Світло, тінь і математика

Методичні вказівки

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ЦЕНТР «МАЛА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ»

СВІТЛО, ТІНЬ І МАТЕМАТИКА

Методичні вказівки

Київ
Національний центр
«Мала академія наук України»
2025

УДК 37.01
С24
Укладачі:
К. В. Терлецька — завідувачка лабораторії математичних наук Національного центру «Мала академія наук України», старша наукова співробітниця Інституту проблем математичних машин і систем Національної академії наук України, докторка фізико-математичних наук;
К. О. Антошина — методистка лабораторії математичних наук Національного центру «Мала академія наук України»;
Д. Д. Сльота — студентка Київської школи економіки;
А. І. Бровченко — студент Університету Йогана Кеплера, Лінц, Австрія

Рекомендовано для використання в освітньому процесі рішенням науково-методичної ради Національного центру «Мала академія наук України» (протокол № 2 від 16.06.2025)

Світло, тінь і математика : методичні вказівки / уклад.: К. В. Терлецька,
С24 К. О. Антошина, Д. Д. Сльота, А. І. Бровченко. — Київ : Національний центр «Мала академія наук України», 2025. — 60 с.
ISBN 978-617-7945-76-4

Видання «Світло, тінь і математика» спрямоване на формування розуміння математики як прикладного інструменту, що сприяє дослідженню природних явищ, розкриттю законів природи, засвоєнню знань у повсякденні.

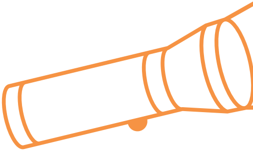
Представлено відомі ще тисячі років тому ідеї, пов'язані з використанням властивостей світла й тіні, а також задачі, в основу яких покладено теорему Фалеса та властивості подібних трикутників. Описані експерименти демонструють зв'язок між математикою та фізичними дослідженнями, що свідчить про важливість міждисциплінарної взаємодії.

Методичні вказівки адресовані педагогам, учням, вихованцям закладів загальної середньої та позашкільної освіти, зокрема системи Малої академії наук України, а також усім, хто цікавиться питаннями інтеграції математичних знань у щоденне життя.

УДК 37.01

© Терлецька К. В., Антошина К. О., Сльота Д. Д. та ін., укладання, ілюстрації, 2025
© Національний центр «Мала академія наук України», 2025

ISBN 978-617-7945-76-4



Зміст

Зміст

Передмова

Математика відіграє ключову роль у всебічному розвитку здобувачів загальної середньої та позашкільної освіти. Її застосування у повсякденні сприяє не лише набуттю практичних навичок, а й усвідомленню взаємозв'язку між абстрактними поняттями та реальними явищами. Саме тому актуальним є інтегративний підхід до вивчення математики, що поєднує теорію з практичним досвідом спостереження й дослідження навколишнього світу.

Зміст видання спрямований на розкриття фундаментальних математичних понять під час дослідження фізичних процесів поширення світла, його відбиття та утворення тіней.

Запропонований матеріал забезпечує формування системного розуміння математичних і фізичних закономірностей та сприяє розвитку візуального, аналітичного, просторового мислення. Значну увагу приділено застосуванню геометричних і аналітичних методів для моделювання процесів, що відбуваються у природі, а також у повсякденному житті людини. Використання світлових променів як інструменту дослідження пропонується для наочності під час пояснення ключових математичних конструкцій і понять, зокрема таких, як: «подібність трикутників» і «пропорційні залежності»; конічні перетини як результат перетину площини та конуса; властивості багатогранників і їхніх проєкцій; геометричні принципи, покладені в основу методів томографії.

Окремий акцент зроблено на інтеграції інформаційних технологій в освітній процес. У межах практичних робіт передбачене активне використання програмного забезпечення GeoGebra для моделювання оптичних ефектів, побудови графічних зображень і дослідження математичних властивостей об'єктів у динаміці. Це сприятиме формуванню навичок роботи з цифровими інструментами, розвитку інформаційної культури в процесі застосування сучасних технологій для розв'язання широкого кола завдань.

Видання містить опис форм роботи, що сприяють формуванню таких ключових компетентностей, як:

- *математична* — застосування методів математичного аналізу й геометричного моделювання, математичних знань для опису та пояснення фізичних явищ і процесів;
- *природнича, техніко-технологічна* — розуміння фізичного змісту оптичних явищ і процесів; використання знань про поширення світла, утворення тіней, властивості хвильових процесів, технологічні принципи, що застосовуються у приладах візуалізації (наприклад, у системах томографії) і для розв'язування практичних завдань;
- *інформаційно-комунікаційна* — створення математичних моделей, робота з цифровими математичними середовищами, зокрема GeoGebra, для побудови математичних моделей, візуалізації й аналізу геометричних конфігурацій, пов'язаних із оптичними явищами.

Зміст видання розроблено з урахуванням важливості інтеграції знань і методів із різних освітніх галузей, а саме:

- *математичної* — геометрія, аналітична геометрія, тригонометрія, елементи теорії ймовірностей (вивчення властивостей просторових фігур, кривих другого порядку, методів вимірювання та обчислення, що застосовуються в контексті оптичних досліджень);
- *природничої* — фізика, оптика, хвильова природа світла, основи томографії (аналіз фізичних механізмів взаємодії світла з об'єктами, дослідження тіней як фізичного явища, розгляд принципів отримання інформації про структуру об'єктів за допомогою оптичних та електромагнітних хвиль);
- *інформатичної* — робота з цифровими технологіями, математичне моделювання, комп'ютерна графіка (практичне використання програмних засобів для створення інтерактивних моделей, аналізу даних і візуалізації результатів досліджень).

Видання орієнтоване на учнів закладів загальної середньої та позашкільної освіти, які прагнуть поглибити й розширити знання з математики, фізики, астрономії та навчитися використовувати їх для розв'язання освітніх, пізнавальних завдань, а також інтегрування знань у повсякдення; педагогів, які організовують роботу гуртків і секцій за дослідницько-експериментальним напрямом позашкільної освіти.

Вступ

Чи замислювалися ви, що звичайний ліхтарик — це не лише засіб освітлення, а й інструмент для математичних досліджень? Промінь світла, проходячи крізь простір, утворює тіні, які можуть надати інформацію про структуру об'єктів, їхні розміри та взаємне розташування. Але ще більш цікавим є те, що світло допомагає не тільки бачити реальність, а й виявляти приховані закономірності, на яких ґрунтуються фізичні явища та процеси. Від подібності трикутників до аналітичної геометрії, від конічних перетинів до методів томографії — усе це можна пояснити, якщо ми знаємо геометрію та теорію світла. Математика дає нам змогу ставити й відповідати на багато складних запитань, наприклад:

- як визначити висоту об'єкта, не піднімаючись на нього?
- як знайти діаметр Землі, використовуючи лише довжину тіні?
- як розпізнати внутрішню структуру предмета, не заглядаючи всередину?

Теорема Фалеса і подібність трикутників допоможуть обчислювати висоту різних об'єктів — веж, дерев, пірамід — на основі інформації про довжину їхньої тіні. Завдяки знанням про співвідношення сторін подібних трикутників ми будемо навчатися розв'язувати задачі, у яких тінь — математичний інструмент. Ще у III столітті до н. е. давньогрецький науковець Ератосфен застосував цей принцип для визначення розмірів Землі, спостерігаючи за тінню від вертикального стрижня (гномона) у різних місцях. Це свідчить про те, що за допомогою простих пропорцій можна отримати правильні результати.

Тінь також може бути індикатором часу. Прикладом є сонячні годинники, за допомогою яких можливе відстеження зміни положення тіні, що рухається відповідно до зміни положення Сонця. Ми вивчимо їхню конструкцію та принципи роботи екваторіальних, горизонтальних і вертикальних моделей годинників.

Окрім вимірювань, тінь використовують для дослідження геометричних форм. Правильні багатогранники — платонові тіла, мають несподівані проєкції: тетраедр може відкидати тінь у формі квадрата, а куб — шестикутника. А якщо спрямовувати промінь світла на площину під різними кутами, можна отримати різні геометричні криві — конічні перетини.

Ми проаналізуємо, як змінюється форма світлової плями залежно від нахилу площини — вона може перетворитися на коло, еліпс, параболу, гіперболу. Ці криві є не лише абстрактними геометричними об᾿єктами, їх застосовують у багатьох сферах, наприклад, для визначення траєкторії космічних апаратів, проєктування дзеркал, антен, лінз.

А чи можна дізнатися, що знаходиться всередині об᾿єкта, не заглядаючи в нього? Комп᾿ютерна томографія, виготовлення рентгенівських знімків можливі завдяки взаємодії рентгенівського випромінювання з об᾿єктом. Ми досліджуватимемо і математичні методи відновлення зображень за допомогою непрямих вимірювань, і механізми відтворення об᾿єктів. Приміром, задача про закриту коробку з невідомим вмістом, у якій потрібно визначити, що всередині, аналізуючи лише тіні, що утворюються під різними кутами освітлення. Це саме той принцип, який використовують у сучасній томографії.

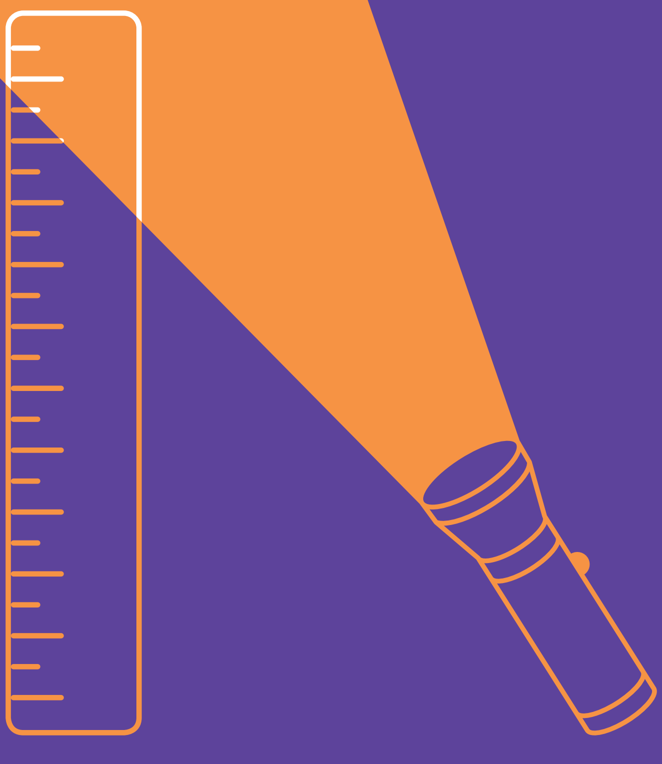
Дослідження допомагають побачити нові математичні горизонти, навчають мислити нестандартно, дають уміння ставити правильні запитання та знаходити обґрунтовані відповіді.

У майстернях можна знайти поради щодо створення наочних моделей для вивчення їхніх математичних властивостей.

Демонстрації мають на меті показати принцип дії того чи іншого явища в динаміці.

Розділ 1.

ВИМІРЮВАННЯ



1.1. Магія тіней. Як математика пояснює світ

Здавалося б, що може бути більш простим за тінь, яка з'являється щодня, змінюючи довжину і напрямок: стає коротшою в обідню пору і довшою під вечір. Звичайна гра світла й тіні приховує ключ до розкриття таємниць природи.

Тінь визначають як ділянку простору, в яку не потрапляє чи частково потрапляє світло від джерела через те, що на його шляху є непрозорий або напівпрозорий об'єкт. Тінь виникає внаслідок прямолінійного поширення світла й має форму, що залежить від форми об'єкта, положення джерела світла та відстані до поверхні, на яку падає тінь.

За допомогою параметрів тіні й математичних обчислень можна визначити висоту різних об'єктів (пірамід, веж, дерев, будинків тощо), не підіймаючись на них. Понад 2000 років тому геніальний Ератосфен обчислив розміри Землі. Ще більш вражає те, що напрямок і довжина тіні допомагають вимірювати час. Упродовж тисячоліть люди орієнтувалися в часі, спостерігаючи за переміщенням тіні від гномона.

Такі методи вимірювання ґрунтуються на математичних законах. Теорема Фалеса, подібність трикутників, геометричні величини й рівняння дають нам змогу отримувати точні результати без застосування складних засобів. Саме через ці дослідження людство змогло краще розуміти закони природи, розширити горизонти пізнання.

Тож приготуймося до подорожі, під час якої тінь стане нашим головним математичним інструментом, що допоможе дізнатися про те, як стародавні вчені виміряли високі споруди, встановили розміри Землі, стежили за часом. Це все робилося за допомогою математики!

1.2. Теорема Фалеса. Як виміряти недосяжне

Уявімо, що нам потрібно виміряти висоту вежі, не маючи ніякого засобу або пристрою, щоб піднятися до її найвищої точки. Таке завдання може здатися складним, але в VI ст. до н. е. давньогрецький математик Фалес Мілетський (приблизно 624–546 рр. до н. е.) довів, що дізнатися висоту вежі можна, визначивши довжину тіні й застосувавши знання про пропорції. Вважають, що він є одним із перших учених, які використали математичні принципи для розв'язування подібних задач. Кажуть, що Фалес виміряв висоту однієї з єгипетських пірамід, дочекавшись, коли довжина його власної тіні дорівнюватиме його зросту. Тоді він зробив висновок про те, що довжина тіні піраміди відповідає її висоті. Є інше припущення: що він використав жердину для порівняння його тіні з тінню піраміди та застосував правило пропорційності.

Теорема Фалеса (узагальнена). *Якщо паралельні прямі перетинають дві січні, то вони пропорційно ділять відрізки цих січних.*

Це означає, що співвідношення відповідних відрізків залишається сталим (*рис. 1*):

$$\frac{OA_1}{A_1A_2} = \frac{OB_1}{B_1B_2}.$$

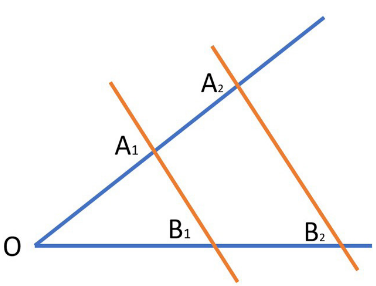


Рис. 1. Теорема Фалеса

Теорема Фалеса — основа для вимірювання висоти за допомогою тіні. Фалес стверджував: якщо сонячне світло падає на об'єкти під одним і тим самим кутом, то відношення довжини їхніх тіней до їхньої висоти буде однаковим. Тобто, вимірявши тінь дерева, вежі, будинку тощо та порівнявши її з тінню об'єкта з відомою висотою (наприклад, власного зросту), можна знайти висоту будь-якого об'єкта!

Задача 1.1

Ліхтар заввишки 9 м освітлює людину зі зростом 2 м (*рис. 2*). Довжина тіні людини — 1 м. Визначте, на якій відстані від основи ліхтаря стоїть людина.

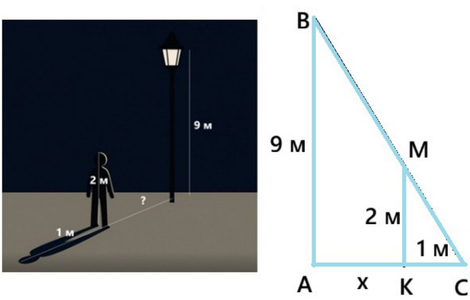


Рис. 2. Ілюстрація до задачі про відстань між людиною та ліхтарем

Розв'язання

Розглянемо математичну модель задачі. Скористаємося *законом прямолінійного поширення світла* для побудови необхідної схеми. Трикутник ABC подібний трикутнику KMC, бо AB є паралельною KM. Отже, трикутники подібні за двома кутами. Співвідношення між відповідними сторонами:

$$\frac{AB}{KM} = \frac{AC}{KC},$$

$$\frac{9}{2} = \frac{x+1}{1}.$$

Отримаємо: $x = 3{,}5$ м.

Відповідь: 3,5 м.

Задача 1.2

У сонячний день довжина тіні від вертикальної метрової лінійки становить 24 см. Тінь від дерева — 3,6 м. Знайдіть висоту дерева.

Відповідь: висота дерева 15 м.

Задача 1.3

Розгляньте рис. 3 і, використавши вказані на ньому дані, знайдіть висоту червоного стовпа.

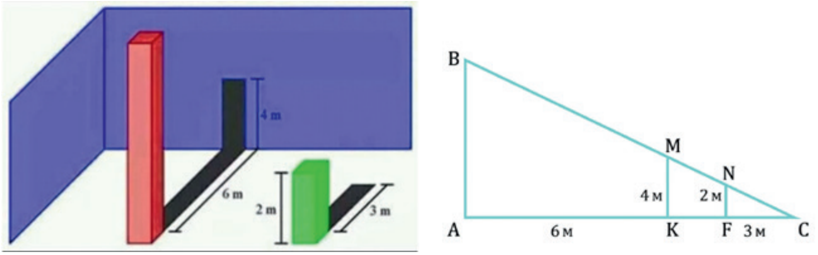


Рис. 3. Схема до задачі про знаходження висоти стовпа

Розв'язання

Дещо змінимо модель задачі. Вважатимемо, що пучок світла, який іде від джерела, є паралельним. Нехай червоний стовпець — це відрізок AB, зелений — NF, а тінь від червоного стовпа — KM. Тоді ми можемо зобразити ці трикутники розташованими вздовж однієї прямої, так, як показано на *рис. 3*. Трикутники ABC, KMC, FNC подібні.

Тоді $KC = 2 \times FC = 6$ *м*.

$AK = KC$, та $\frac{AC}{KC} = \frac{AB}{KM}$.

Отже, $\frac{12}{6} = \frac{AB}{4}$.

Отримаємо: AB = 8 м.

Ускладнимо умову і розглянемо задачу про тінь у контексті задач, пов'язаних зі швидкістю й рухом.

Задача 1.4

Людина зростом 2 м йде зі швидкістю 1 м/с від ліхтарного стовпа, висота якого — 9 м (*рис. 4*). Визначте, як змінюється довжина тіні людини під час руху.

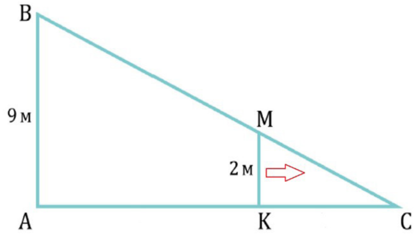


Рис. 4. Схематичне зображення залежності довжини тіні від руху

Проведемо пряму лінію від вершини ліхтарного стовпа до верхньої точки людини. Ця лінія формує тінь позаду людини через світло від ліхтаря.

Висота ліхтарного стовпа — 9 м, а зріст людини — 2 м.

Позначимо:

x — відстань між людиною і основою ліхтаря;

s — довжина тіні;

l — сума $(x + s)$, тобто загальна відстань від основи ліхтаря до кінця тіні.

Треба знайти ds/dt, тобто швидкість зміни довжини тіні. Похідна по часу від s показує, як швидко змінюється s. Щоб знайти ds/dt, необхідно побудувати подібні трикутники. Перший трикутник — це великий трикутник, висота якого дорівнює 9 м, а основа — $(x + s)$. Другий трикутник — менший, його висота становить 2 м, а основа — s.

Раніше було доведено, що трикутники подібні. Тоді маємо співвідношення:

$$\frac{9}{(x+s)} = \frac{2}{s},$$

$$9s = 2x + 2s,$$

$$7s = 2x.$$

Продиференціюємо обидві частини рівняння за часом t:

$$d/dt\,(7s) = 2\,dx/dt.$$

З умови відомо, що від ліхтаря людина іде зі швидкістю 1 м/с. Це означає, що x збільшується зі швидкістю 1 м/с, тобто $dx/dt = 1$ м/с.

Тоді $ds/dt = \frac{2}{7} \approx 0{,}3$ м/с.

Отже, швидкість зміни довжини тіні дорівнює 0,3 м/с.

Відповідь: 0,3 м/с.

1.3. Метод Ератосфена. Як виміряти діаметр Землі

Ще один спосіб використання математичних вимірювань деяких об'єктів за допомогою тіні винайшов Ератосфен. Саме він першим визначив приблизний розмір Землі (довжину екватора), використовуючи лише *гномон* (вертикальний стрижень, який відкидає тінь на горизонтальну поверхню) та знання геометрії. Ератосфен знав, що в день літнього сонцестояння в місті Сієна (сучасний Асван) на півдні Єгипту сонце знаходиться якраз над головою. Тіні немає, бо саме опівдні сонячні промені падають вертикально. Він виявив це, спостерігаючи, як сонце освітлює глибокі колодязі. У цю мить вода в них повністю освітлювалась, адже їхні стіни не створювали тіней. Александрія, де жив Ератосфен, знаходиться приблизно за 800 км на північ від Сієни. У день літнього сонцестояння Ератосфен вирішив провести експеримент. Він установив гномон і виміряв довжину тіні, що утворилася. Спостерігаючи її, вчений зрозумів, що в Александрії сонячні промені падають під кутом, а не вертикально.

Ератосфен дійшов висновку, що кут падіння сонячних променів у Александрії можна виміряти за допомогою співвідношення довжини тіні й висоти гномона. Використовуючи ці дані, він визначив, що кут між променями сонця і вертикаллю в Александрії становить приблизно $7{,}2^{\circ}$. Цей кут також є центральним кутом між Сієною й Александрією, якщо уявити Землю як сферу (*рис. 5*).

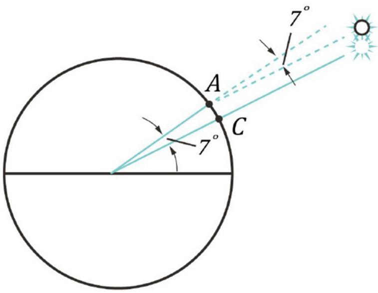


Рис. 5. Схема експерименту Ератосфена. Сонячні промені проходять паралельно радіусу, який спрямований через точку *C* (Сієна), і утворюють кут 7° із радіусом, що проходить через точку *A* (Александрія)

Ератосфен знав від караванників, які подорожували між Сієною й Александрією, що відстань між цими містами становить приблизно 5000 стадій (близько 800 км). Він припустив, що ця відстань (дуга *AC*) є частиною кола Землі, і обчислив її. Якщо 7,2° — це 1/50 частина повного кола (360°), то довжина обводу Землі має бути 5000 × 50 = 250 000 стадій. Перетворивши ці одиниці на сучасні, отримуємо приблизно 40 000 км, що досить близько до реальної довжини екватора — 40 076 км.

Ератосфен не лише першим довів, що Земля є кулею, а й дивовижно точно для того часу обчислив її розміри. В основі його методу — прості спостереження й фундаментальні принципи геометрії, які вивчають у школі. Ця історія є прикладом того, як цікавість, уважність до деталей і знання математики можуть розкрити великі таємниці світу. Тіні, що їх часто сприймають як звичайне явище, стали ключем до визначення масштабів нашої планети.

1.4. Сонячний годинник. Як виміряти час

Окрім вимірювання розмірів різних об'єктів, за допомогою тіні можна вимірювати ще й час. Саме тінь стала першим природним хронометром, який люди використовували для орієнтації в часі.

Сонячні годинники — один із найдавніших засобів вимірювання часу. Історія почалася понад 5000 років тому, коли їх зразки з'явилися у Вавилоні й Давньому Єгипті, де для визначення часу використовували тінь від обелісків і гномонів. У Греції та Римській імперії сонячні годинники були більш точними, бо мали поділ доби на години, однак тривалість їх функціонування залежала від пори року. У період Середньовіччя сонячні годинники були важливими орієнтирами для визначення часу, але згодом стали й декоративними елементами.

Сучасні сонячні годинники поділяються на три основні типи:

1) вертикальні, що розташовані на стінах будівель, орієнтовані на південь або північ;
2) горизонтальні, що встановлені на землі або інших горизонтальних поверхнях;
3) екваторіальні (похилі), у яких циферблат розміщений паралельно до екватора, що відображає рівномірний поділ часу протягом дня.

1.4.1. Майстерня «Створення сонячного годинника»

Екваторіальні сонячні годинники належать до найбільш поширених. Їхній циферблат розташований паралельно площині екватора. Головна перевага над горизонтальними або вертикальними сонячними годинниками полягає в тому, що вони є більш точним засобом вимірювання часу. Такі пристрої часто використовуються для освітніх і наукових цілей. Сонячний годинник складається з двох елементів:

1) кадрана — плоскої поверхні з позначеними мітками на циферблаті — часовими поділками;
2) гномона — закріпленого на кадрані прямого стрижня.

Гномон встановлюється під кутом, що дорівнює широті місцевості, і вказує на Полярну зірку. Завдяки такому розташуванню тінь від гномона рухається рівномірно протягом дня, а поділки годин розміщені на циферблаті з однаковими інтервалами.

Створення сонячного годинника

Матеріали та обладнання:

- аркуш цупкого паперу, картону, фанери або іншого плоского матеріалу для основи;
- стрижень (металевий або дерев'яний) довжиною 10–15 см;
- лінійка, транспортир і олівець;
- компас;
- ніж або інструмент для прорізання отвору для стрижня;
- підставка для нахилу основи (за потреби).

Крок 1. Створення циферблата (рис. 6)

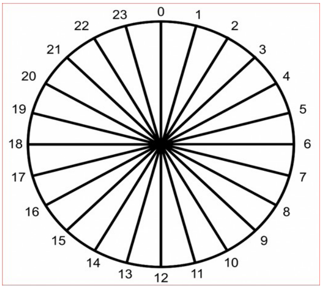


Рис. 6. Схема циферблата

1. Коло. На аркуші паперу чи іншій основі накресліть коло діаметром 20–30 см. Це буде циферблат.
2. Поділки на колі. Розділіть коло на 24 рівні частини, кожна з яких відповідає 15° (360° ÷ 24 = 15°). Використайте транспортир для того, щоб виконати це завдання.
3. Позначення годин. Напишіть числа від 1 до 24 на відповідних поділках. Ураховуйте, що тінь від гномона показуватиме лише денний час.

Крок 2. Встановлення гномона та циферблата (рис. 7)

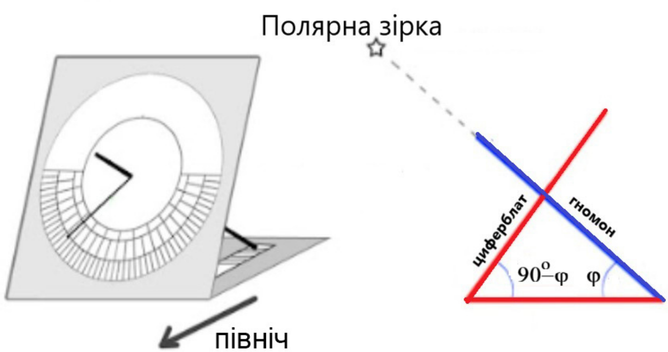


Рис. 7. Схема встановлення гномона та циферблата

У центрі циферблата зробіть отвір для гномона. Закріпіть його перпендикулярно до основи циферблата, щоб він відкидав тінь. Для зручності можна використовувати металеву втулку або інший фіксатор. Щоб сонячний годинник працював правильно, важливо безпомилково налаштувати його кут нахилу. Циферблат має бути нахилений *під кутом 90° –* φ*, де* φ *географічна широта місцевості*. Це забезпечує точне відображення часу залежно від положення Сонця.

Визначення правильного кута нахилу

1. Визначте широту вашого міста. Наприклад, для Києва $\varphi = 50°$, для Чернівців $\varphi = 48°$.
2. Обчисліть кут нахилу циферблата за формулою:

$$90° - \varphi.$$

   - Київ: $90° - 50° = 40°$.
   - Чернівці: $90° - 48° = 42°$.

3. Закріпіть циферблат під відповідним кутом за допомогою підставки у формі прямокутного трикутника. Висота підставки має відповідати розрахованому куту нахилу.

Вирівнювання за сторонами світу

1. Використовуючи компас, розташуйте гномон так, щоб він був спрямований на північ (для Північної півкулі) або на південь (для Південної півкулі).
2. Переконайтеся, що циферблат знаходиться в положенні, коли тінь від гномона абсолютно відповідає розміткам часу.

Крок 3. Тестування та калібрування

1. У сонячний день перевірте роботу годинника. О 12:00 за місцевим сонячним часом тінь має падати на позначку «12».
2. За умови відхилення відкоригуйте нахил чи положення годинника.

Будь-який засіб має свої обмеження, і сонячний годинник не є винятком. Основний недолік полягає в тому, що його можна використовувати лише протягом окремих періодів року. Взимку, коли сонце знаходиться низько над горизонтом або його довго не видно через погодні умови, годинник не може показувати час. Проте на відкритих територіях сонячні годинники зазвичай застосовуються у весняно-літньо-осінній період.

Сонячний годинник показуватиме «сонячні» години, тобто місцевий сонячний час, що залежить від положення Сонця на небі й обертання Землі навколо її осі. Він може відрізнятися від поясного часу, який визначається стандартами часових поясів. Наприклад, створений сонячний годинник відображатиме місцевий час для окремої широти, тоді як годинники в будинках чи на телефонах показують поясний час, який є офіційним часом для регіону.

Отже, сонячні годинники мають переваги і недоліки, що залежать від астрономічних явищ.

1.4.2. Демонстрація «Модель із ліхтариком»

Ця демонстрація з використанням глобуса як моделі Землі та ліхтарика як засобу, що імітує сонячне світло, допоможе легко зрозуміти принцип дії сонячного годинника.

Матеріали та обладнання:
- глобус;
- ліхтарик;
- маленький стрижень або сірник (гномон);
- аркуш паперу з розкресленим циферблатом;
- клейка стрічка або пластилін.

Крок 1. Розміщення глобуса

1. Поставте глобус на рівну поверхню.
2. Вісь нахиліть під кутом приблизно 23,5° (нахил земної осі).

Крок 2. Закріплення гномона

Прикріпіть *гномон* вертикально до глобуса, де зображено екватор (моделювання екваторіального сонячного годинника), або на його поверхні в точці, що відповідає обраному місту (моделювання горизонтального годинника).

Крок 3. Встановлення джерела світла

1. Вимкніть світло в кімнаті.
2. Увімкніть ліхтарик і спрямуйте світло від нього на глобус.
3. Ліхтарик слід тримати так, щоб його положення відповідало положенню Сонця в окремий час доби.

Крок 4. Спостереження за тінню

1. Зверніть увагу на те, як змінюються довжина й напрямок тіні від гномона, коли повільно обертати глобус для імітування добового обертання Землі.
2. Позначте положення тіні в різні проміжки часу на паперовому циферблаті.

Крок 5. Моделювання руху Сонця

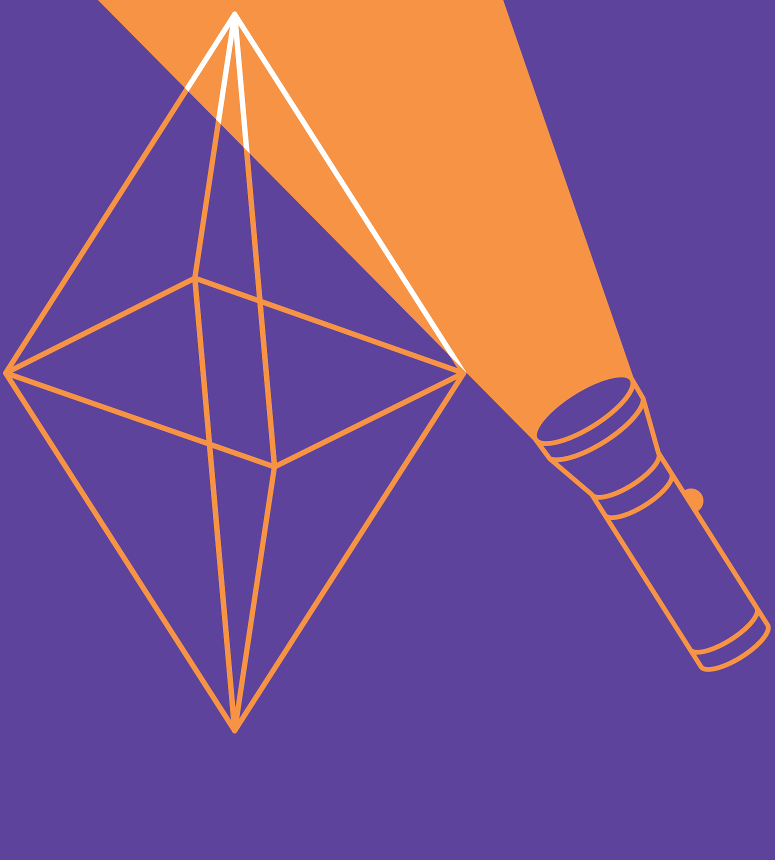
1. Повільно переміщуйте ліхтарик уздовж дуги, щоб імітувати рух Сонця протягом року. Спостерігайте, як змінюється довжина тіні на різних широтах.

2. Порівняйте тінь від гномона для точок на екваторі, середніх широтах і біля полярних областей.

Крок 6. Обговорення результатів

Проаналізуйте, як змінюється довжина тіні протягом дня. Дайте відповідь, чому в різних широтах сонячний годинник працює по-різному та як можна використати цей принцип для визначення часу й географічної широти.

Розділ 2.
ФОРМИ



2.1. Проєкції платонових тіл

Чи може правильний тетраедр мати тінь у формі квадрата? Як куб може створювати шестикутну тінь? На перший погляд, це здається неможливим, але завдяки законам проєктивної геометрії по-іншому сприймаються тінь і просторові форми. За допомогою ліхтарика можна побачити, які тіні мають форми правильних багатогранників, які геометричні форми можуть утворюватися внаслідок їх проєктування та як змінюється тінь залежно від кута освітлення, відстані до екрана та типу проєкції.

Проєкція — це відображення просторового об’єкта на площину. Вона може мати форму та розміри тривимірного тіла у двовимірному просторі. Залежно від положення джерела світла або точки спостереження розрізняють паралельне й центральне проєктування.

Паралельне проєктування відбувається, якщо всі промені світла, що падають на об’єкт, паралельні один одному. Це означає, що об’єкт проєктується на площину без спотворень.

Вплив на форму тіні. Під час паралельного проєктування багатогранник може давати різні тіні, що залежать від напрямку світла. Наприклад, куб може створювати квадратну або шестикутну тінь, а тетраедр — трикутну або квадратну.

Центральне проєктування відбувається, якщо промені світла розходяться від однієї точки (джерела світла). У цьому разі проєкція об’єкта змінюється залежно від його відстані від джерела і кута нахилу.

Вплив на форму тіні. Під час центрального проєктування коло може стати еліпсом, квадрат — трапецією або прямокутником, а куб може мати деформовану шестикутну тінь.

Гра тіней є одним зі способів дослідження й візуалізації просторових фігур. Тіла можуть мати різні проєкції залежно від кута зору та розташування відносно площини проєкції. Наприклад, можна знайти орієнтацію, за якої тетраедр проєктується у квадрат, куб — у шестикутник, а октаедр може утворювати як квадрат, так і більш складні форми.

Щоб зрозуміти, як це відбувається, розглянемо основні властивості правильних багатогранників на прикладі платонових тіл.

Платонові тіла — це правильні багатогранники, які мають грані, що є рівними правильними многокутниками, а отже, усі їхні кути та довжини ребер однакові. Платонові тіла є унікальними, оскільки в тривимірному просторі існує лише п'ять таких фігур:

1) тетраедр — має 4 трикутні грані, 4 вершини, 6 ребер;
2) куб (гексаедр) — має 6 квадратних граней, 8 вершин, 12 ребер;
3) октаедр — складається з 8 трикутних граней, 6 вершин, 12 ребер;
4) додекаедр — має 12 п'ятикутних граней, 20 вершин, 30 ребер;
5) ікосаедр — містить 20 трикутних граней, 12 вершин, 30 ребер.

Уже за часів античності такі фігури були відомі й мали велике значення в математиці, філософії та природничих науках. Платон вважав, що кожен із таких багатогранників відповідає окремому елементові світу: тетраедр — вогню, куб — землі, октаедр — повітрю, додекаедр — ефіру, ікосаедр — воді.

Завдяки симетричній будові платонові тіла наділені цікавими властивостями, зокрема їхні проєкції можуть мати різні форми залежно від кута освітлення або місця, з якого на них дивитися.

Спробуйте створити власні моделі платонових тіл у майстернях 2.1.1 та 2.1.3. Проаналізуйте отримані результати і дайте відповіді на запитання:

- чому одна і та сама фігура може давати різні тіні?

- як можна передбачити форму тіні для будь-якого багатогранника?

Відповіді на ці запитання допоможуть не лише більш докладно зрозуміти властивості просторових фігур, а й побачити зв'язок геометрії з архітектурою, комп'ютерною графікою, оптикою, мистецтвом.

2.1.1. Майстерня «Тіні від тетраедра»

Тетраедр — це найпростіший багатогранник із чотирма трикутними гранями.

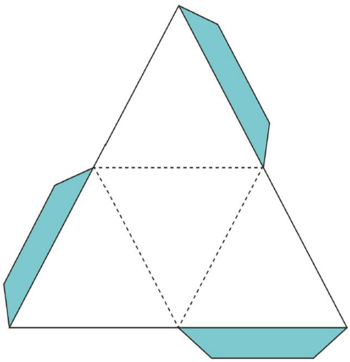


Рис. 8. Розгортка тетраедра

Матеріали та обладнання:

- аркуш цупкого паперу;
- лінійка, транспортир і олівець;
- ножиці;
- клей ПВА;
- невеликий стрижень (наприклад, дерев'яна паличка для розмішування напоїв);
- ліхтарик.

Крок 1. Створення моделі тетраедра

1. На аркуші паперу за допомогою лінійки, транспортира й олівця відтворіть розгортку тетраедра (*рис. 8*).
2. Виріжте розгортку, зігніть по лініях і склейте фігуру.
3. Прикріпіть до одного з кутів отриманої моделі паличку, яка дасть змогу тримати модель тетраедра.

Крок 2. Дослідження проєкцій

1. Візьміть модель тетраедра за паличку та за допомогою ліхтарика спроєктуйте її на стіну чи іншу площину (у приміщенні має бути темно).
2. Отримайте трикутну тінь від тетраедра, розташувавши одну з граней перпендикулярно до променів світла (*рис. 9 а*).
3. Отримайте квадратну тінь від тетраедра, розташувавши світло вздовж осі, що проходить через середини двох протилежних ребер (*рис. 9 б*).

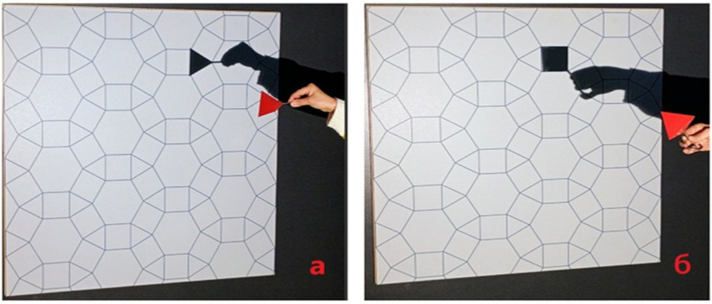


Рис. 9. Тіні від тетраедра

2.1.2. Майстерня «Тіні від куба»

Куб — це правильний шестигранник, усі грані якого є квадратами.

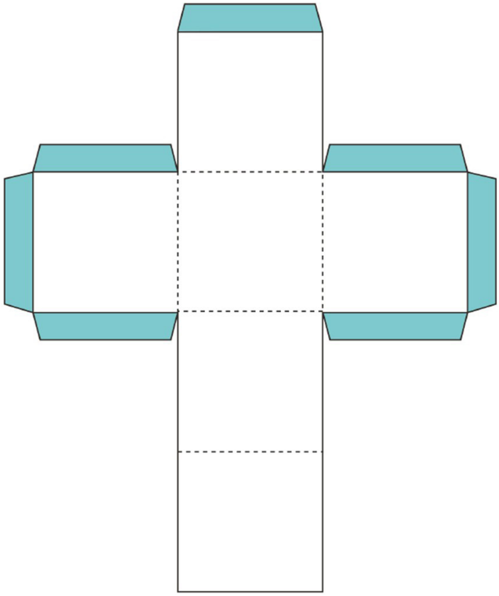


Рис. 10. Розгортка куба

Матеріали та обладнання:
- аркуш цупкого паперу;
- лінійка, транспортир і олівець;
- ножиці;
- клей ПВА;
- невеликий стрижень (дерев'яна паличка для розмішування напоїв);
- ліхтарик.

Крок 1. Створення моделі куба

1. На аркуші паперу за допомогою лінійки та олівця відтворіть розгортку куба (*рис. 10*).
2. Виріжте розгортку, зігніть по лініях і склейте фігуру.
3. Прикріпіть до одного з кутів отриманої моделі паличку, яка дасть змогу тримати модель куба.

Крок 2. Дослідження проєкцій

1. Візьміть модель куба за ручку та за допомогою ліхтарика спроєктуйте її на стіну чи іншу площину (у приміщенні має бути темно).
2. Отримайте квадратну тінь від куба, розташувавши одну з граней перпендикулярно до променів світла (*рис. 11 а)*.
3. Отримайте шестикутну тінь від куба, розмістивши його так, щоб одна з його діагоналей розташовувалась перпендикулярно до площини проєкції (*рис. 11 б*).

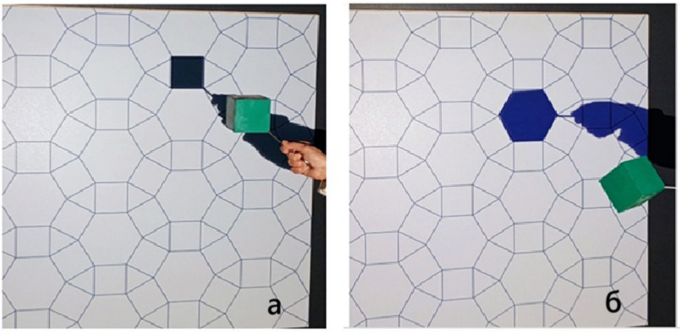


Рис. 11. Тіні від куба

2.1.3. Майстерня «Тіні від октаедра»

Октаедр — це правильний восьмигранник, що складається з восьми рівносторонніх трикутників. Можна вважати, що він — це два з'єднані основами тетраедри.

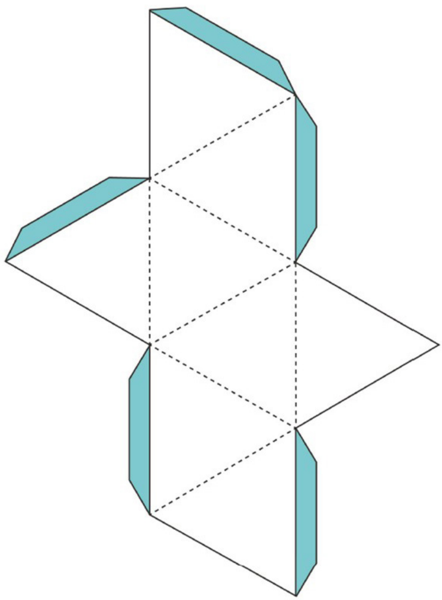


Рис. 12. Розгортка октаедра

Матеріали та обладнання:
- аркуш цупкого паперу;
- лінійка, транспортир і олівець;
- ножиці;
- клей ПВА;
- невеликий стрижень (дерев'яна паличка для розмішування напоїв);
- ліхтарик.

Крок 1. Створення моделі октаедра

1. На аркуші паперу за допомогою лінійки, транспортира й олівця відтворіть рисунок розгортки октаедра (*рис. 12*).
2. Виріжте розгортку, зігніть по лініях і склейте фігуру.
3. До одного з кутів отриманої моделі прикріпіть паличку, яка дасть можливість тримати модель октаедра.

Крок 2. Дослідження проєкцій

1. Візьміть модель тетраедра за ручку та за допомогою ліхтарика спроєктуйте її на стіну чи іншу площину (у приміщенні має бути темно).
2. Отримайте квадратну тінь від октаедра, розташувавши велику діагональ уздовж променів світла (*рис. 13 а*).
3. Отримайте шестикутну тінь від октаедра, розташувавши одну з трикутних граней перпендикулярно до променів світла (*рис. 13 б*).

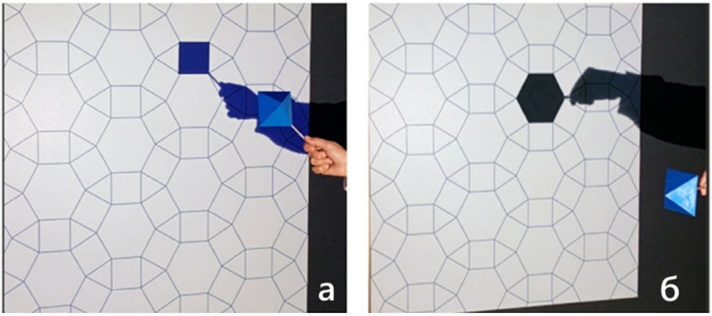


Рис. 13. Тіні від октаедра

Проєкції багатогранників підтверджують те, що проєкції тривимірних фігур можуть набувати несподіваних двовимірних форм, а також допомагають зрозуміти зв’язок між об’ємними об’єктами та їхніми відображеннями на площині, що є основою для багатьох галузей — від архітектури та мистецтва до комп’ютерної графіки та інженерії.

Задача 2.1

На горизонтальній поверхні стоїть куб зі стороною 2 м. Джерело світла розташоване так, що промені падають під кутом 45° до горизонту. Світло падає в площині, яка проходить через центр однієї з бічних граней куба та перпендикулярна до неї. Тінь утворюється на тій самій горизонтальній поверхні.

Завдання:

- визначте, якої форми буде тінь від куба: квадрат, прямокутник, шестикутник;
- знайдіть довжину сторін тіні та її площу.

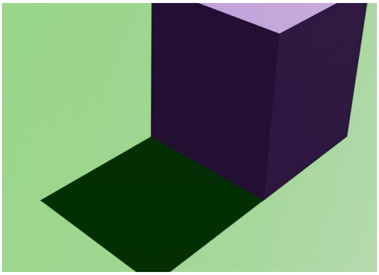


Рис. 14. Ілюстрація до задачі про тінь від куба

Розв’язання

Згідно з умовою задачі світло падає під кутом 45° до горизонту. Це означає, що у прямокутному трикутнику, утвореному ребром куба (як вертикальним катетом) і тінню цього ребра на землі (як горизонтальним катетом), tan(45°) = висота куба / довжина тіні = 1. Звідси випливає, що довжина тіні дорівнює висоті куба, тобто довжина тіні дорівнює 2 м. Оскільки світло падає в одній вертикальній площині, тінь від куба на горизонтальній поверхні матиме форму прямокутника. Одна його сторона — ребро куба (ширина тіні) дорівнює 2 м, інша сторона — довжина тіні, яка дорівнює 2 м. Отже, тінь має форму прямокутника зі сторонами по 2 м, тобто це квадрат.

Площа тіні: $S = 2\,м \times 2\,м = 4\,м^2$.

2.2. Конічні перетини

Світловий пучок від точкового джерела не лише виконує функцію освітлення, а й може бути ефективним засобом дослідження властивостей кривих другого порядку. Зокрема, особливий інтерес становить вивчення конічних перетинів — геометричних фігур, що утворюються залежно від кута падіння світла на поверхню. Аналіз таких проєкцій дає змогу дослідити основні закономірності та взаємозв'язки між еліпсами, параболами і гіперболами, що широко застосовуються в математиці, фізиці, зокрема оптиці.

Для цього потрібно затемнити приміщення, взяти ліхтарик і спрямувати світло від нього на стіну або стіл. Пучок світла має форму конуса. А площина, на якій утворюється світлова пляма, це площина перетину. Сам конус — це тіло, яке утворюється внаслідок обертання прямої (твірної), що проходить через вершину та дотикається до кола (основи), навколо осі, перпендикулярної до площини основи. Якщо через конус провести площину, то залежно від її нахилу і положення відносно осі конуса утворюються різні геометричні фігури, які називають *конічними перетинами*. До них належать коло, еліпс, парабола та гіпербола (*рис. 15*).

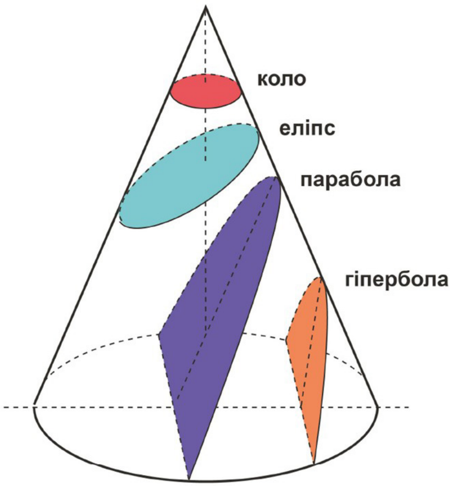


Рис. 15. Конічні перетини

2.2.1. Демонстрація «Коло, еліпс, парабола і гіпербола»

Такі демонстрації наочно ілюструють принцип утворення конічних перетинів, дають можливість зрозуміти їх геометричну природу за допомогою простих оптичних ефектів. Використання світлового променя як засобу візуалізації дає змогу показати, як фундаментальні математичні поняття набувають реальних форм. Для більш ґрунтовного аналізу та більш точного відтворення конічних перетинів у різних конфігураціях додатково буде використано середовище GeoGebra, завдяки якому можна побачити моделі та дослідити математичні властивості кривих у цифровому форматі.

Конічні перетини широко застосовуються в різних галузях науки і техніки — від опису траєкторій руху космічних апаратів до проєктування антенних систем та оптичних відбивачів.

Матеріали та обладнання:
- ліхтарик;
- поверхня або стіна.

Крок 1. Коло

1. Посвітимо ліхтариком на поверхню (стіл, стіну) під прямим кутом.
2. Отримана форма кола є наслідком того, що промені рівномірно поширюються у всі боки і створюють ідеальну симетрію (*рис. 16*).

Рис. 16. Світлова пляма від ліхтарика у формі кола

Коло — це геометричне місце точок на площині, рівновіддалених від заданої точки, яка називається центром кола. Відстань від центра до будь-якої точки кола називається радіусом. Рівняння кола:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

з центром у точці (x_0, y_0) і радіусом R.

Побудуємо коло як перетин конуса $x^2 + y^2 = z^2$ і горизонтальної площини, наприклад $z = 2$.

Це можна зробити за допомогою пакета GeoGebra 3D: https://www.geogebra.org/3d?lang=uk.

Послідовність дій

1. Відкрийте GeoGebra 3D.
   Перейдіть на GeoGebra 3D і почніть роботу в середовищі для побудови тривимірних обʼєктів.
2. Створіть конус, для цього оберіть інструмент «поверхня» або введіть у рядок введення рівняння конуса: $x^2 + y^2 = z^2$.
   GeoGebra автоматично побудує конус у тривимірному просторі.
3. Створіть січну площину, введіть рівняння площини, наприклад: $z = 2$.
   GeoGebra побудує площину, яка буде перетинати конус.
4. Отримуємо конічний переріз у формі кола.

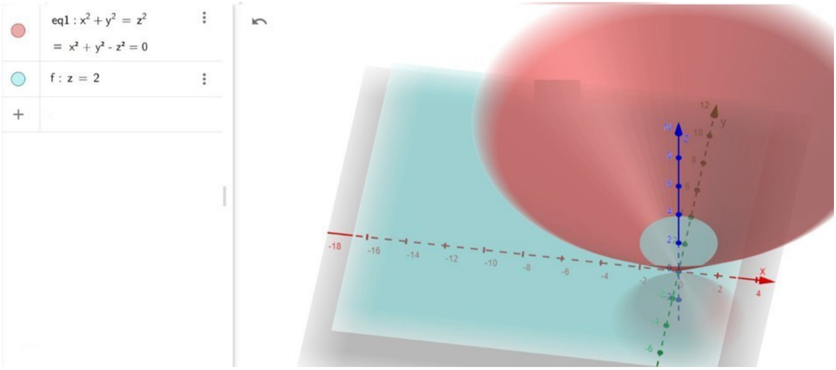


Рис. 17. Побудова перерізу конуса у формі кола в GeoGebra 3D

Рівняння цього кола отримаємо, якщо підставимо $z = 2$ у рівняння конуса $x^2 + y^2 = z^2$:

$$x^2 + y^2 = 2^2.$$

Крок 2. Еліпс

1. Утримуйте ліхтарик під невеликим кутом.
2. Отримана форма еліпса є наслідком того, що пучок світла повністю потрапляє на поверхню (геометрично: площина перетинає конус по замкненій лінії), проте кут спотворює попередню фігуру — коло, зміщуючи фокус і перетворюючи його на еліпс (*рис. 18*).

Еліпс — це геометричне місце точок на площині, сума відстаней яких до двох фіксованих точок (фокусів) є сталою величиною. Рівняння еліпса з центром у точці (x_0, y_0):

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1,$$

де відрізки, проведені з центру еліпса до вершин на великій і малій осях, називаються, відповідно, великою і малою піввісями еліпса та дорівнюють a і b.

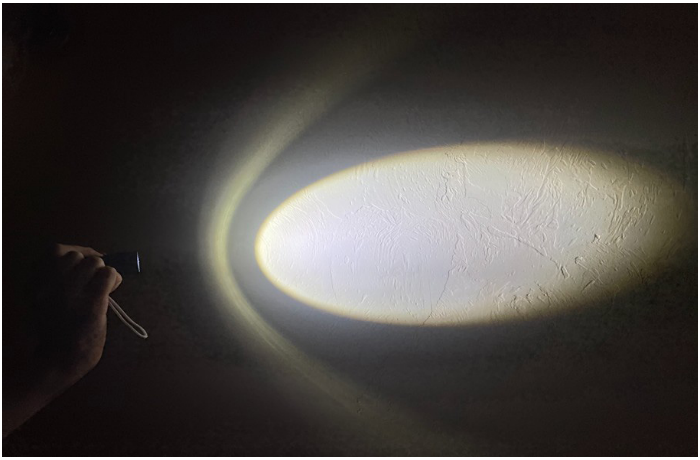


Рис. 18. Світлова пляма від ліхтарика у формі еліпса

Побудуємо еліпс як перетин конуса $x^2 + y^2 = z^2$ і площини, наприклад $z = 0{,}3x + 10$ так само, як і раніше за допомогою пакета GeoGebra 3D.

Повторіть такі ж самі кроки, що і для побудови кола, але тепер січну площину задайте як $z = 0{,}3x + 10$.

Отримайте конічний переріз у формі еліпса. Рівняння цього еліпса отримаємо, якщо підставимо $z = 0{,}3x + 10$ у рівняння конуса $x^2 + y^2 = z^2$:

$$x^2 + y^2 = (0{,}3x + 10)^2.$$

Розкриваємо дужки правої частини й утворюємо повний квадрат:

$$x^2 + y^2 = 0{,}09x^2 + 6x + 100.$$

Після перетворень отримаємо рівняння еліпса:

$$\frac{(x-3{,}297)^2}{120{,}8} + \frac{y^2}{109{,}9} = 1.$$

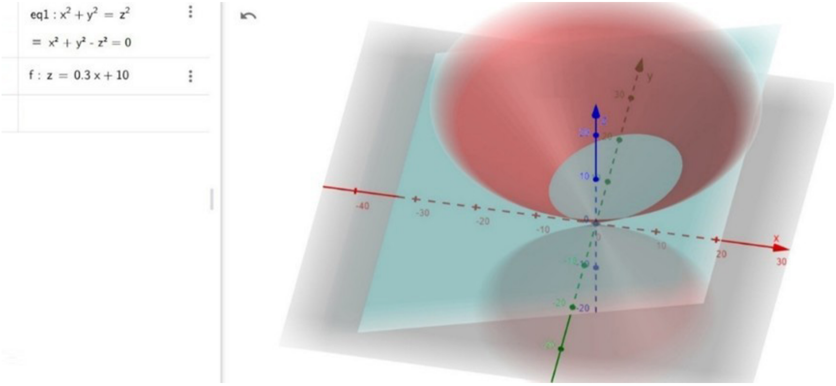


Рис. 19. Побудова перерізу конуса у формі еліпса в GeoGebra 3D

Крок 3. Парабола

1. Продовжуйте нахиляти ліхтарик, зменшуючи кут падіння світла на поверхню.
2. Еліпс збільшуватиметься і якоїсь миті «розірветься», промені світла будуть спрямовані в нескінченність.
3. Отримана фігура є параболою. Формально парабола утворюється, коли площина нахилена так, що стає паралельною одній із твірних конуса (*рис. 20*).

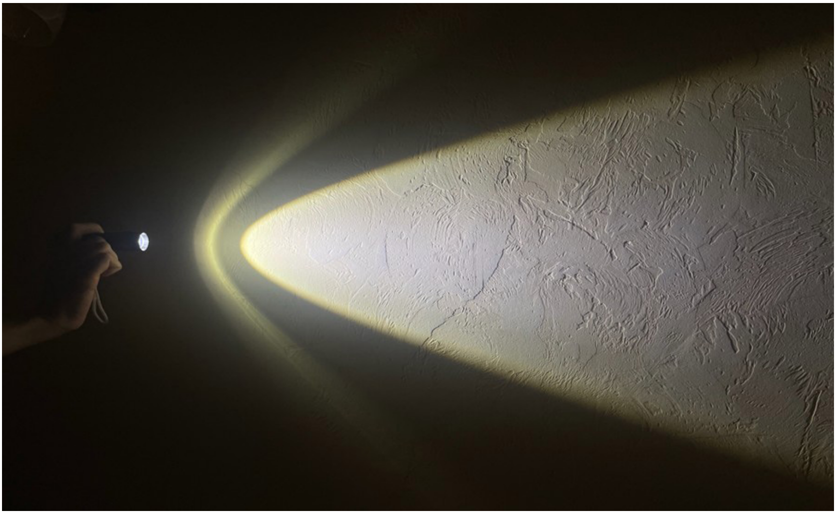


Рис. 20. Світлова пляма від ліхтарика у формі параболи

Парабола — це геометричне місце точок на площині, рівновіддалених від точки, яка називається фокусом, і прямої, яка називається директрисою.

Канонічне рівняння параболи (із фокусом на осі ox):

$$y^2 = 4p\left(x - x_0\right),$$

де p — відстань від вершини параболи до фокуса.

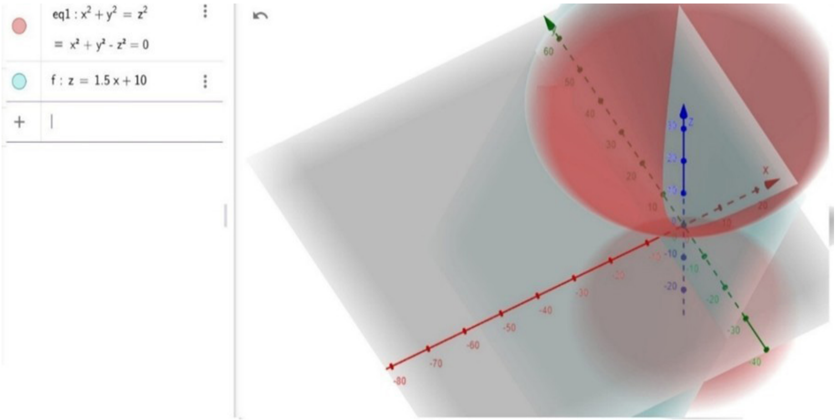


Рис. 21. Побудова перерізу конуса у формі параболи в GeoGebra 3D

Отримуємо параболу як перетин конуса $x^2 + y^2 = z^2$ і площини, наприклад, $z = x + 10$ за допомогою пакета GeoGebra 3D.

Потрібно повторити ті самі кроки, що і для побудови кола й еліпса, але в цьому випадку січну площину задайте як $z = x + 10$.

Отримайте конічний переріз у формі еліпса. Рівняння цього еліпса матимемо, якщо підставимо $z = x + 10$ у рівняння конуса $x^2 + y^2 = z^2$.

Підставимо $z = x + 10$ у рівняння конуса:

$$x^2 + y^2 = (x + 10)^2.$$

Розкриваємо дужки:

$$x^2 + y^2 = x^2 + 20x + 100.$$

Отримаємо рівняння параболи з вершиною в точці $(-5{,}0)$ і рівнянням:

$$y^2 = 20(x + 5).$$

Крок 4. Гіпербола

1. Продовжуємо нахиляти ліхтарик, щоб зменшити кут падіння світла на поверхню.
2. Отримуємо форму, що є гілкою гіперболи.

Гіпербола — це геометричне місце точок на площині, для яких модуль різниці відстаней до двох фіксованих точок, що називаються фокусами, є сталою величиною. Рівняння рівнобічної гіперболи:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

Рис. 22. Світлова пляма від ліхтарика у формі гіперболи

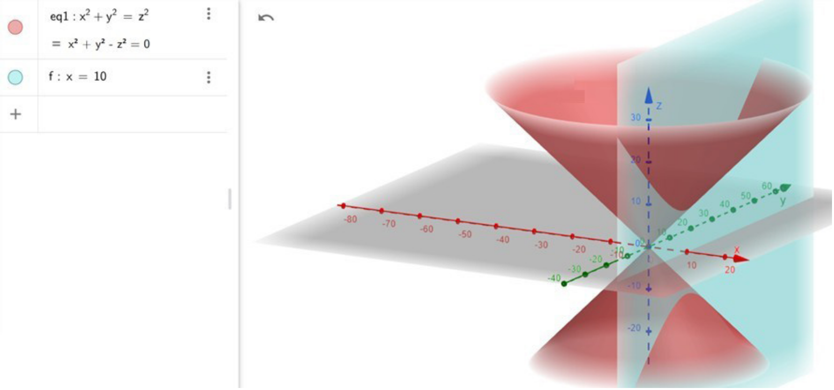


Рис. 23. Побудова перерізу конуса у формі гіперболи в GeoGebra 3D

Отримаємо гіперболу як перетин конуса $x^2 + y^2 = z^2$ і площини, наприклад, $x = 10$ за допомогою пакета GeoGebra 3D (*рис. 23*).

Одержуємо конічний переріз у формі гіперболи. Рівняння цієї гіперболи матимемо, якщо підставимо $x = 10$ у рівняння конуса $x^2 + y^2 = z^2$.

Підставимо $x = 10$ у рівняння конуса:

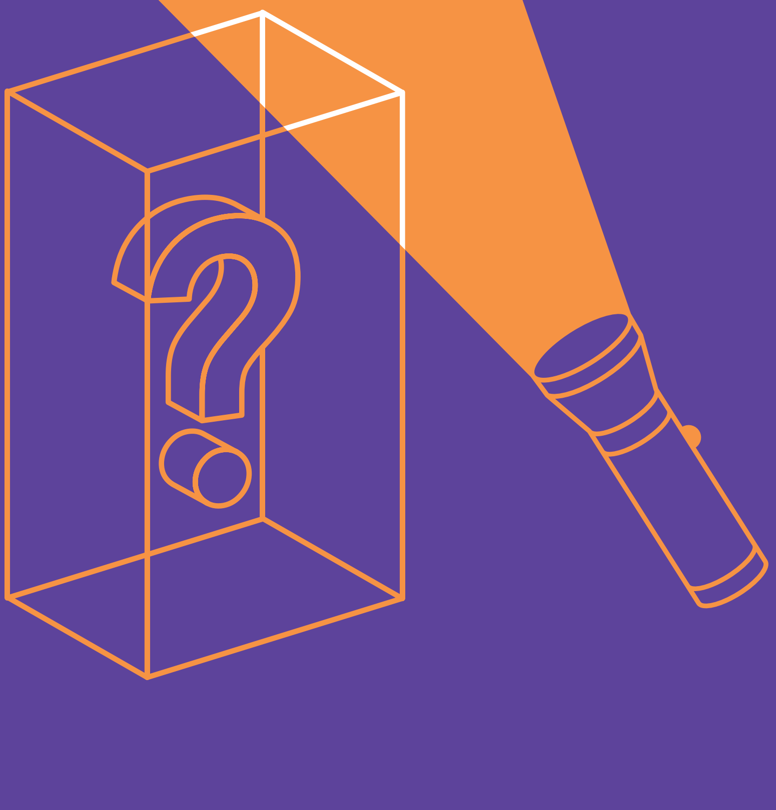
$$10^2 + y^2 = z^2.$$

Отримали рівняння гіперболи:

$$z^2 - y^2 = 10^2.$$

Розділ 3.

ПРИХОВАНІ ФОРМИ



Чи можна побачити невидиме? Якщо спрямувати ліхтарик на предмет, побачимо його тінь — спрощене відображення форми предмета. Ми вже застосовували такий метод для визначення розмірів, форм та інших властивостей. Але чи можна за допомогою світла виявити структуру прихованих об'єктів? Так, завдяки математичним методам аналізу тіней! Учені використовують їх для дослідження невидимого — від вивчення внутрішніх структур людського тіла до аналізу далеких галактик. У цьому розділі будемо досліджувати, як світло проникає крізь матерію, а математичні алгоритми дають змогу побудувати точне зображення того, що не можна бачити неозброєним оком.

Аналізуючи те, як змінюється ця тінь під різними кутами, можна відтворити форму будь-якого предмета, навіть якщо його не бачимо. Так працюють рентгенівські та ультразвукові апарати, а також комп'ютерні томографи в медицині. За допомогою світла, хвиль або частинок отримують дані, які потім обробляються з використанням математичних алгоритмів для побудови точної картини внутрішньої структури об'єкта (*рис. 24*).

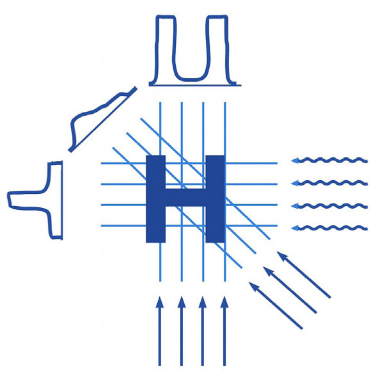


Рис. 24. Схема роботи рентгенівського апарата

3.1. Комп’ютерна томографія

Комп’ютерна томографія (КТ) — це технологія, що дає змогу побачити внутрішню структуру об’єкта з використанням рентгенівського випромінювання.

Як це працює?

1. Рентгенівські промені проходять крізь об’єкт під різними кутами.
2. Датчики вимірюють, скільки світла поглинається різними частинами об’єкта.
3. Отримані дані передаються на комп’ютер, який за допомогою спеціальних математичних алгоритмів створює тривимірну модель.

Аналогічний підхід використовується в інших сферах, наприклад, у астрофізиці — для створення зображень, криміналістиці — для виявлення й аналізу слідів злочинів, мистецтві — для відновлення пошкоджених літературних творів і творів живопису тощо.

3.1.1. Майстерня «Визначення форми прихованих об’єктів за допомогою світла»

Для цієї активності потрібно щонайменше дві особи: один, хто знає, який предмет є невидимий, та інший, хто має вгадати, що то за предмет.

Матеріали та обладнання:

- ліхтарик;
- невелика картонна коробка;
- різні предмети (наприклад, пластикова пляшка, кубик, кулька);
- аркуш білого паперу.

Крок 1. Створення тіні

1. На задній частині коробки зробіть невеличкий отвір для світла.
2. Поставте коробку відкритою частиною від себе, щоб не бачити предмета.
3. Перший, кому відомо, що то за предмет, розміщує його всередині коробки та тримає аркуш паперу на невеликій відстані від відкритої частини коробки.
4. Другий, хто відгадує, що то за предмет, світить ліхтариком крізь отвір і дивиться на отриману тінь на папері.

Крок 2. Зміна положення предмета

1. Перший повертає предмет на невеликий кут.
2. Подивіться, чи змінюється тінь? Як саме? Чи можна за допомогою декількох тіней здогадатися, що за предмет приховано всередині?

Крок 3. Аналіз результатів

Якщо ви змогли визначити форму прихованого предмета, то ви розв'язали задачу, подібну до тих, які виконують медичні томографи та рентгенівські апарати! Вони працюють за тим самим принципом: отримують проєкції об'єкта з різних ракурсів і, використовуючи математичні алгоритми, будують точне зображення внутрішньої структури.

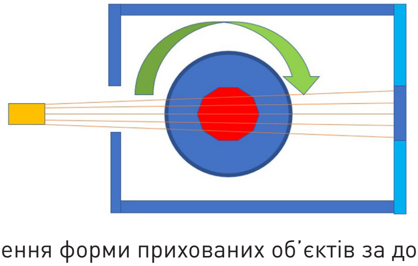


Рис. 25. Визначення форми прихованих об'єктів за допомогою світла

3.2. Математика у медичних дослідженнях. Задача «Судоку-рентген»

Розглянемо цікаву математичну головоломку, що дасть змогу зрозуміти, як аналіз світла допомагає відновлювати предмети. Процес розв'язання нагадує роботу над головоломкою судоку: за наявності лише часткової інформації крок за кроком розв'язують логічне завдання.

Уявіть коробку з дев'ятьма пляшками, розташованими на полі у формі сітки 3 × 3. Пляшки можуть бути порожніми, з молоком або соком. Щоб визначити, пляшка порожня чи з рідиною, можемо пропустити крізь них світло:

- пляшка з молоком поглинає 3 одиниці світла;
- пляшка з соком — 2 одиниці;
- порожня пляшка — 1 одиницю.

Завдання

Знаючи, скільки світла поглинається кожним рядком і стовпцем, визначте вміст пляшок.

3.2.1. Приклад розв'язання задачі

На рис. 26 вказано загальну кількість світла, що поглинається під час його проходження крізь кожен рядок і кожен стовпець. Аби розв'язати цю головоломку, треба розставити пляшки так, щоб сума поглинання світла в кожному рядку й стовпці була такою:

- у першому рядку сума має бути 5, у другому — 6, третьому — 4;
- у першому стовпці — 6, у другому — 3 та третьому — 6.

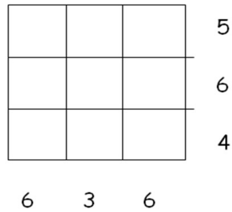


Рис. 26. Умова задачі судоку-рентген

Існують два варіанти комбінацій чисел, що задовольняють цю умову (*рис. 27*).

3	1	1		2	1	2
2	1	3		2	1	3
1	1	2		2	1	1

Рис. 27. Можливі варіанти розв'язання задачі

Ми знаємо, скільки світла поглинається у кожному рядку й стовпці, але цього виявилось недостатньо, щоб точно визначити, які пляшки та де саме розташовані. Однак ці дані можна отримати завдяки вимірюванню світла по діагоналі. Тобто умова не була повною. Припустимо, що в результаті вимірювання світла по діагоналях стало відомо, що сума поглинання світла на одній з діагоналей становить 6, на іншій — 3 (*рис. 28*).

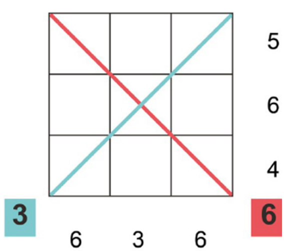


Рис. 28. Додаткова інформація для задачі

Доходимо висновку, що правильним був перший варіант розташування, оскільки саме в ньому сума поглинання світла однієї з діагоналей становить 6, а іншої — 3 (*рис. 28)*.

3	1	1
2	1	3
1	1	2

Рис. 29. Відповідь до задачі

3.2.2. Задачі для самостійного розв’язування

Розв’яжіть наступні задачі за тим самим принципом, що було продемонстровано вище. До кожної задачі є відповідь, проте спробуйте розв’язати їх самостійно.

Задача 3.1

На рис. 30 позначено загальну кількість світла, що поглинається під час проходження крізь кожен рядок, стовпець і діагоналі. Відновіть розташування пляшок.

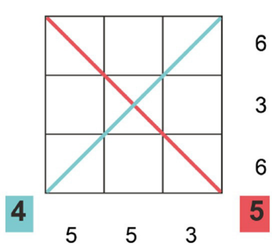


Рис. 30. Умова задачі 3.1

Задача 3.2

На рис. 31 позначено загальну кількість світла, що поглинається під час проходження крізь кожен рядок, стовпець і діагоналі. Відновіть розташування пляшок.

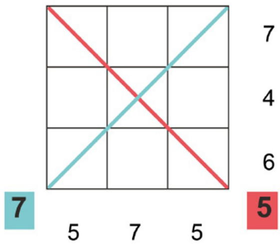


Рис. 31. Умова задачі 3.2

Задача 3.3

На рис. 32 позначено загальну кількість світла, що поглинається під час проходження крізь кожен рядок, стовпець і діагоналі. Відновіть розташування пляшок.

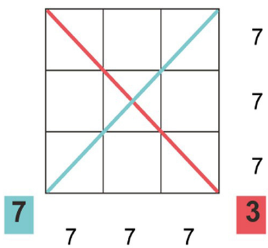


Рис. 32. Умова задачі 3.3

Задача 3.4

На рис. 33 позначено загальну кількість світла, що поглинається під час проходження крізь кожен рядок, стовпець і діагоналі. Відновіть розташування пляшок.

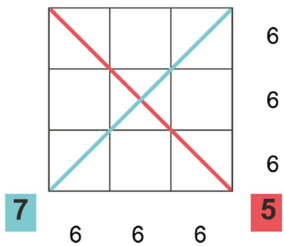


Рис. 33. Умова задачі 3.4

3.2.3. Відповіді до задач для самостійного розв’язування

1.

3	2	1
1	1	1
2	3	1

2.

2	2	3
1	2	1
2	3	1

3.

1	3	3
3	1	3
3	3	1

4.

1	2	3
3	2	1
2	2	2

Висновок

Світло і математика...

Ми з'ясували, як можна вимірювати висоту недосяжних об'єктів за допомогою теореми Фалеса. Відтворили історичний експеримент Ератосфена, який дав змогу обчислити розміри Землі. Виготовили сонячний годинник і зрозуміли, як тінь допомагає нам вимірювати час. Дослідили, як світло створює проєкції платонових тіл і які геометричні фігури утворюються внаслідок конічних перетинів. Врешті-решт, ми зазирнули у світ, недоступний для очей: ознайомилися із математичними методами аналізу тіней, що використовуються у рентгенографії та комп'ютерній томографії.

Подорож завершено, але перспектив для подібних розвідок існує безліч! Це лише початок ваших наступних досліджень!

Що далі? Продовжуйте експериментувати, змінюючи умови освітлення. Вивчайте нові форми тіней, моделюючи складніші задачі.

Запитуйте, шукайте відповіді, перевіряйте гіпотези, бо саме тоді здійснюються нові відкриття.

Тож нехай ваш ліхтарик завжди буде зарядженим, а цікавість — невичерпною!

Список використаних джерел

1. Бабин Д. С. Прості досліди з фізики в домашніх умовах. *Радіоелектронні пристрої від URSYDN*. URL: https://radio-electronics-ur5ydn.jimdofree.com/прості-досліди-з-фізики-в-домашніх-умовах/саморобний-сонячний-годинник/ (дата звернення: 16.05.2025).

2. Геометрія. 7 клас. Елементарні геометричні фігури. *МійКлас*. URL: https://www.miyklas.com.ua/p/geometria/7-klas/elementarni-geometrichni-figuri-ta-yikh-vlastivosti-13616/aksiomi-teoremi-468851/re-05c29655-8ffe-4f34-b27b-3ba0460fe79a (дата звернення:16.05.2025).

3. Геометрія. 7 клас. Точка, пряма, промінь. *Всеукраїнська школа онлайн*. URL: https://lms.e-school.net.ua/courses/course-v1:UIED+Geometry-7th-grade+2020/courseware/b6c1bd82d2c146beb5998bae6e3a7f25/2e6d2bc9d1aa40ff91cae73e1eaace97/1?activate_block_id=block-v1%3AUIED%2BGeometry-7th-grade%2B2020%2Btype%40vertical%2Bblock%409c7afdbb431841df938d4e8795e0b604 (дата звернення: 16.05.2025).

4. Фізика. 9 клас. Світловий промінь і світловий пучок. *Всеукраїнська школа онлайн*. URL: https://lms.e-school.net.ua/courses/course-v1:UIED+Physics-9th-grade+2020/courseware/f315650fde254cb6ad219a7bc975e608/b18b28726c184d8587b-74413979b4c53/1?activate_block_id=block-v1%3AUIED%2BPhysics-9th-grade%2B2020%2Btype%40vertical%2Bblock%40b7fd-407b178e44f28e9819fc1bedefea (дата звернення: 16.05.2025).

5. Budd C., Mitchell C. Saving lives: the mathematics of tomography. *Plus. Bringing mathematics to life.* 2008. June 1. URL: https://plus.maths.org/content/saving-lives-mathematics-tomography (дата звернення: 16.05.2025).

6. Khan Academy. URL: https://uk.khanacademy.org/ (дата звернення: 16.05.2025).

7. Shadow Lightpost Problem. *Math principles in everyday life*. URL: https://www.math-principles.com/2012/11/shadow-lightpost-problem.html (дата звернення: 16.05.2025).

Для нотаток

Для нотаток

Навчальне видання

СВІТЛО, ТІНЬ І МАТЕМАТИКА

Методичні вказівки

Укладачі:
Терлецька *Катерина Валеріївна*
Антошина *Катерина Олегівна*
Сльота *Дар'я Денисівна*
Бровченко *Андрій Ігорович*

Редагування *З. В. Пономаренко*
Верстання *О. А. Жупанська*
Дизайн обкладинки *О. А. Чекановська*

Формат 84×108/16. Папір офс. 80 г/м^2.
Друк цифровий. Ум. друк. арк. 3,48.
Наклад 300 пр.

Видавництво: Національний центр
«Мала академія наук України»,
Кловський узвіз, буд. 8, м. Київ, 01021

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 6999 від 04.12.2019