр планети — центр супутника», припливні прискорення направлені *від* центра планети, тобто *зменшують* значення g на величину:

$$\Delta g_1 = G \frac{M_{\text{суп}}}{r^2} - G \frac{M_{\text{суп}}}{(r - R_{\text{пл}})^2} \approx -2G \frac{M_{\text{суп}} R_{\text{пл}}}{r^3}.$$

Вводимо це значення для точки екватора, найближчої до супутника; для найдалшої це значення таке саме. Тут: $r = 4 \times 10^8 \text{ м}$, і враховано, що: $R_{\text{пл}} \ll r$. Звідси:

$$\frac{\Delta g_1}{g_0} = -2 \frac{M_{\text{суп}} R_{\text{пл}}^3}{M_{\text{пл}} r^3} = -2 \frac{R_{\text{суп}}^3}{r^3} = -3,1 \times 10^{-8}.$$

Точки екватора планети, які лежать на діаметрі, перпендикулярному до лінії СП, розташовані на відстані $\sqrt{r^2 + R_{\text{пл}}^2}$ від центра супутника. У цих точках екватора на одиничну масу діє майже така сама сила тяжіння супутника, як на відстані r , тобто в центрі планети (у цьому легко переконатися). Але напрям цієї сили відрізняється на кут: $\alpha = \frac{R_{\text{пл}}}{r}$, через це виникає різниця векторів прискорень, модуль якої дорівнює:

$$\Delta g_2 = \alpha a_{\text{пл}} = \frac{R_{\text{пл}}}{r} \times G \frac{M_{\text{суп}}}{r^2} = \frac{R_{\text{пл}}}{r} \times G \frac{M_{\text{пл}}}{r^2} \times \frac{R_{\text{суп}}^3}{R_{\text{пл}}^3} = g_0 \frac{R_{\text{суп}}^3}{r^3},$$

де $a_{\text{пл}}$ — прискорення планети під дією притягання до супутника.

Додаткове прискорення Δg_2 збільшує прискорення вільного падіння, відповідно відносно збільшення:

$$\frac{\Delta g_2}{g_0} = \frac{R_{\text{суп}}^3}{r^3} = 1,6 \times 10^{-8}.$$

Отже, можна вважати, що шукана максимальна відносна різниця дорівнює:

$$\frac{\Delta g_2 - \Delta g_1}{g_0} \approx 4,7 \times 10^{-8}, \text{ тобто } 4,7 \times 10^{-6} \text{ \%.}$$

Планету розтягує в напрямку лінії С–П і стискає в перпендикулярному до цієї лінії напрямку. Як бачимо, отримане значення на 6 порядків менше, ніж значення, отримане в пункті а);

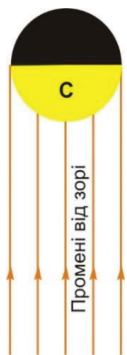


Рисунок 1

в) очевидно, що опівночі освітленість зумовлена тільки світлом зорі, розсіяним поверхнею супутника. Легко переконатися, що ця освітленість набагато менша, ніж освітленість E_0 , яку забезпечують прямі промені від зорі за нормального падіння. Оскільки світло від зорі йде практично паралельним пучком, ця величина однакова для планети та супутника. Тоді на супутник падає світловий потік: $\Phi_{\text{суп}} = \pi E_0 r_{\text{суп}}^2$ (див. рис. 1), а максимальна освітленість на поверхні планети від розсіювання цього потоку буде: $\frac{\Phi_{\text{суп}}}{R^2}$ або $E_0 \frac{r_{\text{суп}}^2}{R^2}$, де $R = 0,4$ млн км. Як бачимо,

ця величина має порядок $10^{-5} E_0$, тому немає сенсу враховувати її внесок у $E_{\text{день}}$ і можна вважати $E_{\text{день}} = E_0$.

Розглядатимемо значення кута: $0 \leq \alpha \leq \pi$. Очевидно, значення $E_{\text{ніч}}$ відмінне від нуля тільки за умови: $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ (див. рис. 2).

На рисунку: жовтим зафарбовано частину поверхні супутника, на яку падає світло від зорі; червоним — частину освітленої поверхні, розсіяне світло від якої спричиняє освітленість на планеті опівночі.

Проекція «червоної» частини супутника на площину поперечного перерізу пучка світла від зорі складається (див. рис. 3) з півкола та півеліпса, мала піввісь якого становить: $r_{\text{суп}} \cos \alpha$.



Рисунок 3

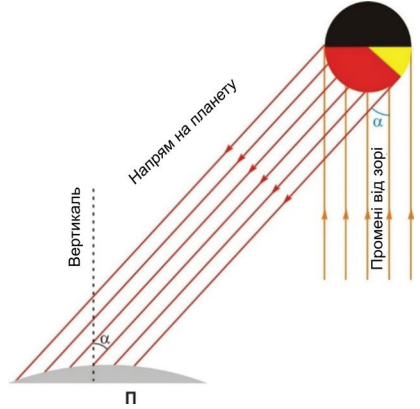


Рисунок 2

Отже, площа цієї проекції: $\frac{\pi r_{\text{суп}}^2}{2} (1 + \cos \alpha)$, на неї падає світловий потік: $\Phi_{\text{черв}} = E_0 \frac{\pi r_{\text{суп}}^2}{2} (1 + \cos \alpha)$; кожна маленька ділянка червоної зони рівномірно розсіює частину цього світла ($\eta = 60\%$) у півпростір.

Врахуємо також, що кут падіння розсіяного світла на поверхню екватора планети опівночі дорівнює α . Отримуємо формулу:

$$E_{\text{ніч}} = \eta E_0 \frac{r_{\text{суп}}^2}{4R^2} \cos \alpha (1 + \cos \alpha),$$

$$\text{тобто } \frac{E_{\text{ніч}}}{E_{\text{день}}} = \frac{\eta r_{\text{суп}}^2}{4R^2} \cos \alpha (1 + \cos \alpha).$$

Відповідний графік зображено на рисунку 4.

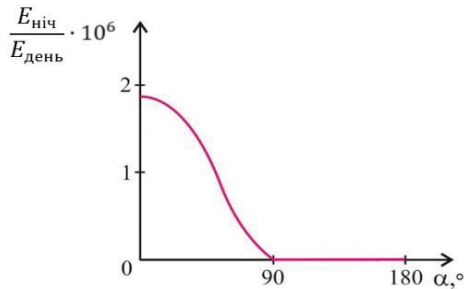


Рисунок 4

Експериментальний тур

11.1. Криптоніт

Розв'язання:

1) підключаємо магнітометр до батарейки й мультиметра, закріплюємо на одній з губок штангенциркуля так, як описано в інструкції до магнітометра;

2) прибираємо магніт і криптоніт якомога далі від магнітометра. За допомогою викрутки встановлюємо нульову напругу на виході;

3) до другої губки штангенциркуля закріплюємо постійний магніт (використовуємо додаткові підкладки так, щоб центр магніту був на рівні датчика Холла);

4) встановлюємо магніт на такій відстані, для якої в умові вказана величина магнітної індукції, записуємо напругу, визначаємо коефіцієнт пропорційності між індукцією магнітного поля і вихідною напругою магнітометра;

5) повертаємо магніт на 180° , переконуємось, що у разі зміни напрямку магнітного поля вихідна напруга магнітометра змінює знак;

6) змінюючи відстань між магнітом і магнітометром, визначаємо діапазон зміни вихідної напруги до насичення;

7) прибираємо магніт, до губки штангенциркуля закріплюємо досліджуваний зразок криптоніту;

8) за знаком вихідної напруги визначаємо тип криптоніту;

9) вимірюємо залежність поля криптоніту від відстані (під час визначення відстані враховуємо товщину зразка і датчика Холла);

10) визначаємо, якою функцією описується залежність індукції магнітного поля від відстані (це можна зробити, побудувавши графік у подвійному логарифмічному масштабі або послідовно пробуючи різні ступені r доти, поки не отримаємо лінійну залежність);

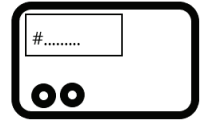
11) якщо вийде $1/r^2$, тоді це — магнітний монополь (хороші шанси отримати Нобеля), якщо $1/r^3$ — магнітний диполь (як звичайний магніт), але це навряд, бо він створює з двох боків поле протилежного знака, а наш зразок — однакового, якщо $1/r^4$ — два диполі, орієнтовані назустріч (це підходить!).

11.2. Конденсаторна чорна скринька

Розв'язання:

1) вимірюємо опір виданого нам резистора за допомогою мультиметра в режимі омметра;

2) визначаємо внутрішній опір мультиметра в режимі вольтметра. Для цього: підключаємо мультиметр до батарейки, вимірюємо напругу; повторюємо вимірювання, під'єднавши послідовно з мультиметром резистор з відомим опором. За результатами цих двох вимірювань розраховуємо опір вольтметра.



Примітка. Опір мультиметра в режимі вольтметра може бути різним за різних діапазонів вимірювання, тому в подальших вимірюваннях слід використовувати той самий діапазон вимірювання напруг, для якого був визначений опір;

3) досліджуємо чорну скриньку за допомогою мультиметра в режимі омметра. Він показує великий опір (мегаоми), який повільно збільшується. На підставі цього доходимо висновку, що конденсатор і резистор в чорній скриньці ввімкнуті послідовно (конденсатор повільно заряджається струмом омметра, напруга на ньому зростає, на резисторі падає, отже, струм через резистор зменшується, покази омметра зростають);

4) інший спосіб визначення схеми з'єднання: підключаємо чорну скриньку до батарейки на певний час (секунди, хвилини), а потім до вольтметра. Напруга, яку показує вольтметр, помітно менша, ніж напруга батарейки, виміряна в попередніх пунктах, і повільно зменшується. Це означає, що конденсатор і резистор з'єднані послідовно, тому за час підключення скриньки до батарейки конденсатор не встиг зарядитись до е. р. с. батарейки;

5) визначаємо ємність конденсатора й опір резистора в чорній скриньці. Для цього підключаємо її до батарейки на кілька хвилин, щоб конденсатор зарядився, а потім від'єднуємо від батарейки та підключаємо до вольтметра;

6) вимірюємо динаміку зміни показів вольтметра з часом (записуємо покази вольтметра кожні 10 секунд або щохвилини, щоб зміни напруги були невеликі — менше ніж 10 %). Розраховуємо сталу часу розряду:

$$C \times (R + Rv),$$

де C — ємність конденсатора, R — опір резистора, Rv — опір вольтметра;

7) повторюємо п.п. 5–6, ввімкнувши послідовно з вольтметром відомий резистор; визначаємо добуток: $C \times (R + Rv + R0)$, де $R0$ — опір відомого резистора;

8) розв'язавши систему двох рівнянь, знаходимо R і C .



АСТРОНОМІЯ

Умови задач

10 клас

Теоретичний тур

Загальна кількість балів — 50.

10.1. Екзопланета пульсара

1991 року польський астроном Александр Вольщан, вивчаючи з допомогою радіотелескопа в Аресібо пульсар PSR 1257+12 («Ліч»), помітив періодичну зміну частоти надходження радіоімпульсів від нього. Так була відкрита перша екзопланетна система пульсара (на той час вона взагалі вважалась першою підтвердженою екзопланетною системою), а згодом — екзопланети ще двох пульсарів.

Уявімо пульсар з масою $M_{\odot} = 1,5$ сонячної маси, що обертається навколо власної осі з періодом $P = 500$ мілісекунд. Оскільки вісь обертання не збігається з магнітною віссю, один з магнітних полюсів періодично спрямовується в бік Землі, й ми реєструємо короткі імпульси радіовипромінювання від нього.

Завдання: з'ясуйте, яка може бути максимальна зміна проміжків часу між зареєстрованими імпульсами Δt (порівняно з періодом осьового обертання пульсара) в результаті того, що пульсар рухається навколо спільного центра мас з екзопланетною масою: $M_{pl} = 3$ маси Юпітеру, якщо радіус орбіти екзопланети: $a_{pl} = 0,01$ а. о.

Примітка. Маса Юпітеру: $M = 1,9 \times 10^{27}$ кг.

(10 балів)

10.2. Комета наближається

Космічний апарат, що перебував поблизу Сонця, зареєстрував комету, яка рухалася на відстані: $r = 5$ а. о. від Сонця, змінюючи свою геліоцентричну екліптичну довготу на $\Delta\lambda = 0,03^\circ$ за добу та маючи променеву швидкість: $v_r = 14,5$ км/с. Обчислення засвідчили, що орбіта комети розташована в площині екліптики, а перигелієва відстань становить $0,5$ а. о.

Завдання:

а) з'ясуйте, чи може ця комета бути періодичною, і якщо так, то який її період обертання навколо Сонця;

б) визначте, яку швидкість буде мати ця комета під час перетину орбіти Землі та під яким кутом вона її перетне (кут між напрямком швидкості комети та дотичною до орбіти Землі).

Примітка. Орбіту Землі слід вважати коловою.

(10 балів)

10.3. Несподіваний сигнал

1 січня якогось року астрономи спостерігали вибух наднової, після чого вдалося порахувати червоне зміщення цього об'єкта: $z = 0,04$. Рівно через 5 років вони отримали сигнал, схожий на попередній, від ще однієї наднової. Кутова відстань між ділянками неба, з яких прийшли сигнали: $\alpha = 46''$. Було припущено, що другий сигнал надійшов до Землі після гравітаційного заломлення біля якоїсь чорної діри.

Завдання: знайдіть відстань до цієї чорної діри.

Примітка. Слід вважати, що напрям променя змінюється в малій області поблизу чорної діри. Значення сталої Габбла прийміть як: $H = 69 \frac{\text{км}}{(\text{с} \times \text{Мпк})}$. Для розв'язання може бути корисною наближена формула:

$$(1+x)^a \approx 1+ax, \text{ якщо } x \ll 1.$$

(10 балів)

10.4. Спостереження за зорею в галактиці Андромеди

Завдання: визначте, наскільки великий діаметр дзеркала повинен мати телескоп, щоб з його допомогою можна було б зареєструвати зорю, таку як Сонце, що перебуває в галактиці Андромеди, за час накопичення сигналу — 1 година.

Вихідні дані:

- для достовірної реєстрації зорі потрібно зафіксувати принаймні 25 фотонів з цієї зорі (відповідає відношенню сигналу до статистичного шуму: $S/N = 5$);
- спостереження ведуться через V-фільтр з максимумом пропускання на довжині хвилі — 0,55 мкм та з шириною фільтра — 0,1 мкм;
- через недоліки оптики й реєструвального пристрою фіксуються лише 50 % фотонів, які прилітають від зорі;

- фон неба відсутній;
- відстань до галактики Андромеди — 2,2 млн світлових років;
- абсолютна зоряна величина Сонця у V-фільтрі дорівнює 4,83;
- потік у V-фільтрі зорі з нульовою видимою зоряною величиною ($m_V = 0$) становить $9,97 \times 10^{10}$ фотонів $\text{с}^{-1}\text{м}^{-2}\text{мкм}^{-1}$ (фотонів за секунду на метр квадратний площі в діапазоні довжин хвиль — 1 мкм).

(10 балів)

10.5. Народження рою метеороїдів

Астрономи, спостерігаючи за кометою, помітили раптове зростання блиску її ядра на $\Delta m = 4,89$ зоряної величини. Провівши додаткові дослідження, вони класифікували цю подію як розпад ядра комети. У момент розпаду ядра комета перебувала на відстані: $\Delta = 6,472$ а. о. від Землі та $L = 5,819$ а. о. від Сонця й рухалась орбітою з ексцентриситетом: $\varepsilon = 0,672$ і великою піввіссю: $\alpha = 15,104$ а. о. Блиск ядра безпосередньо перед розпадом: $m_{\text{я}} = +17,89^m$. Коли комета була на мінімальній відстані: $l = 4,882$ а. о. від Землі, методами інтерферометрії отримали радіозображення ядра. Виявилось, що ядро — кулястої форми й у цей момент часу мало кутовий діаметр: $\rho = 3,88 \times 10^{-3''}$. При цьому варто врахувати деякі модельні наближення:

- уламки ядра після розпаду рухались тією самою орбітою, що й комета до розпаду;
- усі уламки мали однаковий діаметр;
- альbedo поверхні уламків — 0,354;
- уламки втратили можливість утворювати хвости;
- розсіювання світла поверхнею ядра комети та уламками — дифузне.

Завдання: визначте, чи можливе спостереження за поодиноким уламком комети в афелії його орбіти в момент опозиції з допомогою телескопа Габбла з проникною здатністю: $m_G = +29,48^m$; усі висновки підтвердьте розрахунками.

Примітка. Усі фотометричні величини задані у V-фільтрі. Видима зоряна величина Сонця: $m_V = (-26,78^m)$. Орбіта Землі — колова з радіусом: $r = 1,000$ а. о. Нахил орбіти комети дорівнює нулю.

(10 балів)

Практичний тур

Загальна кількість балів — 50.

10.1. Вік кулястого скупчення

Астрономи досліджують зоряні скупчення, щоб визначити їхній вік. Для цього використовують діаграму Герцшпрунга — Рассела (HR-діаграму), яка зображає розподіл зір за абсолютною зоряною величиною M_V та показником кольору $B - V$.

Зорі головної послідовності різних класів мають характерні значення температури, показника кольору й абсолютної зоряної величини (наближені значення цих параметрів подано у *табл. 1*). Зорі еволюціонують з різною швидкістю: наймасивніші швидше витрачають «паливо» і першими залишають головну послідовність (наближені значення часу життя зір на головній послідовності подано у *табл. 1*). Дані про 51 зорю в кулястому скупченні М3 див. у *табл. 2*.

Таблиця 1

Спектральний клас	Температура (К)	Показник кольору ($B - V$)	Абсолютна зоряна величина, M_V	Маса (у сонячних масах)	Час життя (у роках)
O5	40 000	-0,4	-5,8	30	3×10^6
B0	30 000	-0,3	-4,0	12	9×10^6
B5	15 000	-0,2	-1,2	5	5×10^7
A0	10 000	0	0,6	2,5	3×10^8
A5	8500	0,15	2,0	1,7	9×10^8
F0	7500	0,3	2,7	1,5	$2,2 \times 10^9$
F5	6500	0,45	3,5	1,3	4×10^9
G0	6000	0,6	4,4	1,1	8×10^9
G8	5500	0,73	5,1	0,9	$1,3 \times 10^{10}$
K0	5000	0,9	5,9	0,9	$2,2 \times 10^{10}$
K5	4500	1,15	7,3	0,7	$4,5 \times 10^{10}$
M0	3800	1,4	8,5	0,5	$6,8 \times 10^{10}$
M5	3200	1,6	10	0,4	2×10^{12}

Таблиця 2

Дані про 51 зорю в кулястому скупченні М3

N	V	B
1	14,112	15,088
2	14,418	15,296
3	14,616	15,432
4	14,670	15,414
5	14,742	15,464
6	14,976	15,640
7	15,102	15,900
8	15,138	15,929
9	15,210	15,805
10	15,444	15,984
1	15,498	16,005
12	15,570	16,077
13	15,642	16,338
14	15,642	15,949
15	15,678	15,938
16	15,678	15,909
17	15,732	16,174
18	15,732	15,912
19	15,768	16,155
20	17,100	17,709
21	17,370	17,965
22	17,496	18,091
23	17,640	18,220
24	17,766	18,335
25	17,892	18,454
26	17,928	18,483
27	18,072	18,572
28	18,090	18,565
29	18,126	18,575
30	18,270	18,712
31	18,396	18,831
32	18,558	18,993

33	18,792	19,245
34	19,026	19,493
35	19,188	19,655
36	19,224	19,699
37	19,260	19,789
38	19,296	19,738
39	19,458	19,958
40	19,458	19,947
41	19,602	20,182
42	19,620	20,149
43	19,692	20,167
44	19,800	20,300
45	19,854	20,394
46	19,890	20,485
47	20,124	20,700
48	20,124	20,664
49	20,322	20,931
50	20,430	20,985
51	20,556	21,151

Завдання:

а) побудуйте HR-діаграму (V як функція $B - V$; міжзоряним поглинанням можна знехтувати);

б) визначте вік кулястого скупчення МЗ за HR-діаграмою;

в) оцініть відстань до скупчення.

(10 балів)

10.2. Два об'єкти Сонячної системи

На поданих графіках уздовж осі абсцис відкладено час, уздовж осі ординат — відношення великої півосі орбіти до геліоцентричної відстані для двох об'єктів Сонячної системи.

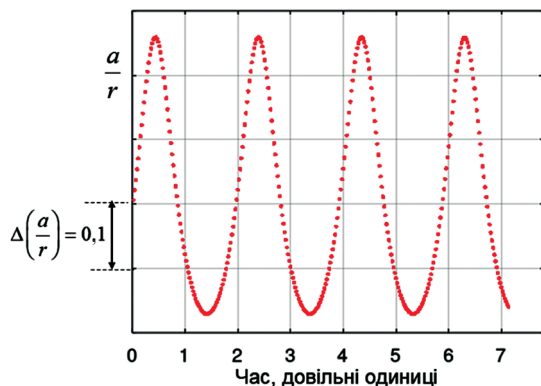
Завдання:

а) визначте ексцентриситет орбіти першого об'єкта; порівняйте отримане число з ексцентриситетами орбіт планет і дійдіть висновку, якої

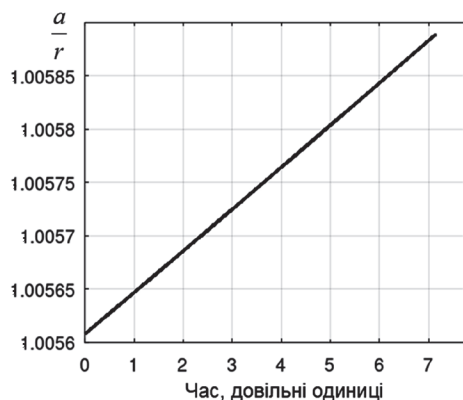
з них має стосуватися результат (якщо можливих варіантів більше ніж один, то розглядайте усі);

б) вкажіть, чому дорівнює одиниця часу (ціна поділки) на осі абсцис, якщо керуватися результатом із пункту а);

в) врахувавши, що часовий інтервал на другому графіку такий, як і на першому, та виконавши розрахунки, визначте другу планету.



Перший об'єкт: a — велика піввісь, r — геліоцентрична відстань.



Другий об'єкт: a — велика піввісь, r — геліоцентрична відстань.

Примітка. Визначаючи планети, скористайтесь даними з таблиці 1.

Таблиця 1

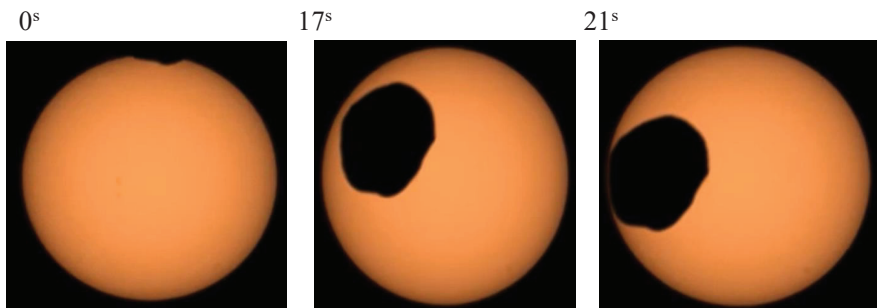
Планета	Велика піввісь, а. о.	Ексцентриситет
Меркурій	0,387	0,2056
Венера	0,723	0,0068
Земля	1,00	0,0167
Марс	1,52	0,0934
Юпітер	5,20	0,0489
Сатурн	9,58	0,0565
Уран	19,19	0,0472
Нептун	30,07	0,0087

(10 балів)

10.3. Затемнення на Марсі

5 березня 2024 року NASA опублікувала відео транзиту Фобосу — супутника Марсу — по диску Сонця, який спостерігав 8 лютого 2024 року марсохід «Perseverance», розташований поблизу екватора планети.

Розгляньте стоп-кадри із цього відео, де вказано відносний час фіксування.



Завдання:

а) оцініть лінійні розміри Фобосу, вважаючи, що обриси тіні Фобосу мають форму, близьку до еліпса;

б) знайдіть значення кутової висоти Фобосу над горизонтом у момент спостережень;

в) визначте основні характеристики руху Фобосу: кутову та лінійну швидкості, синодичний і сидеричний періоди обертання.

Примітка. Орбіти Фобосу та Марсу вважайте коловими. Фобос обертається в екваторіальній площині Марсу. У момент транзитів відстань від точки спостереження до центра Фобосу — 8064 км, відстань від Марсу до Сонця — 1,435 а. о., діаметр Сонця — 1 391 400 км, радіус Марсу — 3396 км, радіус орбіти Фобосу — 9380 км, сидеричний період обертання Марсу навколо власної осі — 24,62 години.

(10 балів)

Псевдоспостережний тур

У відповідях мають фігурувати лише ті об'єкти, які розташовані над горизонтом (але в умовах можуть згадуватись і невидимі).

10.1–10.2. Вкажіть два найяскравіші об'єкти, розташовані над горизонтом.

Відповіді внесіть у бланк в рядки 1 (найяскравіший об'єкт) та 2 (другий за яскравістю).

10.3. Зазначте, яка зоря, яскравіша за 2^m , розташована найближче до найяскравішого об'єкта.

Відповідь внесіть у бланк в рядок 3.

10.4. Визначте кутову відстань між об'єктами з попереднього пункту.

Відповідь внесіть у бланк в рядок 4.

10.5–10.16. Перерахуйте видимі зорі, яскравіші за $1,5^m$. Розташуйте їх за даними Stellarium від найяскравішої до найменш яскравої (без урахування впливу атмосфери). Вкажіть відстань до кожної із зір (у світлових роках, можна округлити до цілих) і спектральний клас (наприклад, A4).

Відповідь внесіть у бланк в рядки 5–15, кожну зорю — на окремий рядок, розташуйте від найяскравішої до найменш яскравої. Якщо зір менше, ніж рядків, то завершальні лишаємо не заповненими. Якщо зір більше, ніж рядків, то дві сусідні зорі можна записати разом.

10.17. Вкажіть, зір якого спектрального класу (O, B, ...) найбільше серед найяскравіших, визначених у пунктах 5–16.

Відповідь (чи кілька відповідей) внесіть у бланк в рядок 17.

10.18. Зазначте найбільш віддалений об'єкт, який можна побачити неозброєним оком.

Відповідь внесіть у бланк в рядок 18.

10.19–10.20. Проксима Центавра має координати (на епоху J2000): $\alpha = 14^{\text{h}}30^{\text{m}}$, $\delta = -62^{\circ}41'$ і розташована на відстані 1,30 пк від Сонця. З'ясуйте, який блиск матиме Сонце (абсолютна зоряна величина +4,77) під час спостереження з планети, що обертається навколо Проксими.

Відповідь внесіть у бланк в рядок 19.

Вкажіть, якою за яскравістю зорею буде Сонце в сузір'ї, у якому перебуватиме під час спостереження зі згаданої планети. Назвіть це сузір'я.

Відповідь внесіть у бланк в рядок 20.

11 клас

Теоретичний тур

Загальна кількість балів – 50.

11.1. Комета наближається

Космічний апарат, що перебував поблизу Сонця, зареєстрував комету, яка рухалась на відстані $r = 5$ а. о. від Сонця, змінюючи свою геліоцентричну екліптичну довготу на $\Delta\lambda = 0,03^\circ$ за добу та маючи променеву швидкість: $v_r = 14,5$ км/с. Обчислення засвідчили, що орбіта комети розташована в площині екліптики, а перигелієва відстань дорівнює 0,5 а. о.

Завдання:

а) з'ясуйте, чи може ця комета бути періодичною, і якщо так, то який її період обертання навколо Сонця;

б) визначте, яку швидкість буде мати ця комета під час проходження орбіти Землі та під яким кутом вона її перетне (кут між напрямком швидкості комети та дотичною до орбіти Землі).

Примітка. Орбіту Землі слід вважати коловою.

(10 балів)

11.2. Подвійна система

Завдання: знайдіть густину меншого за розміром компонента подвійної системи, якщо відомо, що:

- система рухається в напрямку Сонця, сумарна маса компонент — $1,4 M_\odot$;
- променеві швидкості зір системи внаслідок орбітального руху змінюються в межах: від $-2,85$ до $36,28$ км/с для одного з компонентів і від $-16,83$ до $4,84$ км/с для іншого.

Примітка. Відносна орбіта — колова, кут її нахилу невідомий.

(10 балів)

11.3. Екзопланетна система

Не так давно у відносно близької зорі була відкрита екзопланетна система. Навколо червоного карлика з радіусом $0,12 R_{\odot}$ у майже одній площині та майже коловими орбітами обертаються 7 планет, деякі характеристики яких наведено у таблиці 1.

Таблиця 1

Планета	Маса, $m (M_{\oplus})$	Велика піввісь, a (а. о.)	Орбітальний період, T (земних діб)	Радіус, $R (R_{\oplus})$
b	1,37	0,0115	1,51	1,12
c	1,31	0,0158	2,42	1,10
d	0,39	0,0223	4,05	0,77
e	0,69	0,0293	6,10	0,92
f	1,04	0,0385	9,21	1,05
g	1,32	0,0468	12,35	1,13
h	0,33	0,0619	18,77	0,78

Наш астронавт подорожує вздовж екватора планети *e*. Припустимо, що її вісь обертання перпендикулярна до площини орбіти, а атмосфера відсутня.

Завдання: опишіть умови спостереження за планетами *d* та *f*; в яких конфігураціях вони можуть бути; які в цей час їхні кутові діаметри; з яким періодом конфігурації повторюються.

(10 балів)

11.4. Arcanum nebula

Зону III вивчають за допомогою 4,5-метрового телескопа з головною фокусною відстанню 10 м і використанням ПЗЗ-матриці, встановленої за окуляром з фокусною відстанню 25 мм та полем зору 50° . Все випромінювання, яке потрапило в об'єктив телескопа, без втрат фіксується матрицею.

Турбулентність атмосфери не дає можливості підвищити роздільну здатність телескопа більше ніж $0,9''$. Блиск нічного неба в районі обсерваторії, зумовлений власним світінням атмосфери та техногенними факторами, дорівнює 100 мклк/стерадіан. Для спрощення вважатимемо,

що поверхнева яскравість туманності однакова в полі зору телескопа. Прийемо, що для реєстрації випромінювання астрономічного об'єкта необхідно, щоб освітленість, яку він створює в межах тілесного кута, під яким його видно, була не меншою за 10 % світіння неба в тому самому тілесному куті. Зауважимо, що зоряна величина, яка відповідає освітленості 1 люкс у смузі (V) пропускання ПЗЗ-матриці, дорівнює $(-14,18)^m$, а проникна здатність телескопа може бути апроксимована чисельною емпіричною залежністю:

$$m_V = 2,5 + 5 \lg D + 2,1 \times \lg t,$$

де D — діаметр об'єктива телескопа (мм), а t — експозиція (години).

Щоночі спостереження тривають по 9^h.

Завдання:

а) з'ясуйте, якою повинна бути кількість нічних спостережень для того, щоб можна було на зображенні зони НІІ розрізнити деталі її структури, кутові розміри яких дорівнюють роздільній здатності телескопа;

б) визначте, якою є видима зоряна величина у смузі (V) зображення зони НІІ в полі зору телескопа.

Примітка. Слід вважати, що туманність повністю заповнює це поле. Відповідь округліть до десятих.

(10 балів)

11.5. Гравітаційне лінзування

Гравітаційне лінзування — це явище, коли світло від віддаленого джерела може відхилитися через наявність масивного об'єкта — лінзи, розташованої поблизу або на лінії зору між спостерігачем і віддаленим об'єктом. Вперше це явище спостерігали під час сонячного затемнення 1919 року.

Спробуйте детально розібратися, що це за явище — гравітаційне лінзування.

Гравітаційне лінзування на прямій

У разі проходження поблизу масивного об'єкта світло відхиляється на кут:

$$\alpha = \frac{4GM}{bc^2},$$

де b — прицільний параметр, а M — маса об'єкта.

Завдання 1:

• проаналізуйте випадок, коли лінза, джерело та спостерігач розміщуються на одній прямій (нехай відстань від спостерігача до джерела — D_S , а відстань до лінзи — D_L);

- побудуйте схему для опису фізичної картини, яку спостерігатимете;
- визначте кутовий радіус зображення.

Відповідь подайте через параметри M, D_S, D_L та відомі константи.

Гравітаційне лінзування не на прямій

Нехай тепер для спостерігача джерело й лінза розміщуються на кутовій відстані одне від одного: $\beta \ll 1$.

Завдання 2:

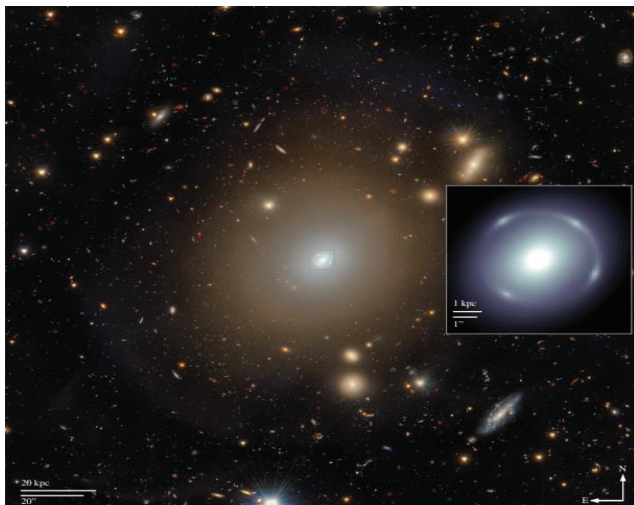
- побудуйте схему для опису фізичної картини, яку спостерігатимете;
- визначте кути, під якими бачитимете зображення джерела.

Відповідь подайте через параметри M, D_S, D_L, β та відомі константи.

Астрономічне фото дня 26.02.2025 — NGC 6505

Розгляньте зображення повного кільця Ейнштейна навколо еліптичної галактики NGC 6505 з червоним зміщенням: $z_L = 0,042$. Це перша, виявлена з допомогою телескопа «Евклід», сильна гравітаційна лінза. Поєднання малого червоного зміщення галактики-лінзи, яскравого джерела та повноти кільця робить це надзвичайно рідкісним явищем, не спостережуваним досі.

Зі спектроскопічних даних було визначено червоне зміщення джерела: $z_S = 0,406$.



Завдання 3:

- з'ясуйте, якому з розглянутих варіантів відносного розташування спостерігача, джерела та лінзи відповідає це зображення;
- знайдіть ефективну масу «гравітаційної лінзи».

(10 балів)

Практичний тур

Загальна кількість балів — 50.

11.1. Вік зоряних скупчень

Завдання:

а) побудуйте графіки залежностей тривалості життя зір на головній послідовності від їхньої маси та світності, використавши графік залежності світності від маси (графіки слід будувати в логарифмічній шкалі у сонячних одиницях; для побудови проведіть розрахунки щонайменше для трьох різних значень);

б) визначте вік зоряних скупчень, вказаних на діаграмі Герцшпрунга — Рассела (рис. 1; світність зір наведено в одиницях світності Сонця).

Примітка. Світність Сонця $L_{\odot} = 3,83 \times 10^{26}$ Вт, маса Сонця $M_{\odot} = 1,99 \times 10^{30}$ кг.

Слід вважати, що:

- світність зір протягом їхнього життя на головній послідовності не змінюється;
- 0,7 % маси протонів, що об'єднуються в ядра гелію під час реакцій синтезу, виділяється як теплова енергія;
- зорі утворюються з воднево-гелієвого газу, початкова кількість атомів водню у якому становить 92 %, а атомів гелію — 8 %;
- зоря припиняє своє існування як зоря головної послідовності, коли водень у її центральній частині, маса якої становить 13 % маси всієї зорі, перетворюється на гелій;
- моментом сходження зір з головної послідовності на діаграмі Герцшпрунга — Рассела є точка, дотична якої є чітко вертикальною.

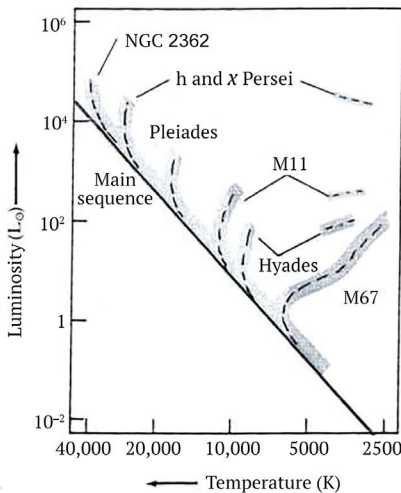


Рисунок 1

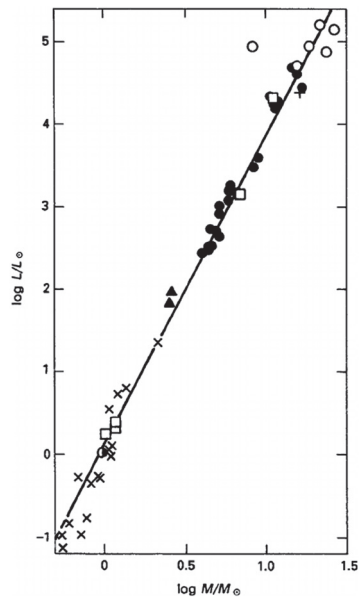


Рисунок 2

На рисунку 2 вказано отриману зі спостережень за подвійними зоряними системами залежність між світністю зір та їхньою масою, вираженою в сонячних одиницях ($\log$ позначає десятковий логарифм $\lg$ або, що те саме, $\log_{10}$).

(10 балів)

11.2. Астрокалендар

У календарі одного астронома записано дати та час деяких послідовних астрономічних подій для мешканців України, а саме:

- A 20 березня 11:00 UTC
- B 21 червня 03:00 UTC
- C 4 липня 10:00 UTC
- D 22 вересня 21:00 UTC
- E 21 грудня 15:00 UTC
- F 3 січня 05:00 UTC

Завдання:

а) визначте, яким астрономічним подіям можуть відповідати ці дати (підпишіть кожну подію A–F);

б) побудуйте схему (рисунок) орбіти Землі та позначте ці події на ній;

в) використовуючи лише ці дані, оцініть ексцентриситет орбіти Землі.

Примітка. Під час обчислень слід вважати, що ексцентриситет орбіти Землі набагато менший за одиницю.

(10 балів)

11.3. Спіральна галактика

Спостереження за спіральними галактиками наводять на думку, що їхні зовнішні ділянки обертаються значно швидше, ніж це передбачає класична ньютонівська механіка, а це свідчить про існування темної матерії.

Проаналізуйте реальні дані спостережень за галактикою NGC 3198 (вважайте, що стежимо за галактикою з ребра). У таблиці 1 наведено спостереження за галактикою NGC 3198 у лінії 21 см (нейтральний водень, $\lambda_0 = 21,1063$ см), які проводились із Землі, тому доступні лише кутові радіуси (θ , у кутових хвилинах) та довжина хвилі, на якій спостерігалася ця лінія (λ , у см).

Таблиця 1

$\theta(^{\circ})$	$\lambda(\text{см})$
0,5	21,1558
1,0	21,1572
1,5	21,1589
2,0	21,1611
2,5	21,1635
3,0	21,1659
3,5	21,1682
4,0	21,1703
4,5	21,1720
5,0	21,1734
5,5	21,1746
6,0	21,1755
6,5	21,1762
7,0	21,1762
7,5	21,1768
8,0	21,1776
8,5	21,1778
9,0	21,1779
9,5	21,1780
10,0	21,1780

Завдання:

а) побудуйте криву обертання для цієї галактики (залежність швидкості обертання від кутової відстані до центра); з'ясуйте, чи відповідає крива обертання галактики кеплерівській залежності (випадок, коли переважна частина маси зосереджена в центральному точковому тілі);

б) визначте відстань до галактики;

в) побудуйте графік залежності динамічної маси галактики (такої точкової маси, розміщеної у центрі, щоб швидкість обертання відповідала заданій) від лінійної відстані до центра галактики;

г) видима маса галактики (зорі та газ) становить: $M = 6 \times 10^{10} M_{\odot}$; з'ясуйте, починаючи з якої відстані криву обертання не вдається пояснити гравітацією лише видимої матерії;

д) вкажіть, яким має бути розподіл густини темної матерії залежно від відстані до центра, щоб спостерігалася така залежність динамічної маси на відстанях значно більших, ніж розрахованих у пункті г).

(10 балів)

Псевдоспостережний тур

У відповідях мають фігурувати лише ті об'єкти, які розташовані над горизонтом (але в умовах можуть згадуватись і невидимі).

11.1–11.2. Вкажіть два найяскравіші об'єкти, розташовані над горизонтом.

Відповіді внесіть у бланк в рядки 1 (найяскравіший об'єкт) та 2 (другий за яскравістю).

11.3. Зазначте, яка зоря, яскравіша за 2^m , розташована найближче до найяскравішого об'єкта.

Відповідь внесіть у бланк в рядок 3.

11.4. Визначте кутову відстань між об'єктами з попереднього пункту.

Відповідь внесіть у бланк в рядок 4.

11.5–11.15. Перерахуйте видимі зорі, яскравіші за $1,5^m$. Розташуйте їх за даними Stellarium від найяскравішої до найменш яскравої (без урахування впливу атмосфери). Вкажіть відстань до кожної із зір (у світлових роках, можна округлити до цілих) і спектральний клас (наприклад, A4).

Відповідь внесіть у бланк в рядки 5–15, кожну зорю — на окремий рядок, розташуйте від найяскравішої до найменш яскравої. Якщо зір менше, ніж рядків, то завершальні лишаємо не заповненими. Якщо зір більше, ніж рядків, то дві сусідні зорі можна записати разом.

11.16. Серед зір із пунктів 5–15 назвіть ту, яка має максимальну амплітуду зміни блиску. Наведіть зенітну відстань згаданої зорі.

Відповідь внесіть у бланк в рядок 16.

11.17. Серед зір, яскравіших за $4,5^m$, вкажіть хоча б одну зорю, за назвою якої іменують цілий клас змінних зір. Наведіть зенітну відстань згаданої зорі.

Відповідь внесіть у бланк в рядок 17.

11.18. Серед зір, яскравіших за $4,5^m$, назвіть принаймні одну затемнювану змінну. Наведіть зенітну відстань згаданої зорі.

Відповідь внесіть у бланк в рядок 18.

11.19. Змінюючи (за потреби) поле зору, знайдіть на зенітній відстані, меншій за 20° , яку-небудь галактику з каталогу Мессьє. Запишіть її координати та позначення (за каталогом Мессьє).

Відповідь внесіть у бланк в рядок 19.

11.20. Маючи підзорну трубу з фокусною відстанню окуляра 15 мм і полем зору окуляра 60° , з'ясуйте, за якої максимальної фокусної відстані об'єктива вдасться повністю побачити в полі зору два об'єкти з пункту 11.3.

Відповідь внесіть у бланк в рядок 20.

Розв'язання задач

10 клас

Теоретичний тур

10.1. Екзопланета пульсара

Розв'язання. Зміна проміжків часу пов'язана зі зміною відстані «пульсар — спостерігач» (у результаті руху пульсара навколо центра мас екзопланетної системи). Як наслідок, електромагнітний імпульс долає різну відстань до спостерігача.

Максимальна зміна проміжків часу між зареєстрованими імпульсами буде тоді, коли пульсар рухається до нас (або від нас) уздовж своєї орбіти навколо центра мас. Для цього промінь зору має лежати у площині орбіти. Різниця проміжків часу (порівняно з періодом осьового обертання пульсара) дорівнюватиме:

$$\Delta t = \frac{v_{\odot P}}{c},$$

де c — швидкість світла, а $v_{\odot}$ — швидкість зорі (пульсара).

Знайдемо орбітальну швидкість зорі відносно центра мас. Спочатку розрахуємо швидкість планети — це можна зробити за формулою колової швидкості:

$$v = \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{a_{pl}}},$$

або за третім законом Кеплера знайти період $T = T_{\oplus} \sqrt{\frac{a_{pl}^3}{M_{\odot}}}$, а потім за формулою:

$$v = \frac{2\pi a_{pl}}{T}.$$

Здійснивши розрахунки, отримуємо швидкість планети — 365 км/с.

Швидкості зорі та планети співвідносяться, як $\frac{v_{\odot}}{v_{pl}} = \frac{M_{pl}}{M_{\odot}}$, отже, швидкість зорі буде становити 695 м/с.

Підставляємо у формулу $\Delta t = \frac{v_{\odot P}}{c}$ й отримуємо: $\Delta t = 1,2$ мкс.

10.2. Комета наближається

Розв'язання:

а) розрахуємо повну швидкість комети, змінивши розмірність (градуси на добу на км/с тангенціальної швидкості):

$$v = \sqrt{\left(\frac{4\lambda \times r \times \pi \times 150 \times 10^6}{180 \times 24 \times 3600}\right)^2} + v_r^2 = 16,5 \text{ км/с.}$$

Обчислимо велику піввісь з інтеграла енергії:

$$v^2 = GM_{\odot} \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right), a = 10,5 \text{ а. о.}$$

Вона вийшла додатною, отже, орбіта еліптична, а комета періодична.

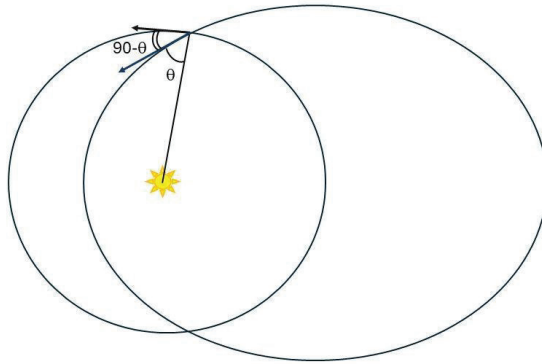
Період обертання знаходимо з третього закону Кеплера:

$$T = a^{3/2} = 34 \text{ роки;}$$

б) визначити швидкість комети під час перетину земної орбіти також допоможе інтеграл енергії за $r = 1 \text{ а. о.}$:

$$v_1 = 41,2 \text{ км/с.}$$

Далі знайдемо кут між напрямком руху комети та її радіусом-вектором (див. рис.).



Варіант 1. Спочатку аналогічно знайдемо швидкість комети у перигелії (58,9 км/с), коли її радіус-вектор перпендикулярний до вектора швидкості, а потім застосуємо закон збереження моменту імпульсу:

$$v_1 r_1 \sin \theta = v_q r_q \sin 90.$$

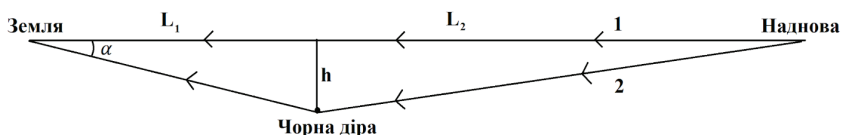
Варіант 2. Можна обчислити кут між радіусом-вектором і швидкістю на відстані $r = 5 \text{ а. о.}$, адже нам відомі компоненти швидкості, а потім застосувати закон збереження моменту імпульсу до точок $r = 5 \text{ а. о.}$ та $r = 1 \text{ а. о.}$

Одним із цих способів отримуємо кут $45,7^\circ$. Оскільки дотична до колової орбіти Землі перпендикулярна радіусу, кут між дотичною до орбіти Землі та швидкістю комети дорівнюватиме $44,3^\circ$.

$$90^\circ - 45,7^\circ = 44,3^\circ.$$

10.3. Несподіваний сигнал

Розв'язання. На рисунку зображено шляхи обох променів.



Часова затримка між обома сигналами спричинена різною відстанню, яку проходять промені. Перший промінь пройшов відстань $l_1 = L_1 + L_2$, тоді як другий: $l_2 = \sqrt{L_1^2 + h^2} + \sqrt{L_2^2 + h^2}$.

Враховуючи, що $h \ll L_1, L_2$, можна записати так:

$$l_2 = L_1 \sqrt{1 + \frac{h^2}{L_1^2}} + L_2 \sqrt{1 + \frac{h^2}{L_2^2}} \approx L_1 \left(1 + \frac{h^2}{2L_1^2}\right) + L_2 \left(1 + \frac{h^2}{2L_2^2}\right).$$

Тоді різниця пройдених відстаней становить:

$$\Delta L = l_2 - l_1 = \frac{h^2}{2} \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) = c\Delta t,$$

де $\Delta t = 5$ років.

Наступним кроком обчислимо відстань до наднової: $L_1 + L_2 = \frac{cz}{H} = 174$ Мпк.

Використаємо дані, що $h = L_1 \times \alpha$, й отримаємо:

$$c\Delta t = \frac{\alpha^2}{2} \times \frac{L_1}{L_2} (L_1 + L_2),$$

звідки знаходимо відношення:

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{\alpha^2 (L_1 + L_2)}{2c\Delta t} = 2,82.$$

У результаті отримуємо відстань до чорної діри: $L_1 = 46$ Мпк.

10.4. Спостереження за зорею в галактиці Андромеди

Розв'язання. Видима зоряна величина зорі:

$$m = M + 5 \times (\log_{10}(D[\text{пк}])^{-1}).$$

Підставляючи $M = 4,83$ та $D = 2,2 \times 10^6 / 3,26 = 6,75 \times 10^5$ пк, отримаємо, що видима зоряна величина сонцеподібної зорі з галактики Андромеди дорівнює:

$$m = 28,98.$$

Кількість фотонів, які надходять від зорі за одну годину через одиницю площі, дорівнює:

$$N = N_0 \times 2,512^{-m},$$

де $N_0 = 0,1 \text{ мкм} \times 3600 \text{ с} \times 9,97 \times 10^{10} \text{ фотонів с}^{-1} \text{м}^{-2} \text{мкм}^{-1} = 3,59 \times 10^{13}$ фотонів м^{-2} — кількість фотонів через одиницю площі від зорі з нульовою видимою зоряною величиною у V-фільтрі завширшки 0,1 мкм. Підрахунок дає: $N = 91,8$ фотона м^{-2} .

За умовою лише половина фотонів буде задетектована, тому площу S дзеркала телескопа визначаємо з рівності: $25 = 0,5 \times N \times S$, звідки: $S = 2 \times 25 / 91,8 = 0,545 \text{ м}^2$.

Позаяк $S = \pi D^2/4$, то $D = (4S/\pi)^{1/2} = 0,83 \text{ м}$.

10.5. Народження рою метеорoidів

Відповідь: за допомогою телескопа Габбла *неможливо* проводити спостереження за уламком ядра комети в афелії його орбіти.

Розв'язання. Знайдемо діаметр ядра $D_{\text{я}}$ комети:

$$D_{\text{я}} = \rho l = 3,88 \times 10^{-3} \times 4,882 / 206265 \approx 9,179 \times 10^{-8} \text{ а. о.} \approx 13,73 \text{ км.} \quad (1)$$

Блиск не самосвітного астрономічного об'єкта можна визначити за формулою:

$$E^* = A \pi \frac{D^2}{4} \frac{I_C}{L^2 \Delta^2} f(\Phi), \quad (2)$$

де A — альbedo, D — діаметр, $f(\Phi)$ — функція фази астрономічного об'єкта, I_C — сила світла Сонця ($I_C \approx 3,84 \times 10^{28} \text{ Кд}$).

Водночас блиск Сонця на поверхні Землі:

$$E^*_C = \frac{I_C}{1^2}. \quad (3)$$

З (2), (3) та формули Погсона отримуємо:

$$(E^*/E^*_C) = (A_{\text{я}} \pi \frac{D^2}{4} \frac{1}{L^2 \Delta^2} f(\Phi)) = 2,512^{m_V - m_{\text{я}}}. \quad (4)$$

У разі розпаду ядра зберігається об'єм. За умовою ядро та його уламки — сферичні тіла, причому діаметри всіх уламків однакові. Це дає змогу отримати рівність для кількості N уламків, що утворились під час розпаду ядра комети:

$$N = \left(\frac{D_{\text{я}}}{D_{\text{ул}}} \right)^3, \quad (5)$$

де $D_{\text{ул}}$ — діаметр уламків.

Загальна площа поверхні уламків S_{Σ} :

$$S_{\Sigma} = N \times \pi \frac{D_{\text{ул}}^2}{4},$$

що разом із (5) дає:

$$S_{\Sigma} = \left(\frac{D_{\text{я}}}{D_{\text{ул}}} \right)^3 \times \pi \frac{D_{\text{ул}}^2}{4} = \frac{1}{D_{\text{ул}}} \times \pi \frac{D_{\text{я}}^3}{4}. \quad (6)$$

Площа поверхні ядра до його розпаду становить:

$$S_{\text{я}} = \pi \frac{D_{\text{я}}^2}{4}. \quad (7)$$

Відношення загальної площі поверхні уламків до площі поверхні ядра знаходимо з (6) та (7):

$$S_{\Sigma} / S_{\text{я}} = \frac{D_{\text{я}}}{D_{\text{ул}}}. \quad (8)$$

З (8) бачимо, що відношення $S_{\Sigma} / S_{\text{я}}$ більше за одиницю. Цим пояснюється зростання блиску комети відразу після розпаду її ядра.

З урахуванням (2), (8), альbedo ядра та його уламків, а також формули Погсона матимемо:

$$2,512^{\Delta m} = 1,22 \times (S_{\Sigma} / S_{\text{я}}) = 1,22 \times \frac{D_{\text{я}}}{D_{\text{ул}}}, \text{ звідки:}$$

$$D_{\text{ул}} \approx 0,185 \text{ км} = 185 \text{ м} \approx 1,230 \times 10^{-9} \text{ а. о.} \quad (9)$$

Знайдемо відстань від Сонця до афелію орбіти уламків:

$$r_{\text{а}} = a(1 + \varepsilon) \approx 25,254 \text{ а. о.} \quad (10)$$

Очевидно, що відстань в опозиції від Землі до уламків в їхньому афелії буде дорівнювати:

$$r_{\text{а3}} \approx 24,254 \text{ а. о.} \quad (11)$$

Запишемо (4) для спостереження уламків ядра комети в афелії їхньої орбіти, врахувавши, що в цьому випадку в (4) під E^* треба розуміти блиск $E_{\text{ул}}^*$ окремого уламка, замість $A_{\text{я}}$ — значення $A_{\text{ул}}$ альbedo уламків, під D — їхній діаметр $D_{\text{ул}}$. Функцію фази в цей час слід вважати $1 / 0,996 \approx 1,004$, тому що під час опозиції фазовий кут дорівнює нулю, а в момент утворення

уламків їхня фаза дорівнювала 0,996. Також тепер замість m_d застосуємо $m_{ул;a}$ — видиму зоряну величину уламка в опозиції, а замість L та Δ застосуємо r_a та r_{a3} відповідно. У підсумку маємо:

$$(E_{ул}^*/E^*_C) = (A_{ул} \pi \frac{D_{ул}^2}{4} \frac{1}{r_a^2 r_{a3}^2} \times 1,004) = 2,512^{m_v - m_{ул;a}}. \quad (12)$$

Враховуючи умови задачі, а також (5), (9), (10), (11), і здійснивши елементарні перетворення, отримаємо:

$$m_{ул;a} \approx +33,09.$$

Це набагато менше за проникну здатність телескопа Габбла.

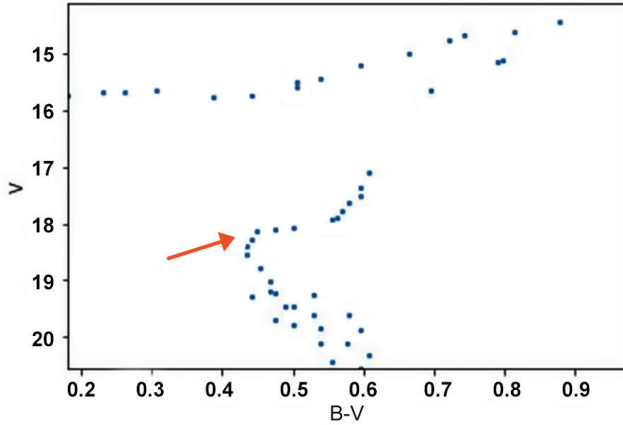
Практичний тур

10.1. Вік кулястого скупчення

Розв'язання

N	V	B	B – V
1	14,112	15,088	0,976
2	14,418	15,296	0,878
3	14,616	15,432	0,816
4	14,670	15,414	0,744
5	14,742	15,464	0,722
6	14,976	15,640	0,664
7	15,102	15,900	0,798
8	15,138	15,929	0,791
9	15,210	15,805	0,595
10	15,444	15,984	0,540
11	15,498	16,005	0,507
12	15,570	16,077	0,507
13	15,642	16,338	0,696
14	15,642	15,949	0,307
15	15,678	15,938	0,260
16	15,678	15,909	0,231
17	15,732	16,174	0,442
18	15,732	15,912	0,180
19	15,768	16,155	0,387
20	17,100	17,709	0,609

N	V	B	B – V
21	17,370	17,965	0,595
22	17,496	18,091	0,595
23	17,640	18,220	0,580
24	17,766	18,335	0,569
25	17,892	18,454	0,562
26	17,928	18,483	0,555
27	18,072	18,572	0,500
28	18,090	18,565	0,475
29	18,126	18,575	0,449
30	18,270	18,712	0,442
31	18,396	18,831	0,435
32	18,558	18,993	0,435
33	18,792	19,245	0,453
34	19,026	19,493	0,467
35	19,188	19,655	0,467
36	19,224	19,699	0,475
37	19,260	19,789	0,529
38	19,296	19,738	0,442
39	19,458	19,958	0,500
40	19,458	19,947	0,489
41	19,602	20,182	0,580
42	19,620	20,149	0,529
43	19,692	20,167	0,475
44	19,800	20,300	0,500
45	19,854	20,394	0,540
46	19,890	20,485	0,595
47	20,124	20,700	0,576
48	20,124	20,664	0,540
49	20,322	20,931	0,609
50	20,430	20,985	0,555
51	20,556	21,151	0,595



Червоною стрілкою показано точку повороту, якій відповідає:

$B - V = 0,45$ (можливі варіанти: 0,435; 0,442; 0,449; 0,453).

У таблиці бачимо, що це наближено відповідає класу F5.

Абсолютна зоряна величина — 3,5.

Приблизний вік — 4×10^9 років.

Видима зоряна величина — $18,5^m$.

Отримуємо наближену відстань:

$$M = m + 5 - 5 \lg(r) \Rightarrow r = 10^{0,2(m+5-M)} = 10 \text{ кпк.}$$

10.2. Два об'єкти Сонячної системи

Відповідь: а) $e = 0,21$ (Меркурій); б) 45 діб; в) Нептун.

Розв'язання:

а) планета рухається навколо Сонця уздовж кривої другого порядку, полярне рівняння якої має вигляд:

$$r = \frac{\rho}{1 + e \cos \varphi} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \varphi},$$

де r — геліоцентрична відстань, ρ — фокальний параметр орбіти, e — ексцентриситет, φ — істинна аномалія, a — велика піввісь.

$$\text{Відповідно: } \frac{a}{r} = \frac{1 + e \cos \varphi}{1 - e^2}.$$

Позаяк модуль косинуса обмежений одиницею, можемо вказати діапазон зміни a/r :

$$\frac{a}{r} \in \left[\frac{1}{1+e}; \frac{1}{1-e} \right].$$

Також у цьому пункті можна скористатися формулами для відстаней у перигелії й афелії:

$$q = a(1 - e); Q = a(1 + e).$$

Отже, маємо спосіб визначення ексцентриситету з допомогою графіка за максимальним перепадом a/r :

$$\Delta_{max} = \frac{1}{1-e} - \frac{1}{1+e} = \frac{2e}{1-e^2}.$$

Звідси:

$$e^2 + \frac{2}{\Delta_{max}} e - 1 = 0.$$

Далі знаходимо:

$$e = -\frac{1}{\Delta_{max}} + \sqrt{\frac{1}{\Delta_{max}^2} + 1}.$$

Проведемо вимірювання на графіку. Під час роботи з роздруківкою інтервал від максимуму до мінімуму становив 83 мм, а між мінімальним і максимальним наявним значенням на осі ординат маємо 95 мм, що, згідно з позначками біля осі, становить 0,5. Звідси:

$$\Delta_{max} = \frac{83}{95} \times 0,5 = 0,437.$$

Підставивши це значення у формулу для ексцентриситету, знаходимо:

$$e = 0,209.$$

Отже, із восьми планет отриманий результат може відповідати тільки Меркурію;

б) реальний період обертання Меркурія можемо визначити за третім законом Кеплера:

$$T(p.) = a^{3/2} = 0,387^{3/2} = 0,241.$$

Це значення, якщо перевести його в кількість діб, становитиме 87,9. Під час вимірювання три періоди відповідали 92,5 мм, а 7 часових — 110 мм, тому для згаданої одиниці:

$$1 \text{ од.} = 87,9^d \times \frac{\frac{110}{7}}{\frac{92,5}{3}} = 44,8^d \approx 45^d;$$

в) у другому випадку залежність a/r на інтервалі в понад 300 діб є лінійною, тому період обертання планети навколо Сонця суттєво

перевищує 1 рік. Отже, після Меркурія можемо також відкинути щонайменше Венеру, Землю й Марс.

Маємо побудовану функцію (тільки залежно від часу):

$$\frac{a}{r} = f(\varphi) = \frac{1 + e \cos \varphi}{1 - e^2}.$$

Істинна аномалія за час, значно менший ніж період, змінилася несуттєво. Беремо середнє значення й отримуємо рівняння:

$$\frac{1 + e \cos \varphi}{1 - e^2} = 1,00575.$$

Для зміни функції з часом можемо записати:

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \frac{e \cos(\varphi + \Delta \varphi) - e \cos \varphi}{1 - e^2} = -\frac{2e}{\Delta t} \times \frac{\sin \frac{\Delta \varphi}{2} \times \sin\left(\varphi + \frac{\Delta \varphi}{2}\right)}{1 - e^2}.$$

Для малих проміжків часу $\Delta \varphi \rightarrow 0$ враховуємо, що $\sin \frac{\Delta \varphi}{2} \approx \frac{\Delta \varphi}{2}$.

$$\text{Відповідно: } \frac{\Delta f}{\Delta t} = -\frac{e}{1 - e^2} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \times \sin \varphi \approx -\frac{e}{1 - e^2} \omega \sin \varphi.$$

Зміну істинної аномалії можемо наближено прирівняти до кутової швидкості з огляду на невеликі ексцентриситети орбіт усіх планет-гігантів, вибір між якими й маємо зробити (у разі володіння диференціальним численням наведений результат можна отримати через похідну).

Відношення приросту функції до інтервалу часу знаходимо з допомогою графіка, враховуючи, що одиницю часу вже ідентифіковано. За віссю ординат другого графіка 3×10^{-4} відповідає 99 мм. Перепад значень за ~315 діб становить 89 мм.

Звідси маємо:

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = 3 \times 10^{-4} \times \frac{89/99}{315/365} \text{ p}^{-1} = 3,13 \times 10^{-4} \text{ p}^{-1}.$$

Ексцентриситети орбіт планет-гігантів малі, тому їхніми квадратами можна знехтувати. Утворюємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} e \cos \varphi = 5,75 \times 10^{-3}, \\ -e \sin \varphi = \frac{3,13 \times 10^{-4} \text{ p}^{-1}}{\omega}. \end{cases}$$

Істинну аномалію можемо усунути, тоді:

$$e = \sqrt{5,75^2 \times 10^{-6} + 3,13^2 \times 10^{-8} \times \left(\frac{T(p)}{2\pi}\right)^2}.$$

За третім законом Кеплера обчислюємо періоди обертання Юпітеру, Сатурну, Урану й Нептуну. Отримуємо:

$$T = 11,86; 29,65; 84,06; 164,9 \text{ року.}$$

На основі цих значень знаходимо можливі ексцентриситети (починаючи з Юпітеру):

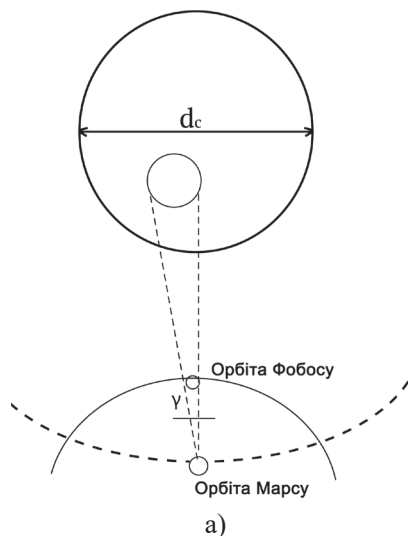
$$e = 5,78 \times 10^{-3}; 5,94 \times 10^{-3}; 7,11 \times 10^{-3}; 1,00 \times 10^{-2}.$$

Близьким є тільки ексцентриситет Нептуну, тому графік має стосуватися саме цієї планети. Відхилення від табличного результату, яке дещо перевищує 10 %, може пояснюватися не лише похибками вимірювань, а й збуреннями в русі Нептуну, адже орбіта планети дуже близька до колової.

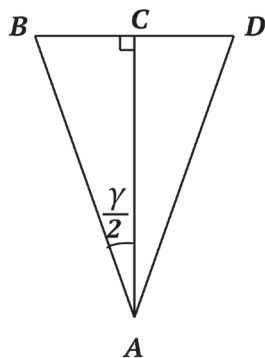
10.3. Затемнення на Марсі

Розв'язання:

а) для оцінювання лінійних розмірів Фобосу міркуватимемо так:



а)



б)

Рисунок 1. Схематичне зображення транзиту
Фобосу по диску Сонця

Для спостерігача, який перебуває на Марсі, кут γ , під яким він бачить Фобос та його тінь (на Сонці), є однаковим (рис. 1, а). З прямокутного

трикутника ABC (в якому BC — протяжність Фобосу в певному напрямку, AC — відстань від Марсу до Фобосу, A — точка, де перебуває спостерігач (рис. 1, б)) визначимо:

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{BC}{AC} = \frac{D}{2r},$$

де D — реальний розмір Фобосу в певному напрямку, r — відстань від точки спостереження до Фобосу.

Оскільки за малих кутів синус і тангенс кута, вираженого в радіанах, дорівнюють самому куту, можемо наближено записати:

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{D}{2r}, \text{ або } \gamma = \frac{D}{r}.$$

Відповідно, реальний розмір Фобосу в певному напрямку:

$$D = \gamma \times r. \quad (1)$$

Робота із зображеннями. На світлині вимірюємо діаметр зображення диска Сонця d_c і розміри осей Фобосу d_1 і d_2 (рис. 2).

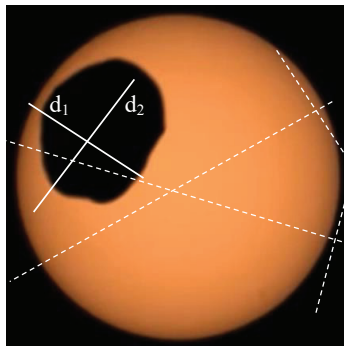


Рисунок 2

За відомими значеннями відстані від Марсу до Сонця і фізичного діаметра Сонця визначаємо кутовий діаметр візуально спостережуваного диска Сонця:

$$\gamma_c = \frac{D_c}{a_M}.$$

Далі можна з'ясувати кутовий масштаб зображення:

$$\mu = \frac{\gamma_c}{d_c}. \quad (2)$$

За кутовим масштабом (2) можна визначити кутовий розмір осей тіні Фобосу (наближено вважаючи її обрис еліпсом) на диску Сонця:

$$\gamma = \mu \times d. \quad (3)$$

Підставивши (3) в (1), отримаємо:

$$D = \gamma \times r = \mu \times d \times r. \quad (4)$$

Далі обчислимо значення лінійних розмірів Фобосу:

- експериментальні дані:

$$d_c = 78 \text{ мм}, d_1 = 29 \text{ мм}, d_2 = 36 \text{ мм};$$

- розрахункові дані:

$$\gamma_c = \frac{1\,391\,400 \text{ км}}{1,435 \times 149\,600\,000 \text{ км}} = 0,00648 \text{ рад},$$

$$\mu = \frac{0,00648}{78} = 0,000083 \text{ рад/с},$$

$$D_1 = 0,000083 \times 29 \times 8064 = 19,41 \text{ км} \text{ — мала вісь Фобосу},$$

$$D_2 = 0,000083 \times 36 \times 8064 = 24,1 \text{ км} \text{ — велика вісь Фобосу}.$$

Примітка. Насправді лінійні розміри Фобосу (має форму картоплини) — 26,8 км × 22,4 км × 18,4 км, тому допустимим діапазоном «правильних» значень для осей є діапазон 18,4–26,8 км;

б) знаючи радіуси Марсу ($R_0 = 3396 \text{ км}$) та орбіти Фобосу ($R = 9380 \text{ км}$), а також відстань r до Фобосу в момент спостережень, передусім визначимо зенітну відстань Фобосу z у момент спостереження. З теореми косинусів маємо:

$$R^2 = R_0^2 + r^2 - 2R_0 r \cos(180 - z) = R_0^2 + r^2 + 2R_0 r \cos(z),$$

$$z = \arccos\left(\frac{R^2 - R_0^2 - r^2}{2R_0 r}\right) = \arccos\left(\frac{9380^2 - 3396^2 - 8064^2}{2 \times 3396 \times 8064}\right) = 77,9^\circ.$$

Висота Фобосу над горизонтом у момент спостережень дорівнює $12,1^\circ$.

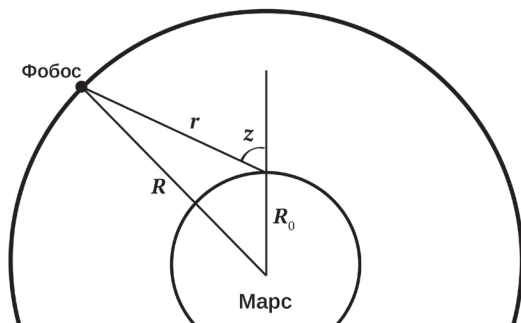


Рисунок 3

Дані зі <https://stellarium.org/uk/>: кутова висота Сонця — $14^{\circ}9'$;

в) використаємо результати спостережень для визначення характеристик руху Фобосу навколо Марсу. Спочатку обчислимо кутову та лінійну швидкість руху Фобосу, синодичний і сидеричний період його обертання.

На *рисунку 4* зображено видимий рух Фобосу на тлі диска Сонця. Зафіксовано моменти, коли вибрана точка Фобосу перебуває на початку диска (A_1) і коли залишає його (B_1).

Дугу AB з місця спостереження на поверхні Марсу видно під кутом α , значення якого у радіанній мірі становить:

$$\alpha = \frac{AB}{r}. \quad (5)$$

Для знаходження кута α скористаємося визначеним кутовим масштабом (2) і довжиною траєкторії переміщення вибраної точки Фобосу L (відстань між положеннями 1 і 2):

$$\alpha = \mu \times L. \quad (6)$$

Значення кутової швидкості руху Фобосу орбітою у системі відліку, пов'язаній з Марсом, запишемо так:

$$\omega = \frac{\alpha}{\Delta t}, \quad (7)$$

де Δt — час руху центра Фобосу по диску Сонця.

Примітка. У цей час Марс рухається відносно Сонця з кутовою швидкістю: $\omega_M = \frac{2\pi}{T_M}$, де T_M — сидеричний період обертання Марсу. Розрахунки засвідчили, що значення кутової швидкості руху Марсу значно менше ніж кутової швидкості руху Фобосу і ним можна знехтувати.

Лінійна (орбітальна) швидкість руху Фобосу обчислюється за співвідношенням:

$$v_\phi = \omega_\phi \times R. \quad (8)$$

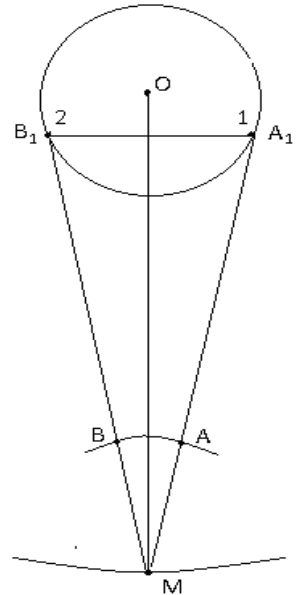


Рисунок 4

Вважаючи орбіту Фобосу коловою, можна визначити його сидеричний період обертання:

$$T_{\Phi} = \frac{2\pi}{\omega_{\Phi}}. \quad (9)$$

Використовуючи співвідношення:

$$\frac{1}{T_{\Phi}} - \frac{1}{T_M} = \frac{1}{S} \rightarrow S = \frac{T_M \times T_{\Phi}}{T_M - T_{\Phi}}$$

можна визначити синодичний період обертання Фобосу.

Оскільки $T_M \gg T_{\Phi}$, доходимо висновку, що S наближено дорівнює T_{Φ} .

Обчислимо значення лінійної та кутової швидкості, синодичного і сидеричного періоду обертання Фобосу:

- експериментальні та вихідні дані:

$$\gamma_c = 0,00648 \text{ рад}, d_c = 78 \text{ мм}, L = 56 \text{ мм}, \Delta t = 21 \text{ с};$$

- розрахункові дані:

$$\mu = \frac{\gamma_c}{d_c} = \frac{0,00648}{78} = 0,000083 \frac{\text{рад}}{\text{мм}},$$

$$\alpha = \mu \times L = 0,004648 \text{ рад},$$

$$\omega_{\Phi} = \frac{\alpha}{\Delta t} = 0,000221 \text{ рад/с},$$

$$v_{\Phi} = \omega_{\Phi} \times R = 2,08 \text{ км/с},$$

$$T_{\Phi} = \frac{2\pi}{\omega_{\Phi}} = 7,9 \text{ год},$$

$$S = \frac{T_M \times T}{T_M + T} = 7,9 \text{ год}.$$

Зі спостережень отримуємо значення видимої кутової швидкості обертання Фобосу навколо Марсу, складниками якої є кутова швидкість Фобосу та кутова швидкість осевого обертання Марсу (рис. 5).

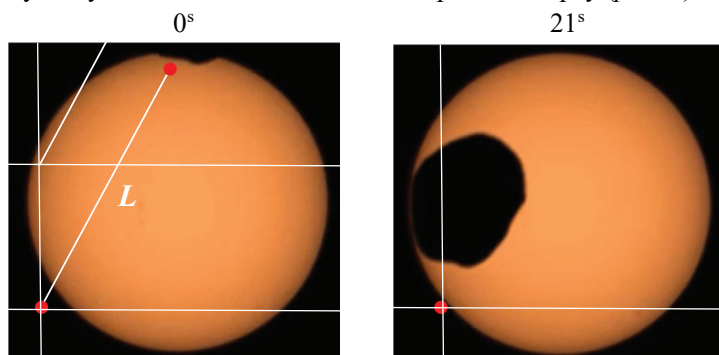


Рисунок 5

Далі з'ясуємо, чи потрібно враховувати обертання Марсу навколо власної осі, чи за певних умов цим обертанням можна знехтувати.

Період обертання Марсу навколо осі: $T_{\text{мо}} = 24,62$ години, а лінійна швидкість:

$$v_{\text{мо}} = \frac{2\pi R_0}{T_{\text{мо}}} = 240,7 \text{ м/с.}$$

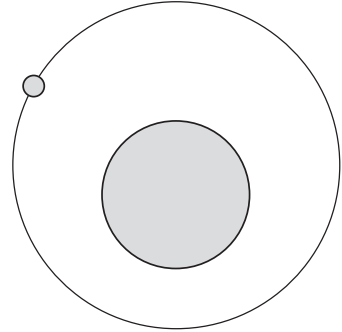
Лінійна швидкість обертання Фобосу навколо Марсу згідно з отриманими розрахунками становить 2,08 км/с.

Позаяк Фобос перебуває поблизу горизонту, то, як видно з рис. 3, проєкція лінійної швидкості обертання Марсу навколо власної осі:

$$v'_{\text{мо}} = 240,7 \sin 12^\circ = 50 \text{ м/с.}$$

Отримане значення значно менше, ніж швидкість руху Фобосу, тому цим складником можна знехтувати.

Дані з <https://stellarium.org/uk/>: сидеричний і синодичний періоди — 0,32 доби = 7,68 год; орбітальна швидкість — 2,112 км/с.



Псевдоспостережний тур

10.1. Місяць (1 бал).

10.2. Юпітер (1 бал).

10.3. Спіка (α Діви) (1 бал).

10.4. Зручніше (якщо уважно стежити за часом) скористатися першою екваторіальною СК з огляду на майже однакові азимуті Місяця і Спіки (але, звісно, можна й другою екваторіальною). Координати в першій екваторіальній:

Місяць: $h = +20^\circ 06'$, $A = +143^\circ 08'$;

Спіка: $h = +22^\circ 00'$, $A = +143^\circ 38'$.

Знаходимо:

$$a = \sqrt{(\Delta h)^2 + (\Delta A)^2 \times \cos^2 \bar{h}} = \sqrt{114^2 + 30^2 \times \cos^2 21^\circ} = 117'.$$

Від краю місячного диска до Спіки кутова відстань буде приблизно $102'$ (2 бали).

10.5–10.16. Перелік зір

10.5. Сіріус (α Великого Пса) $-1,45$; 9 св. р.; A1 (0,5 бала).

10.6. Вега (α Ліри) 0,00; 25 св. р.; A0 (0,5 бала).

10.7. Капелла (α Візничого) $+0,05$; 43 св. р.; G3 (0,5 бала).

10.8. Арктур (α Волопаса) $+0,15$; 37 св. р.; K1,5 (0,5 бала).

10.9. Проціон (α Малого Пса) $+0,40$; 11 св. р.; F5 (0,5 бала).

10.10. Бетельгейзе (α Оріона) $+0,45$; 498 св. р.; M1–M2 (0,5 бала).

10.11. Альдебаран (α Тельця) $+0,85$; 67 св. р.; K5 (0,5 бала).

10.12. Спіка (α Діви) $+0,95$; 250 св. р.; B1 (0,5 бала).

10.13. Поллукс (β Близнюків) $+1,15$; 34 св. р.; K0 (0,5 бала).

10.14. Денеб (α Лебедя) $+1,25$; 1412 св. р.; A2 (0,5 бала).

10.15. Регул (α Лева) $+1,35$; 79 св. р.; B8 (0,5 бала).

10.16. Порожній рядок (2,5 — *правильний перелік зір у правильній послідовності*).

10.17. А та К (по 3) (1 бал).

10.18. M31, галактика в сузір'ї Андромеди (2 бали).

10.19. Напря́м «Проксима — Сонце» буде діаметрально протилежний до напря́му «Сонце — Проксима». Тому Сонце спостерігатиметься в точці на небесній сфері з координатами: $\alpha = 2^{\text{h}}30^{\text{m}}$, $\delta = +62^{\circ}41'$. Для видимої зоряної величини Сонця:

$$m = M - 5 + 51gr = 4,77 - 5 + 51gr_{1,30} = +0,34 \text{ (2 бали)}.$$

10.20. За координатами наявних на карті об'єктів можна впевнитися, що Сонце перебуватиме в сузір'ї Кассіопеї. Воно буде найяскравішою зорею, адже решта наявних зір не мають такого блиску і яскравішими під час спостереження з Проксими Центавра не стануть (відстань до об'єктів у цьому напрямку трохи зросте) (2 бали).

Теоретичний тур

11.1. Комета наближається

Розв'язання:

а) розрахуємо повну швидкість комети, змінивши розмірність (градуси на добу у км/с тангенціальної швидкості):

$$v = \sqrt{\left(\frac{\Delta\lambda \times r \times \pi \times 150 \times 10^6}{180 \times 24 \times 3600}\right)^2 + v_r^2} = 15,2 \text{ км/с.}$$

Обчислимо велику піввісь з інтеграла енергії:

$$v^2 = GM_{\odot} \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right), a = 7,1 \text{ а. о.}$$

Вона вийшла додатною, отже, орбіта еліптична, а комета періодична.

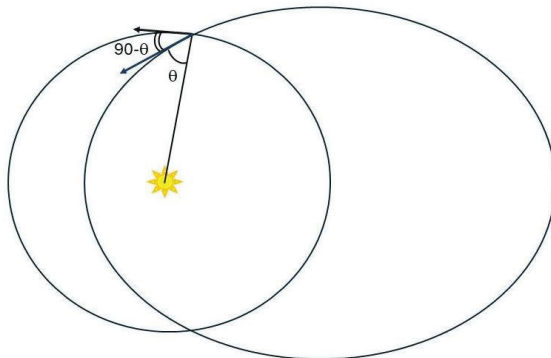
Період обертання знаходимо з третього закону Кеплера:

$$T = a^{3/2} = 19 \text{ років;}$$

б) визначити швидкість комети під час перетину земної орбіти також допоможе інтеграл енергії за $r = 1 \text{ а. о.}$:

$$v_1 = 40,7 \text{ км/с.}$$

Далі знайдемо кут між напрямком руху комети та її радіусом-вектором (див. рис.).



Варіант 1. Спочатку аналогічно знайдемо швидкість комети у перигелії (58,5 км/с), коли її радіус-вектор перпендикулярний до вектора швидкості, а потім застосуємо закон збереження моменту імпульсу:

$$v_1 r_1 \sin\theta = v_q r_q \sin 90.$$

Варіант 2. Можна обчислити кут між радіусом-вектором і швидкістю на відстані $r = 5$ а. о., адже нам відомі компоненти швидкості, а потім застосувати закон збереження моменту імпульсу до точок $r = 5$ а. о. та $r = 1$ а. о.

Одним із цих способів отримуємо кут $46,0^\circ$. Оскільки дотична до колової орбіти Землі перпендикулярна радіусу, кут між дотичною до орбіти Землі та швидкістю комети дорівнюватиме $44,0^\circ$.

$$90^\circ - 46^\circ = 44^\circ.$$

11.2. Подвійна система

Розв'язання. Швидкість центра мас системи (гамма-швидкість, V_c) у разі колової орбіти дорівнює середньому значенню максимальної та мінімальної швидкостей. Вона має бути однаковою для обох компонентів системи, однак у нашому випадку це не виконується. Ймовірно, одна із зір є релятивістським об'єктом, тому до зміщення спектральних ліній, зумовленого ефектом Доплера, додається гравітаційне червоне зміщення.

Припустимо, що система складається з білого карлика та зорі ГП. Середні швидкості для кожної зорі: $V_{1\text{сер}} = 16,72$ км/с; $V_{2\text{сер}} = -6,0$ км/с. Відомо, що система рухається до Сонця, тобто V_c від'ємна. Внесок гравітаційного зміщення завжди додатний. Тому зоря ГП має від'ємну середню швидкість: $V_c = V_{2\text{сер}} = -6,0$ км/с. Різниця $V_{1\text{сер}}$ та V_c буде пов'язана з гравітаційним червоним зміщенням:

$$V_{\text{гп}} = 22,72 \text{ км/с.}$$

Амплітуди змін швидкостей: $A_1 = 10,84$ км/с; $A_2 = 19,56$ км/с. Амплітуди швидкостей обернено пропорційні масам компонентів. За відомої маси системи розв'язуємо систему рівнянь:

$$M_1 / M_2 = A_2 / A_1,$$

$$M_1 + M_2 = M.$$

При цьому потрібно знайти тільки M_2 , тому:

$$(M - M_2) / M_2 = A_2 / A_1 = 1,80,$$

$$M = 2,80 M_2, M_2 = 1,4 M_\odot / 2,8 = 0,5 M_\odot.$$

Релятивістський об'єкт з масою $0,5 M_\odot$ може бути й білим карликом, і нейтронною зорею. Гравітаційне червоне зміщення:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{GM}{Rc^2}.$$

У термінах променевої швидкості це:

$$V_{\text{гр}} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} c = \frac{GM}{Rc}, \text{ тому } R = \frac{GM}{V_{\text{гр}}c} = 0,014R_{\odot}.$$

Остаточно: $\rho = \frac{0,5 M_{\odot}}{\frac{3}{4}\pi(0,014 R_{\odot})^3} = 1,6 \times 10^5 \text{ г/см}^3$ (білий карлик).

11.3. Екзопланетна система

Відповідь: планета *e* обертається синхронно (у гравітаційному захваті), тобто одна півкуля завжди обернена до зорі.

Для спостерігача з поверхні планета *d* внутрішня, конфігурації *d* повторюються через синодичний період — 12 діб 1 годину. Найбільша елонгація (31°) спостерігається тільки на освітленій півкулі планети *e*. Видимий кутовий діаметр змінюється від $32'$ у нижньому сполученні до $12'$ у найбільшій елонгації та $4,4'$ — у верхньому сполученні.

Планета *f* — зовнішня відносно *e*, синодичний період — 18 діб 1 год, може спостерігатись з усієї поверхні планети *e*. Видимий кутовий діаметр змінюється від $33'$ у протистоянні до $12'$ у квадратурі й $4,5'$ — у з'єднанні.

Розв'язання. Уніфікуємо всі довжини в однакові одиниці, наприклад, радіуси Землі. Радіус зорі:

$$R = 0,12R_{\boxtimes} = 0,12 \times \frac{696\,000}{6371} = 13,1 R_{\oplus}.$$

Планета	Велика піввісь, <i>a</i> ($R_{\oplus}$)
<i>b</i>	270
<i>c</i>	371
<i>d</i>	524
<i>e</i>	688
<i>f</i>	904
<i>g</i>	1099
<i>h</i>	1453

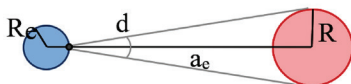
Орбіти планет майже колові й усі близькі до червоного карлика настільки, що навіть найвіддаленіша планета перебуває у $0,39 / 0,062 \approx \approx 6$ разів ближче до нього, ніж Меркурій до Сонця. За розмірами екзопланетна система схожа на систему супутників Юпітеру. Позаяк усі

Галілеєві супутники Юпітеру розташовані у гравітаційному захваті, тобто період їхнього осового обертання дорівнює орбітальному періоду, можна впевнено стверджувати, що планети системи також обертаються синхронно.

З огляду на такі міркування припустимо, що червоний карлик розташований на сталій висоті над горизонтом планети e . Якщо астронавт на екваторі планети перебуває у «підзоряній» точці, він побачить червоного карлика у зеніті. Тоді його видимий кутовий діаметр:

$$d = 2 \frac{R}{a_e - R_e},$$

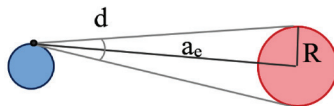
$$d = 2 \frac{13,1}{688 - 0,92} = 0,381 = 2,2^\circ.$$



Якщо астронавт на екваторі перебуває у точці, де карлик на горизонті, тоді видимий діаметр:

$$d = 2 \frac{R}{a_e},$$

$$d = 2 \frac{13,1}{688} = 0,381 = 2,2^\circ.$$



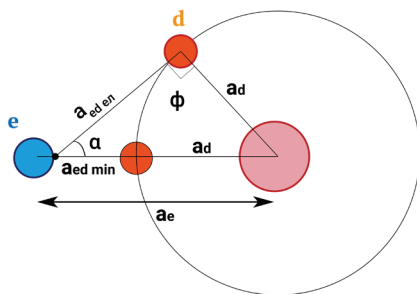
Видимий діаметр зорі в будь-якій точці освітленої півкулі практично однаковий ($2,2^\circ$), тобто у 4,5 раза більший, ніж видимий із Землі діаметр Сонця.

Умови спостережень за внутрішньою планетою d

Планета d — внутрішня для планети e .

Найбільша елонгація для планетоцентричного спостерігача:

$$\alpha = \arcsin \frac{a_d}{a_e}; \alpha = \arcsin \frac{524}{688} = 49,6^\circ.$$



Найбільша елонгація для спостерігача у підзоряній точці:

$$\alpha = \arcsin \frac{a_d}{a_e - R_e}; \alpha = \arcsin \frac{524}{688 - 0,92} = 49,7^\circ.$$

Відстань у найбільшій елонгації:

$$a_{ed} = \sqrt{a_e^2 + a_d^2} = \sqrt{688^2 - 524^2} \approx 446 R_\oplus.$$

Видимий кутовий діаметр в елонгації:

$$\frac{2R_d}{a_{ed}} = \frac{2 \times 0,77}{446} = 0,00345 \approx 0,198^\circ \approx 12'.$$

Видимий кутовий діаметр планети d у нижньому сполученні:

$$\frac{2R_d}{a_e - a_d} = \frac{2 \times 0,77}{688 - 524} = 0,00939 = 0,54^\circ = 32'.$$

У верхньому сполученні:

$$\frac{2R_d}{a_e + a_d} = \frac{2 \times 0,77}{688 + 524} = 0,00127 = 0,073^\circ = 4,4'.$$

Синодичний період обертання:

$$\begin{aligned} \frac{1}{S_d} &= \frac{1}{T_d} - \frac{1}{T_e}, \\ \frac{1}{S_d} &= \frac{1}{4,05} - \frac{1}{6,10} = 0,0830, \\ S_d &\approx 12,05 \text{ доби.} \end{aligned}$$

Кожні 12 діб і 1 год планета d на небі планети e спричиняє «зоряне затемнення», віддаляється у найбільш західну елонгацію на кут 31° від зорі, потім знову наближається до неї й ховається за її диском у верхньому сполученні, віддаляється від зорі, проходить найбільшу східну елонгацію 31° і знов проходить перед диском зорі у нижньому сполученні.

Оскільки планета e обертається синхронно, то все це можна побачити тільки на денній півкулі, яка завжди обернена до червоного карлика.

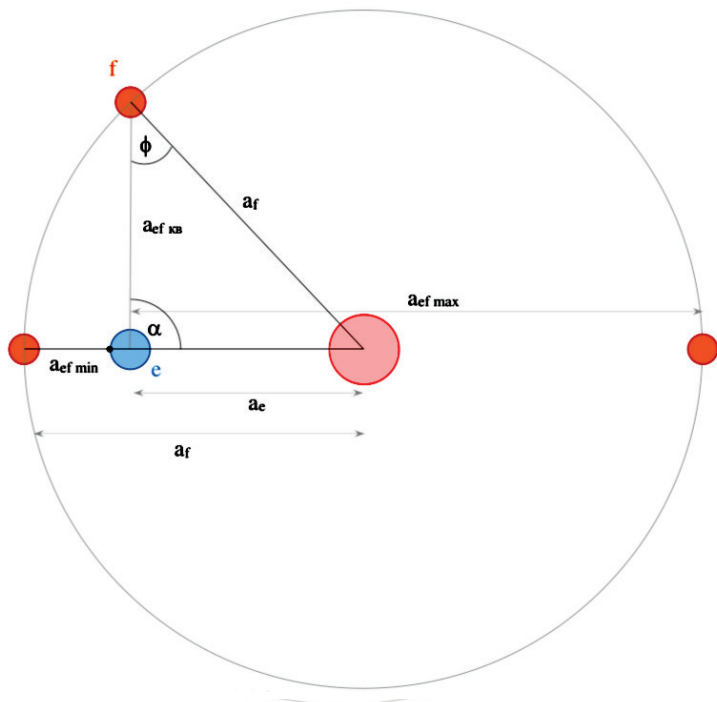
Умови спостережень за зовнішньою планетою f

Планета f є зовнішньою для планети e . Її буває видно з усієї поверхні e . Синодичний період:

$$\begin{aligned} \frac{1}{S_f} &= \frac{1}{T_e} - \frac{1}{T_f}, \\ \frac{1}{S_f} &= \frac{1}{6,10} - \frac{1}{9,21} = 0,0554, \\ S_f &\approx 18,05 \text{ доби.} \end{aligned}$$

Кожні 18 діб і 1 год планета f на небі планети e перебуває у протистоянні на найменшій відстані:

$$904 - 688 = 216 R_\oplus.$$



Видимий кутовий діаметр:

$$2 \frac{R_f}{a_f - a_e} = 2 \frac{1,05}{216} = 0,00972 \approx 0,56^\circ \approx 33',$$

тобто трохи більший за кутовий діаметр Місяця під час спостереження з поверхні Землі.

Після протистояння планета поступово віддаляється, її кутовий діаметр і фаза зменшуються. У квадратурі відстань:

$$a_{ef} = \sqrt{a_f^2 - a_e^2} = \sqrt{904^2 - 688^2} \approx 586_{R_\oplus}.$$

Видимий кутовий діаметр:

$$2 \frac{R_f}{a_{ef}} = 2 \frac{1,05}{586} = 0,00358 \approx 0,21 \approx 12'.$$

Після квадратури планета f наближається до червоного карлика, його фаза збільшується, видимий кутовий діаметр зменшується:

$$2 \frac{R_f}{a_{ef \max}} = 2 \frac{R_f}{a_e + a_f} = 2 \frac{1,05}{688 + 904} = 0,00132 \approx 0,076^\circ \approx 4,5',$$

тобто для неозброєного ока планета виглядає як маленький диск.

11.4. Arcanum nebula

Відповідь: а) N — 14; б) $m_{int} \approx 11,6^m$.

Розв'язання:

а) під квадратною секундою ($''$) розуміють площу квадрата на сфері. Сторону квадрата видно під кутом $1''$, якщо дивитися з центра сфери. Оскільки $1'' = 1 / 206265$ рад, то площа такого квадрата дорівнює: $(R / 206265)^2$. Звідси (та з означення тілесного кута) випливає, що тілесний кут, під яким із центра сфери видно квадрат площею $1''$ дорівнює:

$$(1 / 206265)^2 \text{стерадіан (страд)} \approx 2,35 \times 10^{-11} \text{ страд.}$$

Знайдемо площу S_p на небесній сфері, що відповідає «пікселю» роздільної здатності телескопа. Враховуючи, що $0,9'' = 0,9 / 206265$ рад $\approx 4,363 \times 10^{-6}$ рад, отримаємо:

$$S_p = (4,363 \times 10^{-6})^2 \text{страд} \approx 1,904 \times 10^{-11} \text{ страд.} \quad (1)$$

Далі обчислимо світіння неба m_{pV} з площі S_p , використовуючи дані з умови про те, що блиск нічного неба в районі обсерваторії, зумовлений власним світінням атмосфери та техногенними факторами, дорівнює 100 мклк/страд, а зоряна величина 1 люкс у смузі пропускання ПЗЗ-матриці (V) дорівнює: $(-14,18)^m$. З умови випливає, що світіння неба в тілесному куті 1 стерадіан в 10 000 разів менше за величину 1 люкс/страд. Цим величинам відповідає різниця в $10^{m/\text{страд}}$, тому, якщо зоряна величина 1 люкс/страд еквівалентна $(-14,18)^{m/\text{страд}}$, то світіння 100 мклк/страд еквівалентне $(-4,18)^{m/\text{страд}}$. Отже, маємо формулу для знаходження шуканого параметра:

$$m_{pV} = (-4,18)^m - 2,5 \log \left(\frac{S_p(\text{страд})}{1 \text{ страд}} \right)^m \approx +22,62^m. \quad (2)$$

Розрахуємо кут поля зору b телескопа:

$$b = \frac{50^\circ}{G}, \quad (3)$$

де G — кутове збільшення телескопа.

$$G = \frac{F}{f}, \quad (4)$$

де F та f — фокусні відстані об'єктива та окуляра телескопа відповідно.

З (3) та (4) випливає, що $b = 0,125^\circ = 450''$, а це дає змогу розрахувати кутову площу поля зору телескопа S_b :

$$S_b \approx 159043'' = 250000 S_p. \quad (5)$$

За умовою задачі для реєстрації випромінювання від астрономічного об'єкта необхідно, щоб освітленість, яку він створює в межах тілесного кута, під яким його видно, була б не меншою, ніж $0,1$ світіння неба в тому самому тілесному куті, що відповідає різниці блиску на $2,5^m$. Зрозуміло, що «шумом» є світіння якоїсь ділянки атмосфери, а «сигналом» — блиск цієї самої ділянки, зумовлений світінням туманності. Тому блиск ділянки туманності площею S_p може на $2,5^m$ бути більшим за m_{pV} :

$$m_{pV;HII} = +22,62^m + 2,5^m = +25,12^m. \quad (6)$$

За умовою задачі проникна здатність телескопа може бути апроксимована емпіричною залежністю:

$$m_V = 2,5 + 5 \lg D + 2,1 \times \lg t.$$

Щоб можна було на зображенні зони НІІ вивчати деталі морфології, кутові розміри яких дорівнюють роздільній здатності телескопа, слід вважати, що за час t експозиції досягається проникна здатність: $m_V = m_{pV;HII}$. Звідси:

$$m_{pV;HII} = 2,5 + 5 \lg D + 2,1 \times \lg t.$$

Підставимо в останню формулу задане в умові значення діаметра телескопа (4500 мм) й отримане в (6) значення $m_{pV;HII}$. Тоді можна обчислити необхідний час експозиції:

$$t \approx 118,39^h.$$

Отже, кількість n спостережень тривалістю 9^h кожне приблизно має бути 13,15. З огляду на те, що кількість нічних спостережень — натуральне число, доходимо висновку, що необхідна кількість N спостережень — 14;

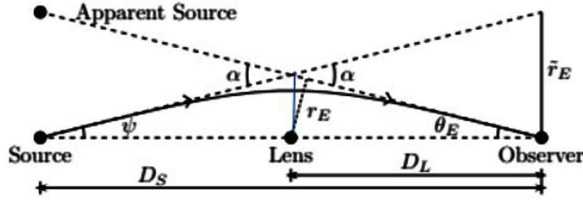
б) тепер неважко визначити, якою є видима зоряна величина у смузі (V) зображення зони НІІ в полі зору телескопа. З (5) та (6) знаходимо, що інтегральна (загальна) видима зоряна величина (V) зображення зони НІІ в полі зору телескопа через $\sim 118,39^h$ експозиції дорівнює:

$$m_{lim} = 25,12^m - 2,5 \lg(S_b/S_p) \approx 11,63^m \approx 11,6^m.$$

11.5. Гравітаційне лінзування

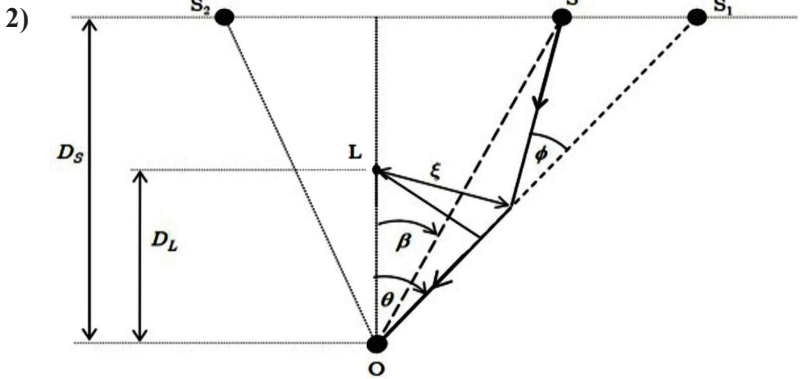
Розв'язання:

1) з напряму променів стає зрозуміло, що джерело виглядатиме як кільце з кутовим радіусом θ_E (т. з. кільце Ейнштейна — Хвольсона).



З геометричних міркувань:

$$\begin{aligned} \psi + \theta_E &= \alpha; \theta_E = \frac{L}{D_L}; \psi = \frac{L}{D_S - D_L} = \frac{D_L}{D_S - D_L} \theta_E; \\ \frac{D_L}{D_S - D_L} \theta_E + \theta_E &= \alpha = \frac{D_S}{D_S - D_L} \theta_E = \frac{4GM}{r_E c^2}; r_E = D_L \theta_E; \\ \frac{D_S}{D_S - D_L} \theta_E &= \frac{4GM}{D_L \theta_E c^2} \Rightarrow \theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_S - D_L}{D_L D_S}}; \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} SA &\approx LP \approx D_S - D_L; \\ PS_1 &= PS + SS_1 \approx PO\beta + SA\alpha = D_s\beta + (D_s - D_L)\alpha = D_s\theta; \\ D_s\beta + (D_s - D_L) \frac{4GM}{bc^2} &= D_s\theta; b = D_L\theta; \\ D_s\beta + (D_s - D_L) \frac{4GM}{D_L\theta c^2} &= D_s\theta; \\ D_s\beta\theta + (D_s - D_L) \frac{4GM}{D_L c^2} &= D_s\theta^2; \\ \theta^2 - \beta\theta - (D_s - D_L) \frac{4GM}{D_L D_s c^2} &= 0; \\ \theta &= \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 16(D_s - D_L) \frac{GM}{D_L D_s c^2}}}{2} = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2}}{2}. \end{aligned}$$

У випадку, коли джерело не міститься на одній прямій з лінзою та спостерігачем, зображення джерела буде асиметричним;

3) на фото спостерігаємо кільце, тобто реалізовується той рідкісний випадок, коли джерело, лінза та спостерігач перебувають на одній прямій.

Відстані до галактик:

$$D_L = \frac{z_L c}{H} = \frac{0,042 \times 3 \times 10^5 \frac{\text{км}}{\text{с}}}{70 \frac{\text{км}}{\text{сМпк}}} = 180 \text{ Мпк};$$

$$D_S = \frac{\frac{(1+z_S)^2 - 1}{(1+z_S)^2 + 1} c}{H} = \frac{\frac{(1+0,406)^2 - 1}{(1+0,406)^2 + 1} \times 3 \times 10^5 \frac{\text{км}}{\text{с}}}{70 \frac{\text{км}}{\text{сМпк}}} =$$

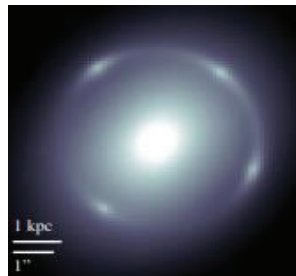
$$= 1400 \text{ Мпк.}$$

Керуючись зображенням, доходимо висновку:

$$2\theta_E = 5,1'' \approx 2,5 \times 10^{-5} \text{ рад.}$$

Отже:

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_S - D_L}{D_L D_S}} \Rightarrow M = \frac{c^2}{4G} \frac{D_L D_S}{D_S - D_L} \theta_E^2 = 1,7 \times 10^{11} M_{\text{Sun}}.$$



Практичний тур

11.1. Вік зоряних скупчень

Розв'язання:

а) визначаємо масу водню у щойно сформованій зорі, беручи до уваги, що маса атому гелію в 4 рази більша, ніж маса атому водню. Отож масова частка водню у щойно сформованій зорі становитиме:

$$0,92 / (0,92 + 4 \times 0,08) = 0,74.$$

Кількість енергії, яку зоря виділить за весь час свого існування на головній послідовності:

$$0,007 \times 0,74 \times 0,13 \times M_3 c^2.$$

Тривалість життя зорі на головній послідовності:

$$t_3 = 0,007 \times 0,74 \times 0,13 \times M_3 c^2 / L_3.$$

Підставляючи маси та світності зір з графіка, отримуємо:

- для Сонця ($L_{\odot} = 3,83 \times 10^{26} \text{ Вт}$, $M_{\odot} = 1,99 \times 10^{30} \text{ кг}$):

$$t_{\odot} = 0,007 \times 0,74 \times 0,13 \times 1,99 \times 10^{30} \times (3,00 \times 10^8)^2 / (3,83 \times 10^{26}) = 3,15 \times 10^{17} \text{ с} = 9,98 \text{ млрд років};$$

• для інших зір обчислюємо за допомогою величин, розрахованих для Сонця:

$$t_3 = t_{\odot} \times (M_3 / M_{\odot}) / (L_3 / L_{\odot}),$$

або:

$$\log(t_3 / t_{\odot}) = \log(M_3 / M_{\odot}) - \log(L_3 / L_{\odot}).$$

Для точки на графіку з координатами $\log(M_3 / M_{\odot}) = 0,5$ та $\log(L_3 / L_{\odot}) = 1,9$ матимемо:

$$\log(t_3 / t_{\odot}) = -1,4 \text{ або } t_3 = t_{\odot} \times 10^{-1,4} = 396,2 \text{ млн років.}$$

Для точки на графіку з координатами $\log(M_3 / M_{\odot}) = 1,0$ та $\log(L_3 / L_{\odot}) = 3,8$ матимемо:

$$\log(t_3 / t_{\odot}) = -2,8 \text{ або } t_3 = t_{\odot} \times 10^{-2,8} = 15,8 \text{ млн років.}$$

Відомості для побудови графіка вказано у таблиці 1.

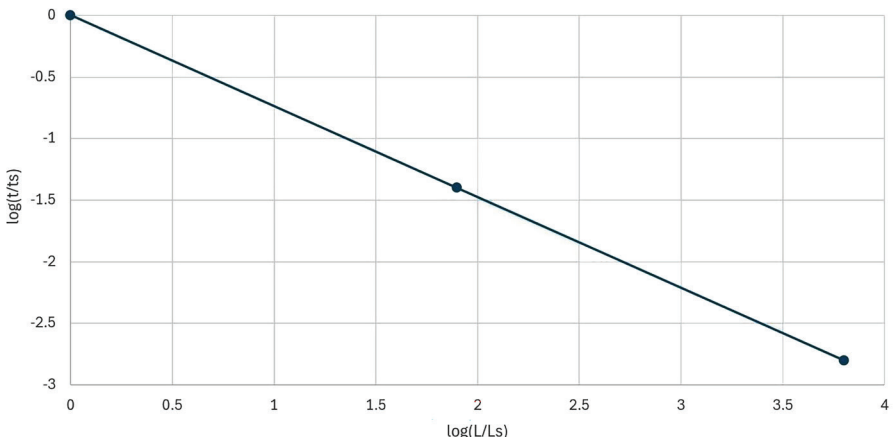
Таблиця 1

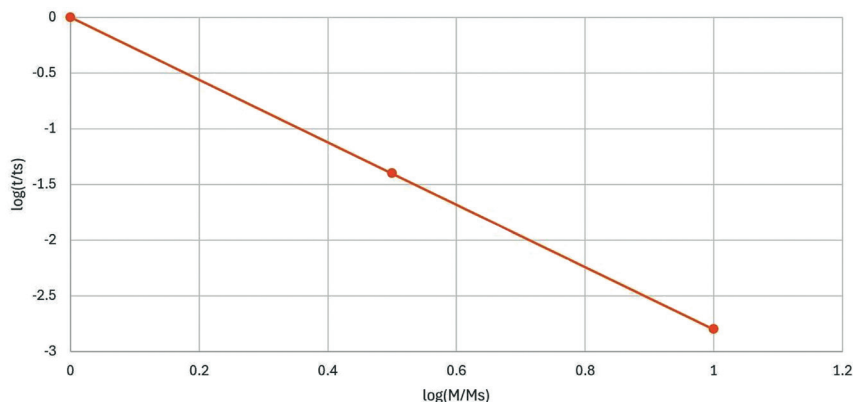
$\log(L_3 / L_{\odot})$	$\log(M_3 / M_{\odot})$	$\log(t_3 / t_{\odot})$
0	0	0
1,9	0,5	-1,4
3,8	1	-2,8

Графіки будуть мати вигляд прямих, що задаються залежностями:

$$\log(t_3 / t_{\odot}) \approx -2,8 \times \log(M_3 / M_{\odot}),$$

$$\log(t_3 / t_{\odot}) \approx -(2,8 / 3,8) \times \log(L_3 / L_{\odot});$$





б) вік зоряного скупчення дорівнює тривалості життя на головній послідовності зорі, світність і маса якої відповідають точці дотику штрихової лінії скупчення до лінії головної послідовності. Дотик штрихової лінії до лінії головної послідовності (див. діаграму) відповідає:

- для M67 — логарифму світності $\log(L_3 / L_\odot) \approx 0,2$;
- для Hyades — $\log(L_3 / L_\odot) \approx 1,1$;
- для M11 — $\log(L_3 / L_\odot) \approx 1,6$;
- для Pleiades — $\log(L_3 / L_\odot) \approx 2,8$;
- для h і χ Persei — $\log(L_3 / L_\odot) \approx 4,0$;
- для NGC 2362 — $\log(L_3 / L_\odot) \approx 4,8$.

З виразу $t_3 = t_\odot \times (L_3 / L_\odot)^{-2,8/3,8}$ обчислюємо вік, який становить у:

- зоряного скупчення M67 — приблизно 7,09 млрд років;
- Hyades — приблизно 1,54 млрд років;
- M11 — приблизно 659 млн років;
- Pleiades — приблизно 86 млн років;
- h і χ Persei — приблизно 11,2 млн років;
- NGC 2362 — приблизно 2,9 млн років.

11.2. Астрокалендар

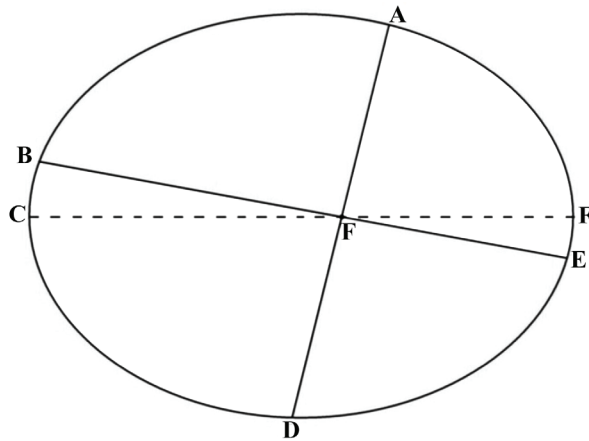
Розв'язання:

а) події, вказані в календарі:

✓ 20 березня 11:00 — весняне рівнодення (схилення Сонця дорівнює нулю);

✓ 21 червня 03:00 — літнє сонцестояння (схилення Сонця максимальне);

- ✓ 4 липня 10:00 — Земля в афелії;
 - ✓ 22 вересня 21:00 — осіннє рівнодення (схилення Сонця дорівнює нулю);
 - ✓ 21 грудня 15:00 — зимове сонцестояння (схилення Сонця максимальне);
 - ✓ 3 січня 05:00 — Земля в перигелії;
- б)



в) є кілька способів оцінювання ексцентриситету Землі, наведемо два з них.

Спосіб 1. Орієнтуючись на те, що подія *B* доволі близька до моменту, коли Земля в афелії (подія *C*), а подія *E* — близька до моменту, коли Земля в перигелії (подія *F*), вважатимемо, що на проміжках *BC* та *EF* кутові швидкості Землі практично не змінюються і дорівнюють кутовим швидкостям в афелії та перигелії відповідно (ω_a та ω_p).

Позначимо час між подіями *B* та *C*, як $t_1 = t_C - t_B$.

Аналогічно вводимо: $t_2 = t_F - t_E$. Тоді можемо записати:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\omega_p}{\omega_a},$$

оскільки пройдена кутова відстань однакова для двох проміжків.

Використаємо закон збереження кутового моменту для точок афелію та перигелію:

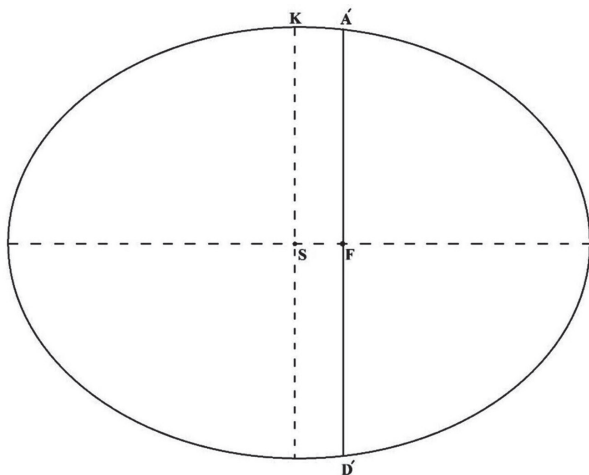
$$mr_a^2 \omega_a = mr_p^2 \omega_p.$$

Тоді, враховуючи малість ексцентриситету, запишемо:

$$\frac{t_1}{t_2} = \left(\frac{r_a}{r_n}\right)^2 = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^2 \approx 1 + 4e.$$

Обчисливши $t_1 = 319$ год, $t_2 = 302$ год, знаходимо: $e \approx 0,014$.

Спосіб 2. Використаємо другий закон Кеплера, згідно з яким планета, рухаючись орбітою, за однаковий час проходить однакові за площею сектори. Для оцінювання можемо знехтувати малою відстанню між B і C та між E й F і розглянути рисунок.



Позначимо тепер часовий проміжок між подіями A та D (точками рівнодення) як час t . Тоді можемо записати (згідно з другим законом Кеплера):

$$\frac{t}{365 \text{ діб} - t} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{S_1}{\pi ab - S_1},$$

де S_1 — площа сектора еліпса між точками A' та D' (під час руху через апогелій). Враховуючи, що $KSFA'$ — наближений до прямокутника, його площа приблизно дорівнює:

$$\Delta S = SF \times SK = a \times e \times b,$$

де a, b — велика і мала півосі еліпса.

У першому порядку по малому ексцентриситету: $b = a\sqrt{1-e^2} \approx a$.

Відповідно, маємо: $S_1 = \frac{\pi ab}{2} + 2\Delta S \approx \frac{\pi a^2}{2} + 2e \times a^2$.

У результаті отримуємо:
$$\frac{t}{365 \text{ діб} - t} = \frac{\frac{\pi a^2}{2} + 2e \times a^2}{\frac{\pi a^2}{2} - 2e \times a^2} \approx 1 + \frac{8e}{\pi}.$$

Порахувавши, що $t = 13 + 24 \times 185 + 21 = 4474$ год, знаходимо:
 $e \approx 0,017$.

11.3. Спіральна галактика

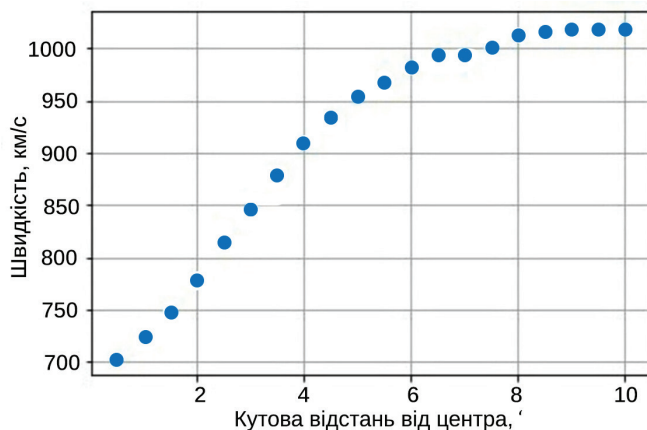
Розв'язання:

а) спочатку знайдемо червоне зміщення для кожної точки, а потім швидкість:

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{v}{c} \Rightarrow v = c \times \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0}.$$

Побудуємо залежність $v(\theta)$.

θ'	λ , см	v , км/с
0,5	21,1558	704
1,0	21,1572	723
1,5	21,1589	748
2,0	21,1611	779
2,5	21,1635	813
3,0	21,1659	847
3,5	21,1682	880
4,0	21,1703	910
4,5	21,1720	934
5,0	21,1734	954
5,5	21,1746	971
6,0	21,1755	984
6,5	21,1762	994
7,0	21,1762	994
7,5	21,1768	1002
8,0	21,1776	1013
8,5	21,1778	1016
9,0	21,1779	1018
9,5	21,178	1019
10,0	21,178	1019



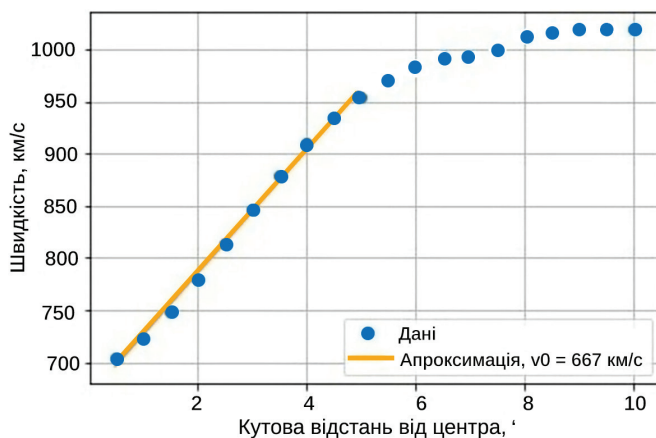
Бачимо, що для кутової відстані, меншої ніж $5'$, залежність близька до лінійної;

б) знайдемо коефіцієнти цієї прямої за методом найменших квадратів, де:

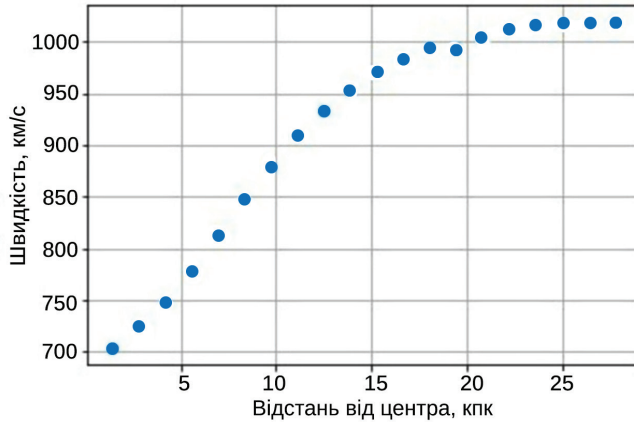
$$k = \frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}, \quad b = \langle y \rangle - k \langle x \rangle, \quad b = v_0 = 667 \frac{\text{км}}{\text{с}},$$

звідки знаходимо відстань до галактики: $r = \frac{v}{H} = 9,53 \text{ Мпк}$ (при цьому нехтуємо пекулярною швидкістю галактики відносно Молочного Шляху);

в)

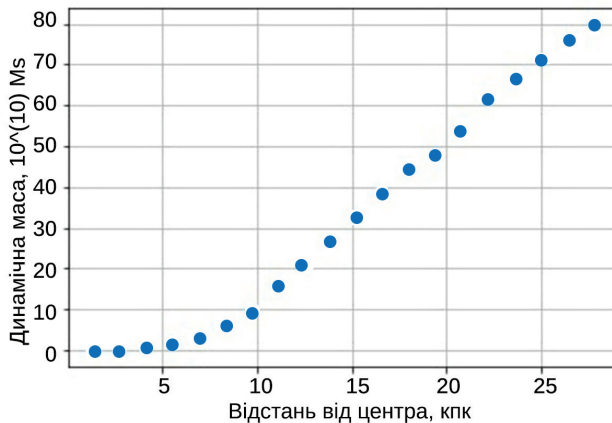


Для кривої обертання вісь x варто замінити на лінійну відстань до центра галактики.



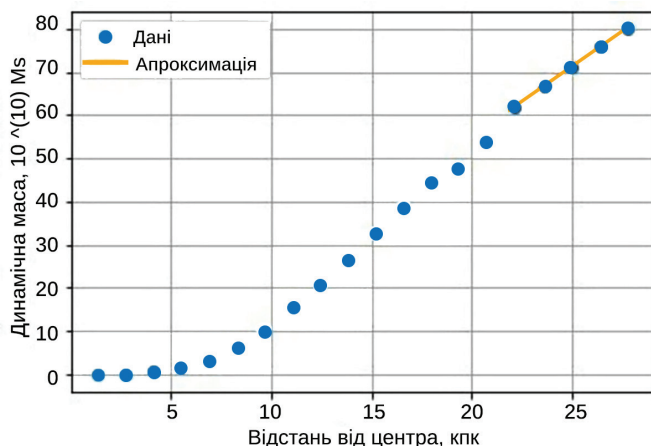
Кеплерівське обертання: $v \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$, чого у нас не спостерігається ні на малих відстанях до центра (що очікувано внаслідок зростання маси від центра), ні на великих відстанях.

$$\frac{GM_{dyn}(r)}{r^2} = \frac{(v - v_0)^2}{r} \Rightarrow M_{dyn}(r) = \frac{(v - v_0)^2 r}{G};$$



г) для точки $r = 8,3$ кпк динамічна маса становить $6,26 \times 10^{10} M_{Sun}$, отже, з відстані близько 8 кпк починає домінувати не баріонна компонента.

Видно, що на великих відстанях світною масою можна знехтувати. Тож проведемо лінійну апроксимацію для найбільш віддалених точок;



д) для 3–6 точок отримуємо коефіцієнт:

$$\frac{dM}{dr} = 3,1 \times 10^{10} \frac{M_s}{\text{кпк}} = 4\pi\rho(r)r^2 \Rightarrow \rho(r) = \frac{dM}{dr} \frac{1}{4\pi r^2},$$

$$\rho(r) = \frac{1}{r^2} \times 2,5 \times 10^9 \frac{M_s}{\text{кпк}}.$$

Псевдоспостережний тур

11.1. Місяць (1 бал).

11.2. Юпітер (1 бал).

11.3. Спіка (α Діви) (1 бал).

11.4. Зручніше (якщо уважно стежити за часом) скористатися першою екваторіальною СК з огляду на майже однакові азимути Місяця і Спіки (але, звісно, можна й другою екваторіальною). Координати в першій екваторіальній:

Місяць: $h = +20^\circ 06'$, $A = +143^\circ 08'$;

Спіка: $h = +22^\circ 00'$, $A = +143^\circ 38'$.

Знаходимо:

$$a = \sqrt{(\Delta h)^2 + (\Delta A)^2 \times \cos^2 \bar{h}} = \sqrt{114^2 + 30^2 \times \cos^2 21^\circ} = 117'.$$

Від краю місячного диска до Спіки кутова відстань буде приблизно $102'$ (2 бали).

11.5–11.15. Перелік зір

11.5. Сіріус (α Великого Пса) $-1,45$; 9 св. р.; A1 (0,5 бала).

11.6. Вега (α Ліри) 0,00; 25 св. р.; A0 (0,5 бала).

11.7. Капелла (α Візничого) $+0,05$; 43 св. р.; G3 (0,5 бала).

11.8. Арктур (α Волопаса) $+0,15$; 37 св. р.; K1,5 (0,5 бала).

11.9. Проціон (α Малого Пса) $+0,40$; 11 св. р.; F5 (0,5 бала).

11.10. Бетельгейзе (α Оріона) $+0,45$; 498 св. р.; M1–M2 (0,5 бала).

11.11. Альдебаран (α Тельця) $+0,85$; 67 св. р.; K5 (0,5 бала).

11.12. Спіка (α Діви) $+0,95$; 250 св. р.; B1 (0,5 бала).

11.13. Поллукс (β Близнюків) $+1,15$; 34 св. р.; K0 (0,5 бала).

11.14. Денеб (α Лебедя) $+1,25$; 1412 св. р.; A2 (0,5 бала).

11.15. Регул (α Лева) $+1,35$; 79 св. р.; B8 (3 бали, з них: 2,5 — правильний перелік зір у правильній послідовності).

11.16. Бетельгейзе (α Оріона), $h = +13^\circ 12'$, зенітна відстань: $z = 76^\circ 48'$ (1 бал).

11.17. Наприклад, δ Цефея, $h = +18^\circ 44'$, зенітна відстань: $z = 71^\circ 16'$ (1,5 бала).

11.18. Наприклад, Алголь (β Персея), $h = +15^\circ 02'$, зенітна відстань: $z = 74^\circ 58'$ (1,5 бала).

11.19. Це може бути M106 (на епоху J2000): $\alpha = 12^h 19^m$, $\delta = +47^\circ 18'$ (1 бал).

11.20. Поле зору повинне охоплювати Спіку і весь диск Місяця. Виходячи з розрахунку в пункті 11.4, це щонайменше $132'$. Отже, треба забезпечити збільшення:

$$G = \frac{60 \times 60'}{132'} = \frac{F}{f}.$$

Звідси фокусна відстань об'єктива не повинна перевищувати:

$$F = \frac{1560 \times 60'}{132'} = 41 \times 10^2 = 41 \text{ см (2 бали)}.$$

Список літератури

Математика

1. Вишенський В. А., Карташов М. В., Михайловський В. І., Ядренко М. Й. Київські математичні олімпіади 1984–1993 рр. : збірник задач. Київ : Либідь, 1993. 144 с.
2. Київські міські математичні олімпіади 2003–2011 рр. / А. Анікушин та ін. ; за ред. Б. В. Рубльова. Харків : Гімназія, 2011. 192 с.
3. Математичні олімпіадні змагання школярів України. 2006–2007 / А. В. Анікушин та ін. ; за ред. Б. В. Рубльова. Київ : Літера ЛТД, 2008. 224 с.
4. Математичні олімпіадні змагання школярів України. 2007–2008 та 2008–2009 рр. / А. В. Анікушин та ін. ; за ред. Б. В. Рубльова. Львів : Каменяр, 2010. 549 с.
5. Математичні олімпіадні змагання школярів України. 2009–2010 / А. В. Анікушин та ін. ; за ред. Б. В. Рубльова. Харків : Гімназія, 2011. 320 с.
6. Математичні олімпіадні змагання школярів України. 2010–2011 / А. В. Анікушин та ін. ; за ред. Б. В. Рубльова. Харків : Гімназія, 2013. 368 с.
7. Математичні олімпіадні змагання школярів України. 2011–2012 / А. В. Анікушин та ін. ; за ред. Б. В. Рубльова. Харків : Гімназія, 2013. 416 с.
8. Математичні олімпіадні змагання школярів України. 2012–2013 / А. В. Анікушин та ін. ; за ред. Б. В. Рубльова. Харків : Гімназія, 2014. 368 с.
9. Математичні олімпіадні змагання школярів України. 2013–2014 / А. В. Анікушин та ін. ; за ред. Б. В. Рубльова. Харків : Гімназія, 2015. 400 с.
10. Математичні олімпіадні змагання школярів України. 2014–2015 / А. В. Анікушин та ін. ; за ред. Б. В. Рубльова. Харків : Гімназія, 2016. 464 с.
11. Математичні олімпіадні змагання школярів України. 2015–2016 / А. В. Анікушин та ін. ; за ред. Б. В. Рубльова. Харків : Гімназія, 2017. 464 с.
12. Математичні олімпіадні змагання школярів України. 2016–2017 / А. В. Анікушин та ін. ; за ред. Б. В. Рубльова. Харків : Гімназія, 2018. 464 с.
13. Математичні олімпіадні змагання школярів України. 2017–2018 / А. В. Анікушин та ін. ; за ред. Б. В. Рубльова. Харків : Гімназія, 2019. 464 с.
14. Математичні олімпіадні змагання школярів України. 2018–2019 /

- А. В. Анікушин та ін. ; за ред. Б. В. Рубльова. Харків : Гімназія, 2020. 464 с.
15. Математичні олімпіадні змагання школярів України. 2019–2020 / А. В. Анікушин та ін. ; за ред. Б. В. Рубльова. Харків : Гімназія, 2021. 496 с.
16. Математичні олімпіадні змагання школярів України. 2020–2021 / А. В. Анікушин та ін. ; за ред. Б. В. Рубльова. Харків : Гімназія, 2022. 432 с.
17. Математичні олімпіадні змагання школярів України. 2021–2022 / А. В. Анікушин та ін. ; за ред. Б. В. Рубльова. Харків : Гімназія, 2023. 384 с.
18. Математичні олімпіадні змагання школярів України. 2022–2023 / А. В. Анікушин та ін. ; за ред. Б. В. Рубльова. Харків : Гімназія, 2024. 368 с.

Фізика

1. Божинова Ф. Я., Карпухіна О. О., Сарій Т. А. Фізика. 11 клас. Академічний рівень. Профільний рівень : збірник задач. Харків : Ранок, 2012. 224 с.
2. Всеукраїнські олімпіади з фізики. Задачі та розв'язки / за ред. Б. Г. Кременського. 3-тє вид. Львів : Євросвіт, 2007. 344 с.
3. Галатюк Ю. М., Левшенюк Я. Ф., Левшенюк В. Я., Тищук В. І. Методи розв'язування фізичних задач. Метод аналізу розмінностей та принцип подібності. Харків : Основа, 2008. 144 с.
4. Галатюк Ю. М., Рибалко А. В., Тищук В. І. Дослідницькі задачі з фізики. Харків : Основа, 2007. 160 с.
5. Гельфгат І. М., Генденштейн Л. Е., Кирик Л. А. 1001 задача з фізики. Харків : Творче об'єднання «Гімназія», 1998. 352 с.
6. Гельфгат І. М., Ненашев І. Ю. Фізика. 8 клас : збірник задач. Харків : Ранок, 2016. 144 с.
7. Гельфгат І. М., Ненашев І. Ю. Фізика. 10 клас. Рівень стандарту : збірник задач. Харків : Ранок, 2019. 176 с.
8. Гончаренко С. У. Олімпіади з фізики. Завдання. Відповіді. Харків : Основа, 2008. 400 с.
9. Гончаренко С. У., Коршан Є. В. Фізика. Олімпіадні задачі. Вип. 1. 7–8 класи. Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 1998. 72 с.

10. Гончаренко С. У., Коршан Є. В. Фізика. Олімпіадні задачі. Вип. 2. 9–11 класи. Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 1999. 200 с.
11. Готуємось до олімпіад з фізики / за ред. І. Ю. Ненашева. Харків : Основа, 2005. 208 с.
12. Дідович М. М., Коршак Є. В. Фізика : довідник для абітурієнтів та школярів. Київ : Літера ЛТД, 2012. 88 с.
13. Друга Соросівська олімпіада з фізики. 9–11 класи / упоряд. Т. М. Байдик та ін. Київ, 1996. 40 с.
14. Дудінова О. Найкращий довідник. Фізика в таблицях і схемах. 7–11 класи. Харків : Торсінг, 2020. 32 с.
15. Завдання IV етапу Всеукраїнських учнівських олімпіад з навчальних предметів. 2023/2024 навчальний рік. Математика, фізика, астрономія : практикум / О. А. Базей та ін. ; упоряд.: О. В. Роговець, Д. О. Ужвенко. Київ : Національний центр «Мала академія наук України», 2024. С. 39–112.
16. Загальна фізика з прикладами і задачами. Ч. 1. Механіка. Молекулярна фізика та термодинаміка : навч. посіб. / В. О. Стороженко та ін. Харків : Компанія СМІТ, 2006. 320 с.
17. Загальна фізика з прикладами і задачами. Ч. 2. Електрика та магнетизм : навч. посіб. / І. М. Кібець та ін. Харків : Компанія СМІТ, 2009. 424 с.
18. Загальна фізика з прикладами і задачами. Ч. 3. Т. 1. Оптика : навч. посіб. / І. М. Кібець та ін. Харків : Компанія СМІТ, 2012. 232 с.
19. Загальна фізика з прикладами і задачами. Ч. 3. Т. 2. Квантова та атомна фізика. Фізика твердого тіла. Ядерна фізика : навч. посіб. / І. М. Кібець та ін. Харків : Компанія СМІТ, 2013. 304 с.
20. Загальний курс фізики : збірник задач / за заг. ред. І. П. Гаркуші. Київ : Техніка, 2003. 560 с.
21. Збірник задач з фізики : навч. посіб. / І. Є. Лопатинський та ін. Львів : Вид-во Львів. політехніки, 2016. 244 с.
22. Збірник задач із фізики / за ред. І. Т. Горбачук. Київ : Техніка, 2012. 245 с.
23. Збірник різнорівневих завдань з фізики / упоряд.: В. Л. Головань, В. Д. Карасик, Ю. А. Костенко. Дніпропетровськ : Альфа-НМОПІ, 1997. 64 с.
24. Клапченко В. І. Тлумачник з фізики : навч. посіб. Київ : КНУБА, 2018. 168 с.

25. Кременський Б. Г. Курс теоретичної підготовки до Всеукраїнських учнівських олімпіад і турнірів з фізики : збірник програм курсів за вибором і факультативів з фізики та астрономії. 6–12 кл. Харків : Основа, 2009. С. 143–153.
26. Кременський Б. Г. Організація та проведення Всеукраїнських учнівських олімпіад і турнірів : методичні рекомендації. Харків : Основа, 2006. 80 с.
27. Кременський Б. Г., Пінкевич І. П. Задачі міжнародних фізичних олімпіад. 1987–1999 рр. Вип. 3. Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2000. 152 с.
28. Методи розв'язування фізичних задач / Ю. М. Галатюк та ін. Харків : Основа, 2010. 224 с.
29. Методи розв'язування фізичних задач. Методи моделювання та аналогії / Ю. М. Галатюк та ін. Харків : Основа, 2007. 144 с.
30. Недбаєвська Л. С., Сущенко С. С. Розвиток творчого потенціалу учнів на уроках фізики. Харків : Основа, 2005. 96 с.
31. Немченко К. Е., Дудінова О. В. Фізика : практичний довідник. 2-ге вид., доповн. та переробл. Харків : Співак В. Л., 2011. 282 с.
32. Олімпіади з фізики : завдання та розв'язки / упоряд. Р. Балабан. Київ : Редакції газет природничо-математичного циклу «Перше вересня», 2015. 108 с.
33. П'ята Соросівська олімпіада з фізики. 9–11 класи / упоряд.: С. Л. Парновський, М. Ю. Зубченко, П. Р. Аракелян. Київ : Міжнародний фонд «Відродження», 1999. 42 с.
34. Пасько О. О., Однорець Л. В. Фундаментальний фізичний експеримент: інтегрований курс історії фізики та навчального фізичного експерименту : навч. посіб. Суми : Сумський державний університет, 2020. 124 с.
35. Перша Соросівська олімпіада з фізики. 9–11 класи / упоряд.: Т. М. Байдик, В. О. Бардадим. Київ, 1995. 28 с.
36. Пістун П. Ф., Будний Б. Є., Козуб І. О. Фізика. Задачі-дослідження. 9–11 класи. Вип. 4. Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2000. 64 с.
37. Синиця П. П. Олімпіадні задачі з фізики. 7–9 класи : практикум. Київ : Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2013. 115 с.

38. Старощук В. Цікаві демонстрації з фізики. Ч. II. Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2003. 88 с.
39. Столяревська Н. Фізика : довідник у таблицях. 7–11 класи. Харків : УЛА, 2016. 32 с.
40. Сьома Соросівська олімпіада з фізики. 9–11 класи / упоряд.: С. Л. Парновський, М. Ю. Зубченко, П. Р. Аракелян. Київ : ВІПОЛ, 2001. 43 с.
41. Третя Соросівська олімпіада з фізики. 9–11 класи / упоряд. С. Л. Парновський та ін. Київ, 1997. 44 с.
42. Трофімова Т. І. Збірник задач із фізики. Київ : Вища школа, 2011. 303 с.
43. Фізика. Лабораторний практикум. Оновлений цикл : навч. посіб. / О. В. Панова та ін. Київ : КНУБА, 2022. 160 с.
44. Чергіщева Т. В. Фізика : комплексний довідник абітурієнта. Харків : ПЕТ, 2018. 384 с.
45. Четверта Соросівська олімпіада з фізики / упоряд.: С. Л. Парновський та ін. Київ : Фонд «Відродження», 1998. 38 с.
46. Шоста Соросівська олімпіада з фізики. 9–11 класи / упоряд.: С. Л. Парновський, М. Ю. Зубченко, П. Р. Аракелян. Київ : Міжнародний фонд «Відродження», 2000. 32 с.

Астрономія

1. Александров М. Г., Пугач М. П. Тлумачний словник із астрономії від «А» до «Я». Харків : Основа, 2016. 122 с.
2. Андрієвський С. М., Кузіменков С. Г., Захожай В. А., Климишин І. А. Загальна астрономія : підруч. Харків : ПромАрт, 2019. 524 с.
3. Астрономічний енциклопедичний словник / за заг. ред. І. А. Климишина, А. О. Корсунь. Київ : ГАО НАН України ; Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2003. 548 с. URL: <https://astro.lnu.edu.ua/astro/> (дата звернення: 10.03.2025).
4. Бурий А. Р. Астрономічна олімпіада: базові завдання. Дрогобич : РВВ ДДПУ імені Івана Франка, 2018. 207 с.
5. Віртуальний STEM-центр Малої академії наук України. URL: <https://stemua.science> (дата звернення: 20.03.2025).

6. Думенко В. П., Мозговий О. В. Астрономія : практикум розв'язування задач. Вінниця : Пишний О. А., 2017. 50 с.
7. Єпішев В. П., Мотрунич І. І. Космос у числах : довідник. Ужгород, 2018. 32 с.
8. Заболотний В. Ф., Мисліцька Н. А. Формування уявлень у молодших школярів про природничо-наукову картину світу: інноваційні технології : монографія. Вінниця : Нілан-ЛТД, 2020. 163 с.
9. Завдання IV етапу Всеукраїнських учнівських олімпіад з навчальних предметів. 2023/2024 навчальний рік. Математика, фізика, астрономія : практикум / О. А. Базей та ін. ; упоряд.: О. В. Роговець, Д. О. Ужвенко. Київ : Національний центр «Мала академія наук України», 2024. С. 113–153.
10. Захожай В. А., Захожай О. В. Основи елементарної астрономії : навч. посіб. Харків : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2021. 232 с.
11. Камін О. Л., Камін О. О. Космічна Одісея (цікава олімпіада з астрономії, фізики Космосу, фізики Землі, фізики польоту). Харків : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2016. 224 с.
12. Кевшин А. Г., Шигорін П. П., Галян В. В. Практикум із розв'язування задач з фізики та астрономії: задачі. Луцьк : Волин. нац. ун-т ім. Лесі Українки, 2024. 88 с.
13. Кузьменков С. Г. Зорі: астрофізичні задачі з розв'язанням : навч. посіб. Київ : Освіта України, 2010. 206 с.
14. Кузьменков С. Г. Фундаментальні фізичні та математичні константи: задачі з розв'язаннями : навч. посіб. Херсон, 2021. 88 с. URL: https://drive.google.com/file/d/1bOWM-c_QWNo4_TtsKYLKTtgNBbsqli6/view (дата звернення: 20.03.2025).
15. Кузьменков С. Г., Сокол І. В. Сонячна система: збірник задач : навч. посіб. Київ : Вища школа, 2007. 168 с.
16. Мозговий О. В., Думенко В. П., Кузьминський О. В. Лабораторний практикум з астрономії. Вінниця : Костюк Н. П., 2018. 84 с.
17. Новосядлий Б. С. Структура й еволюція Всесвіту : навч. посіб. Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2019. 159 с.
18. Трохимчук П. П., Шигорін П. П. Задачі та вправи з астрономії та астрофізики : навч. посіб. Луцьк : Вежа-Друк, 2024. 103 с.

19. Фейгін О. О. Цікаво про планети : матеріали до курсів природознавства і астрономії. Харків : Основа, 2019. 110 с.
20. Шигорін П. П. Вибрані питання астрономії та астрофізики : навч. посіб. Луцьк : Волин. нац. ун-т ім. Лесі Українки, 2020. 136 с.
21. Шигорін П. П., Савош В. О. Астрономія. Матеріали для підготовки до олімпіад : навч. посіб. Луцьк : Волин. нац. ун-т ім. Лесі Українки, 2020. 136 с.

Відомості про авторів

МАТЕМАТИКА

Дашков
Олександр
Олександрович аспірант факультету комп'ютерних наук приватної
установи «Університет “Київська школа економіки”»

Рубльов
Богдан
Владиславович професор кафедри обчислювальної математики
факультету комп'ютерних наук та кібернетики
Київського національного університету імені Тараса
Шевченка, доктор фізико-математичних наук,
професор, заслужений працівник освіти України

ФІЗИКА

Гельфгат
Ілля
Маркович вчитель фізики комунального закладу «Харківський
фізико-математичний науковий ліцей № 27 Харківської
міської ради», кандидат фізико-математичних наук

Дмитрук
Ігор
Миколайович завідувач кафедри експериментальної фізики
фізичного факультету Київського національного
університету імені Тараса Шевченка, доктор фізико-
математичних наук, професор

Меланіч
Геннадій
Анатолійович лаборант Школи «Базис» м. Києва

Олійник
Артем
Олександрович вчитель фізики Українського фізико-математичного
ліцею Київського національного університету
імені Тараса Шевченка, доктор філософії в галузі
фізики та астрономії

Орлянський
Олег
Юрійович доцент кафедри теоретичної фізики факультету фізики,
електроніки та комп'ютерних систем Дніпровського
національного університету імені Олеся Гончара,
кандидат фізико-математичних наук

Пашко
Максим
Іванович методист лабораторії фізико-технічних наук
Національного центру «Мала академія наук України»,
заслужений вчитель України

Проценко Юрій Володимирович	вчитель Школи «Базис» м. Києва
Сапсай Віталій Юрійович	вчитель фізики Комунального закладу «Вінницький фізико-математичний ліцей № 17»
Триліс Олександр Васильович	вчитель Школи «Базис» м. Києва
Черненко Олександр Сергійович	професор кафедри фізики та астрономії факультету математики, фізики та інформаційних технологій Одеського національного університету імені І. І. Мечникова, доктор фізико-математичних наук

АСТРОНОМІЯ

Базей Олександр Анатолійович	доцент кафедри фізики та астрономії відділення фізики та астрономії факультету математики, фізики та інформаційних технологій Одеського національного університету імені І. І. Мечникова, кандидат фізико-математичних наук, доцент
Грицай Асен Васильович	доцент кафедри астрономії та фізики космосу Київського національного університету імені Тараса Шевченка, кандидат фізико-математичних наук
Зазубик Діана Віталіївна	студент II курсу фізичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка
Кошмак Ігор Олександрович	доцент кафедри астрофізики фізичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка, кандидат фізико-математичних наук
Кулініч Юрій Анатолійович	старший науковий співробітник відділу релятивістської астрофізики та космології Астрономічної обсерваторії Львівського національного університету імені Івана Франка, кандидат фізико-математичних наук

Марсакова Владислава Ігорівна	завідувач сектору експериментальної діяльності навчально-наукового структурного підрозділу КЗ «Рішельєвський ліцей» «Центр STEM-освіти Одеської області», кандидат фізико-математичних наук, доцент, заслужений працівник освіти України
Мелех Богдан Ярославович	завідувач кафедри астрофізики Львівського національного університету імені Івана Франка, доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник
Мохун Сергій Володимирович	завідувач кафедри фізики та методики її навчання Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка, кандидат технічних наук, доцент
Панько Олена Олексіївна	професор кафедри фізики та астрономії відділення фізики та астрономії факультету математики, фізики та інформаційних технологій Одеського національного університету імені І. І. Мечникова, доктор фізико-математичних наук, професор
Решетник Володимир Миколайович	доцент кафедри астрономії та фізики космосу фізичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка, кандидат фізико-математичних наук, доцент
Фортуна Назарій Павлович	аспірант Львівського національного університету імені Івана Франка
Шевчук Олександр Григорович	доцент кафедри інформаційних технологій, фізико- математичних та економічних наук навчально- наукового інституту природничо-математичних, медико-біологічних наук та інформаційних технологій Ніжинського державного університету імені Миколи Гоголя

Навчальне видання

**Завдання IV етапу
Всеукраїнських учнівських олімпіад
з навчальних предметів**

2024/2025 навчальний рік

**МАТЕМАТИКА
ФІЗИКА
АСТРОНОМІЯ**

Практикум

Редагування *О. Б. Степанюк*
Дизайн обкладинки *О. А. Чекановська*
Верстання *Л. В. Северенчук*

У виданні з навчальною метою
використані матеріали, в тому числі ілюстративні,
що містяться у вільному доступі в мережі Інтернет

Формат 60×84 1/16. Папір офс. 80 г/м².
Друк цифровий. Ум. друк. арк. 13,02.
Наклад 300 пр.

Видавництво: Національний центр «Мала академія наук України»,
Кловський узвіз, буд. 8, м. Київ, 01021
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 6999 від 04.12.2019

