

М.А.Н.

Завдання

IV етапу Всеукраїнських
учнівських олімпіад
з навчальних предметів

2023/2024 навчальний рік

МАТЕМАТИКА
ФІЗИКА
АСТРОНОМІЯ



Київ — 2024

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ЦЕНТР «МАЛА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ»

Завдання

IV етапу Всеукраїнських
учнівських олімпіад
з навчальних предметів
2023/2024 навчальний рік

МАТЕМАТИКА

ФІЗИКА

АСТРОНОМІЯ

Практикум

Київ
Національний центр
«Мала академія наук України»
2024

Автори:

О. А. Базей, канд. фіз.-мат. наук, В. В. Василенко, С. Й. Вільчинський, д. фіз.-мат. наук, І. М. Гельфгат, С. В. Глубенок, І. М. Дмитрук, д. фіз.-мат. наук, проф., Д. В. Зазубик; О. О. Карлова, д. фіз.-мат. наук, проф., І. О. Кошмак, канд. фіз.-мат. наук, Ю. А. Кулініч, канд. фіз.-мат. наук, В. І. Марсакова, канд. фіз.-мат. наук, доц., Б. Я. Мелех, д. фіз.-мат. наук, Ю. М. Мінаєв, канд. фіз.-мат. наук, доц., С. В. Мохун, канд. техн. наук, доц., Д. А. Номіровський, д. фіз.-мат. наук, А. О. Олійник, д. філос. з природн. наук, О. Ю. Орлянський, канд. фіз.-мат. наук, доц., О. О. Панько, д. фіз.-мат. наук, проф., М. І. Пашко, В. О. Пономаренко, канд. фіз.-мат. наук, Ю. В. Проценко, В. М. Решетник, канд. фіз.-мат. наук, доц., Б. В. Рубльов, д. фіз.-мат. наук, А. О. Сімон, канд. фіз.-мат. наук, О. М. Стельмах, д. фіз.-мат. наук, О. В. Триліс, Н. П. Фортуна, О. Г. Шевчук

Відповідальна за випуск:

А. І. Грітчина, канд. пед. наук

Упорядники:

О. В. Роговець, канд. пед. наук, Д. О. Ужвенко

*Рекомендовано для використання в освітньому процесі
рішенням науково-методичної ради
Національного центру «Мала академія наук України»
(протокол № 3 від 26.06.2024)*

3-13

Завдання IV етапу Всеукраїнських учнівських олімпіад з навчальних предметів. 2023/2024 навчальний рік. Математика, фізика, астрономія : практикум / О. А. Базей, В. В. Василенко, С. Й. Вільчинський та ін. ; відп. за вип. А. І. Грітчина ; упоряд.: О. В. Роговець, Д. О. Ужвенко. – Київ : Національний центр «Мала академія наук України», 2024. – 160 с.

Практикум містить завдання теоретичного і практичного турів фінального етапу Всеукраїнських учнівських олімпіад з математики, фізики й астрономії та їх розв'язання. Збірник укладено для ефективної підготовки до участі в інтелектуальних змаганнях.

Видання призначене для учнів 8–11 класів і педагогічних працівників, які зацікавлені у підготовці учнів до участі в олімпіадному русі, а також усіх, хто прагне розв'язувати завдання підвищеного рівня складності із цих предметів.

УДК 373

© Базей О. А., Василенко В. В.,
Вільчинський С. Й. та ін., 2024

© Національний центр
«Мала академія наук України», 2024

ЗМІСТ

Вступ	4
МАТЕМАТИКА	5
Умови задач	6
8 клас	6
9 клас	9
10 клас	11
11 клас	13
Розв'язання задач	15
8 клас	15
9 клас	20
10 клас	25
11 клас	32
ФІЗИКА	39
Умови задач	40
8 клас	40
9 клас	45
10 клас	51
11 клас	57
Розв'язання задач	63
8 клас	63
9 клас	75
10 клас	85
11 клас	96
АСТРОНОМІЯ	113
Умови задач	114
10 клас	114
11 клас	120
Розв'язання задач	128
10 клас	128
11 клас	140
Бланк для відповідей до другої частини практичного туру IV етапу XI Всеукраїнської учнівської олімпіади з астрономії	151
Відповіді до другої частини практичного туру IV етапу XI Всеукраїнської учнівської олімпіади з астрономії	152
Список літератури	154
Відомості про авторів	157

ВСТУП

Сьогодні основним капіталом і ресурсом є знання, тож освіта виступає важливим фактором соціально-економічного піднесення держави, забезпечення її конкурентоспроможності на світовій арені. У зв'язку із цим особливої актуальності набуває навчання й виховання обдарованої молоді.

Однією із форм позаурочної роботи у закладах освіти є учнівські олімпіади, які допомагають виявити обдарованих учнів, а також стимулюють їх інтерес до поглибленого вивчення предметів, потребу в отриманні нових знань, сприяють інтелектуальному розвитку, розширенню кругозору, реалізації творчих здібностей, активізують навчально-пізнавальну діяльність і допомагають у виборі майбутньої професії.

Наразі важливо допомогти учневі усвідомити ступінь інтересу до предметів, оцінити можливості набуття нових знань.

Матеріали збірника спрямовані на формування в учнів навичок критичного мислення, аналітичних і пізнавальних здібностей, вмінь розв'язувати практичні та дослідницькі завдання.

Практикум підготовлений з метою закріплення теоретичного матеріалу, засвоєння основних правил і принципів розв'язування задач, самоперевірки набутих знань. Видання включає широкий спектр завдань, а також відповіді до завдань теоретичного й експериментального турів, алгоритми й прийоми розв'язування задач.

Сподіваємось, що пропонований збірник завдань сприятиме ефективній підготовці до олімпіад з таких навчальних предметів: математика, фізика, астрономія. Видання адресоване учням, які люблять нестандартні задачі, а також вчителям, методистам та іншим працівникам освіти – усім, хто прагне допомогти у підготовці до інтелектуальних змагань.

Анна Грітчина,
заступниця директора
з методичної роботи НЦ «МАНУ»,
кандидатка педагогічних наук

The background is composed of several geometric elements. The top half is a dark blue field filled with thin, light blue diagonal lines that create a sense of depth and movement. Below this, a solid orange band curves across the middle. At the bottom left, a yellow triangular shape points upwards, partially overlapping the orange band. The word 'МАТЕМАТИКА' is centered in the orange band.

МАТЕМАТИКА

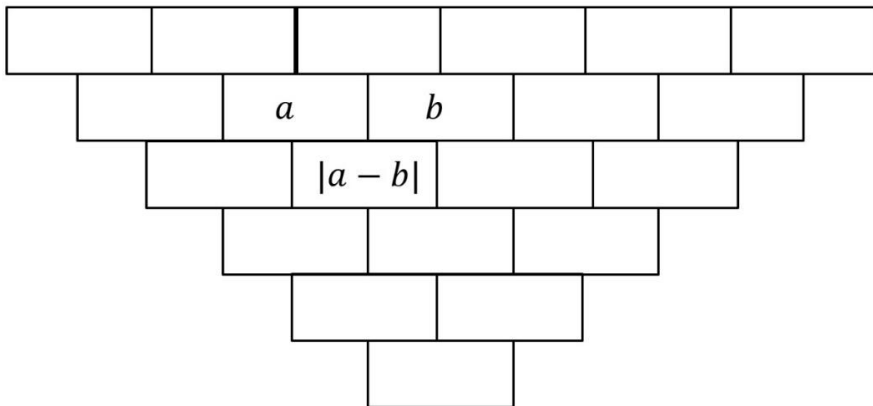
Умови задач

8 клас

8.1. На дошці Олексій написав кілька попарно різних натуральних чисел і порахував усі їх суми. Виявилось, що серед останніх цифр усіх сум є цифри від 0 до 9. Якою могла бути найменша кількість чисел, які написав Олексій?

8.2. Є таблиця, в якій у першому ряду знаходяться n комірок ($n > 2$), у другому – $(n - 1)$ комірки, у третьому – $(n - 2)$ комірки, ... у n -му ряду – лише 1 комірка.

Комірки розташовані так, як це показано на рисунку. У кожній комірці верхнього ряду Петрик у довільному порядку пише одне з чисел $1, 2, \dots, n$, але число можна записати лише один раз. Потім у всі інші розташовані нижче комірки числа вписуються за таким правилом: якщо в ряду над якоюсь коміркою розташовані дві, у яких написані числа a і b , тоді в цій комірці можна написати число $|a - b|$. Яке найбільше число може бути вписане в останню комірку в нижньому ряду?



8.3. У середині гострокутного трикутника ABC вибрали точки X та Y так, що:

$$\angle AXB = \angle CYB = 180^\circ - \angle ABC, \quad \angle ABX = \angle CBY.$$

Доведіть, що точки X та Y знаходяться на однаковій відстані від центра описаного кола ΔABC .

8.4. На дошці записані 20 лінійних функцій, необов'язково різних і відмінних від сталих. Для кожної зі 190 пар цих функцій $\{f, g\}$ Віктор пише на дошці квадратичну функцію $f(x)g(x) - 2$, а Соломія пише на дошці квадратичну функцію $f(x)g(x) - 1$.

Віктор порахував, що саме V його квадратичних функцій мають корінь, а Соломія порахувала, що саме S її квадратичних функцій мають корінь. Яке найбільше значення може мати величина $S - V$?

Зауважимо! Лінійна функція $f(x) = kx + b$ називається *сталого*, якщо $k = 0$.

8.5. Для дійсних чисел a, b, c справджується умова:

$$a^2 + c - bc = b^2 + a - ca = c^2 + b - ab.$$

Чи обов'язково звідси випливає, що $a = b = c$?

8.6. У вписаному чотирикутнику $ABCD$ відомо, що $\angle BAD = 2\angle ADC$ та $CD = 2BC$.

Нехай точка H – проєкція точки C на пряму AD . Доведіть, що $BH \parallel CD$.

8.7. Доведіть, що існує нескінченно багато натуральних чисел, які не можна подати у вигляді $a^{bc} - b^{ad}$, де a, b, c, d – натуральні числа, причому $a, b > 1$.

8.8. На квадраті $6n \times 6n$, де n – натуральне число, Олексій і Соломія грають у гру.

Щоразу, роблячи хід, Олексій ставить на дошку фігуру F , що займає три клітини. Соломія після кожного ходу Олексія розставляє числа 0, 1 і 2 у клітинки, зайняті фігурою, що використав Олексій.

Соломія застосовує кожне з чисел лише один раз.

Якщо після чергового ходу Олексія дві поставлені фігури мають спільну клітинку, то хлопець програє. Якщо квадрат $6n \times 6n$ виявився заповненим числами, то гру припиняють. У такому разі, якщо сума чисел у кожному ряду та кожному стовпчику ділиться на 3, перемагає Соломія, а якщо не ділиться – Олексій. Хто може здобути перемогу в грі, якщо фігура F – це:

- а) прямокутник 1×3 ;
- б) куточок із трьох клітинок?

9 клас

9.1. На дошці Олексій написав кілька попарно різних натуральних чисел і порахував усі їх суми. Виявилось, що серед останніх цифр усіх сум є цифри від 0 до 9. Якою могла бути найменша кількість чисел, які написав Олексій?

9.2. Для якогось натурального числа n розглянемо дошку $n \times n$.

На цю дошку можна покласти будь-які прямокутники, сторони яких збігаються зі сторонами сітки.

Яку найменшу кількість прямокутників можна покласти, щоб усі клітинки дошки були покриті різною кількістю прямокутників (включаючи випадок не покриття жодним із прямокутників)? Прямокутники, які кладуть на дошку $n \times n$, можуть мати однакові розміри.

9.3. По колу розставлено 2024 додатних дійсних числа, сума яких -1 .

Відомо, що будь-які два розташовані поруч числа відрізняються не менше ніж у два рази. Для кожної з 2024 пар таких чисел від більшого відняли менше, усі ці 2024 різниці додали. Яке найменше значення може мати така сума?

9.4. На бічних сторонах AC і AB рівнобедреного трикутника ABC обрано точки E і F відповідно так, що $AE = BF$. Точка D вибрана з того самого боку від прямої EF , що і точка A , так, що трикутники DFE та ABC подібні. Пряма EF перетинає пряму BC у якійсь точці K . Доведіть, що пряма DK дотикається до описаного кола ΔABC .

9.5. Для довільних дійсних чисел a, b, c і d із проміжку $[0; 1]$ знайдіть найбільше можливе значення виразу $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - ab - bc - cd - ad$.

9.6. Дано опуклий шестикутник із паралельними протилежними сторонами. Для кожної пари протилежних сторін проведено паралельну цим сторонам і рівновіддалену від них пряму. Доведіть, що отримані

таким чином три прямі перетинаються в одній точці лише тоді, коли протилежні сторони мають однакову довжину.

9.7. Знайдіть усі складені непарні числа, дільники яких можна розділити попарно, щоб сума чисел у кожній парі була степенем двійки, а кожний дільник належав лише одній такій парі.

9.8. На квадраті $6n \times 6n$, де n – натуральне число, Олексій і Соломія грають у гру.

Щоразу, роблячи хід, Олексій ставить на дошку фігуру F , що займає три клітини. Соломія після кожного ходу Олексія розставляє числа 0, 1 і 2 у клітинки, зайняті фігурою, що використав Олексій.

Соломія застосовує кожне з чисел лише один раз.

Якщо після чергового ходу Олексія дві поставлені фігури мають спільну клітинку, то хлопець програє. Якщо квадрат $6n \times 6n$ виявився заповненим числами, то гру припиняють. У такому разі, якщо сума чисел у кожному ряду та кожному стовпчику ділиться на 3, перемагає Соломія, а якщо не ділиться – Олексій. Хто може здобути перемогу в грі, якщо фігура F – це:

- а) прямокутник 1×3 ;
- б) куточок із трьох клітинок?

10 клас

10.1. Соломія написала на дошці числа $1, 2, 3, \dots, 2024$.

За один раз із дошки вона могла стерти будь-які два числа a та b і записати замість кожного з них їх суму $a + b$.

Зрештою всі числа на дошці стали рівними. Яку найменшу кількість стирань Соломія могла зробити, щоб досягти цього?

10.2. Дано натуральне число n . Знайдіть найменше натуральне число k , для якого існує набір натуральних чисел $a_1, a_2, \dots, a_k$, для яких справджується рівність:

$$2^{a_1} + 2^{a_2} + \dots + 2^{a_k} = 2^n - n + k.$$

10.3. У гострокутному трикутнику ABC провели висоти AN_A , BN_B і CH_C , що перетинаються в точці H , точка M – середина сторони AC . Бісектриса BL трикутника ABC перетинає відрізок H_AH_C у точці K . Пряма, що паралельна HM і проходить через точку L , перетинає пряму BH_B у точці T . Доведіть, що $TK = TL$.

10.4. Знайдіть усі такі функції $f: R \rightarrow R$, щоб для довільних $x, y \in R$ справдилася рівність:

$$f(x)f(yf(x)) + yf(xy) = xf(xy) + y^2f(x).$$

10.5. Для довільних дійсних чисел a, b, c і d із проміжку $[0; 1]$ знайдіть найбільше можливе значення виразу $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - ab - bc - cd - ad$.

10.6. Усередині чотирикутника $ABCD$, у якого рівними є сторони $AB = BC = CD$, обрані точки P та Q так, що $AP = PB = QC = QD$.

Пряма, проведена паралельно діагоналі AC через точку P , перетинає іншу пряму, проведену через точку Q паралельно діагоналі BD , у точці T . Доведіть, що $BT = CT$.

10.7. Знайдіть усі такі многочлени $P(x)$ із цілими коефіцієнтами, що для довільного натурального n число $P(n)$ є натуральним та ділить число $n!$.

10.8. У країні є 2024 міста, деякі з них з'єднані двосторонніми авіарейсами попарно.

Для будь-яких попарно різних міст A, B, C, X, Y, Z існує прямий рейс між деяким містом з A, B, C та деяким містом із X, Y, Z .

Доведіть, що можна спланувати маршрут $T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow \dots \rightarrow T_{2022}$, який проходить через 2022 попарно різні міста.

11 клас

11.1. Знайдіть усі пари натуральних чисел a, b , для яких справджується рівність:

$$(a, b) + 3 \cdot [a, b] = a^3 - b^3.$$

Зазначимо, що (a, b) і $[a, b]$ позначають відповідно НСД і НСК натуральних чисел a, b .

11.2. Нехай дані натуральні числа m і n більші за 1. Василь і Петро грають у гру, у якій по черзі на координатній площині відмічають точки (x, y) , де x, y є такими натуральними числами, для яких виконуються умови $1 \leq x \leq m, 1 \leq y \leq n$.

Програє той, після чийого ходу з'являться дві відмічені точки, відстань між якими не є натуральним числом. Хто буде переможцем, якщо Василь починає гру?

11.3. Визначимо *майже середнє арифметичне* набору чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ як величину $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n+1}$. Є набір $b_1, b_2, \dots, b_{2023}$ додатних необов'язково різних чисел. Для кожної пари індексів (i, j) , де $1 \leq i \leq j \leq 2023$, Олексій написав на дошці майже середнє арифметичне чисел $b_i, b_{i+1}, \dots, b_j$.

Доведіть, що на дошці є принаймні 45 попарно різних чисел.

11.4. Усередині опуклого чотирикутника $ABCD$ вибрали точку X так, що $\angle XBC = \angle XAD$ і $\angle XCB = \angle XDA$. Промені AB, DC перетинаються в точці O , а описані кола трикутників BCO, ADO також перетинаються в точці T . Доведіть, що пряма TX і перпендикуляр, опущений з точки O на пряму BC , перетинаються на описаному колі трикутника AOD .

11.5. Дано 12 необов'язково різних ненульових дійсних чисел.

Знайдіть усі такі натуральні k від 1 до 12, серед яких завжди можна вибрати k чисел, сума яких має такий самий знак, як і добуток, тобто або сума і добуток додатні, або від'ємні.

11.6. Точки A, B, C і D лежать на прямій l у вказаному порядку. Точки P та Q вибрані з одного боку відносно прямої l , а точка R – з іншого так, що:

$$\angle APB = \angle CPD = \angle QBC = \angle QCB = \angle RAD = \angle RDA.$$

Доведіть, що точки P, Q та R лежать на одній прямій.

11.7. На площині позначено 2024 жовті й 2024 сині точки, причому жодні три з позначених точок не лежать на одній прямій. Назвемо пару невід'ємних цілих чисел (a, b) *гарною*, якщо існує півплощина, в якій знаходиться рівно a жовтих і b синіх точок. Точки, що лежать на прямій, яка є межею півплощини, вважаються такими, що півплощині не належать.

Знайдіть найменшу можливу кількість *гарних* пар.

11.8. Знайдіть усі такі многочлени $P(n)$ із цілими коефіцієнтами, для кожного з яких існує натуральне число N , що для довільного натурального $n \geq N$ число $P(n)$ є натуральним і ділить число $n!$.

Розв'язання задач

8 клас

8.1. Відповідь: 6.

Розв'язання. Для 6 чисел достатньо взяти 1, 2, 3, 4, 5 і 9. Доведемо тепер, що для 5 чисел шуканого прикладу не існує.

Нехай написано 5 чисел a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 . Тоді буде всього 10 їх попарних сум, отже, серед них останні цифри від 0 до 9 зустрічаються лише по 1 разу. Якщо додати всі попарні суми $a_1 + a_2, a_1 + a_3, \dots, a_4 + a_5$, отримаємо число $4(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)$. З іншого боку, серед попарних сум має бути рівно 5 непарних чисел (ті, що закінчуються на 1, 3, 5, 7, 9), тож результат цього додавання мав би бути непарним.

8.2. Відповідь: $n - 2$.

Розв'язання. У першому рядку найбільше можливе число n , а найменше – число 1. Тому в другому рядку найбільше число не може перевищувати $n - 1$, а найменше – не менше ніж 1, бо в першому рядку рівних чисел не може бути. Тому в третьому рядку найбільше число не може перевищувати $n - 2$, а найменше може бути 0. Те саме стосується всіх рядків, окрім останнього. В останньому рядку найбільшим може бути вписане число $n - 2$. Покажемо, як Петрик може розставити числа, щоб отримати значення $n - 2$. Для цього в першому рядку він розставляє числа так: $n, 1, 2, 3, \dots, n - 1$.

Тоді в другому рядку будуть написані числа: $n - 1, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n-2}$.

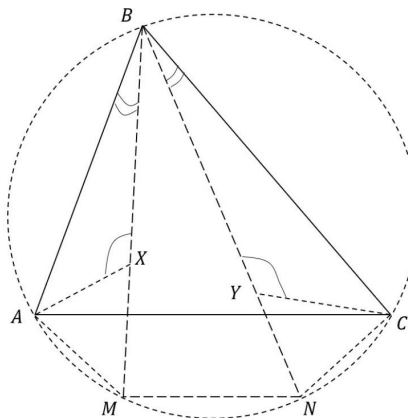
Усі наступні рядки будуть однаковими за формою, у рядку i , де $3 \leq i \leq n$, будуть записані такі числа: $n - 2, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-i}$.

8.3. Розв'язання. Нехай прями BX і BY перетинають описане коло $\triangle ABC$ знову в точках M і N відповідно. Оскільки $\angle ABM = \angle CBY$, дуги AM і CN рівні, а тому $AM = CN$ (див. рис.). Крім того:

$$\angle AXM = 180^\circ - \angle AXB = \angle ABC,$$

$$\angle AMX = \angle AMB = \angle ACB.$$

Отже, кути трикутника $AХМ$ збігаються з кутами $\triangle ABC$. Так само кути $\triangle CYN$ збігаються з кутами $\triangle ABC$. Тоді $\triangle AXM = \triangle CYN$ за трьома кутами й стороною. Оскільки вони побудовані всередині кола на рівних дугах AM і CN описаного кола $\triangle ABC$, треті вершини цих трикутників, тобто точки X та Y , є рівновіддаленими від центра цього кола.



8.4. Відповідь: 100.

Розв'язання. Поділимо лінійні функції на дві групи: $f_1, f_2, \dots, f_k$ із додатним коефіцієнтом при змінній x і $g_1, g_2, \dots, g_{20-k}$ із від'ємним коефіцієнтом при змінній x . Зазначимо, що довільний квадратний тричлен $f_i f_j$, $1 \leq i < j \leq k$ має додатний старший коефіцієнт. Отже, якщо квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, де $a > 0$, має дійсний корінь, то квадратне рівняння $ax^2 + bx + (c - 1) = 0$ також має дійсний корінь. Щоб у квадратичної функції з гілками вгору був дійсний корінь, її вершина повинна мати недодатну ординату. Але вершина квадратичної функції $ax^2 + bx + (c - 1)$ на 1 нижча за вершину функції $ax^2 + bx + c$.

Тому, якщо функція $f_i f_j - 1$ має дійсний корінь, то функція $f_i f_j - 2$ також має дійсний корінь. Те саме стосується і функцій $g_i g_j$, $1 \leq i < j \leq 20 - k$. Таким чином, серед пар функцій $\{f_i, f_j\}$ та $\{g_i, g_j\}$ кількість квадратичних функцій Віктора, що мають дійсний корінь, не менша за кількість квадратичних функцій Соломії, що мають дійсний корінь. Отже, ці пари функцій не збільшують величину $S - V$.

Кількість квадратичних функцій із різних груп дорівнює $k(20 - k)$, а тому:

$$S - V \leq k(20 - k) = 100 - (10 - k)^2 \leq 100.$$

Наведемо тепер приклад 20 лінійних функцій, для яких досягається доведена вище оцінка. Виберемо ці функції, наприклад, такими: $f_1 = f_2 = \dots = f_{10} = x + 2$, $g_1 = g_2 = \dots = g_{10} = -x$. Тоді для лінійних функцій із різних груп маємо, що для довільних $1 \leq i, j \leq 10$ квадратична функція Віктора

$$f_i(x)g_j(x) - 2 = -x(x + 2) - 2 = -(x + 1)^2 - 1$$

не має дійсних коренів, а квадратична функція Соломії

$$f_i(x)g_j(x) - 1 = -x(x + 2) - 1 = -(x + 1)^2$$

має дійсний корінь. Неважко переконатись, що для лінійних функцій з однієї групи квадратична функція Віктора і квадратична функція Соломії матимуть дійсний корінь. Тоді для наведеного прикладу: $S - V = 10 \cdot 10 = 100$ – кількість пар функцій із різних груп. Отже, 100 – найбільше можливе значення.

8.5. Відповідь: так.

Розв'язання. Перепишемо $a^2 + c - bc = b^2 + a - ca$ як $a^2 - b^2 + ac - bc = a - c$, або $(a - b)(a + b + c) = (a - c)$. Так само $(b - c)(a + b + c) = (b - a)$, $(c - a)(a + b + c) = (c - b)$. Якщо $a + b + c = 0$, то відразу $a - c = b - a = c - b = 0$. Якщо якісь два числа рівні, наприклад $b - c = 0$, то $b - a = (b - c)(a + b + c) = 0$, тоді всі числа знову рівні. Припустимо, усі числа попарно різні і їх сума не дорівнює 0.

Тоді перемножимо всі ці рівності й отримаємо:

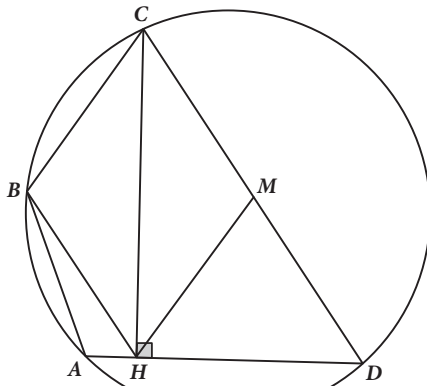
$$(a - b)(b - c)(c - a)(a + b + c)^3 = (a - c)(b - a)(c - b) \Rightarrow \\ \Rightarrow (a + b + c)^3 = -1,$$

тобто $a + b + c = -1$. Тоді $a - b = c - a = b - c$. Але сума цих трьох різниць дорівнює 0, тому всі вони дорівнюють 0. Отже, всі числа рівні.

8.6. Розв'язання. Нехай M – середина сторони CD . Медіана HM прямокутного трикутника CHD рівна половині гіпотенузи, тому $HM = DM = CM = BC$. Крім того, маємо:

$$\angle HMD = 180^\circ - 2\angle ADC = 180^\circ - \angle BAD = \angle BCD,$$

тому $BC \parallel MH$, а чотирикутник $BCMH$ – паралелограм (див. рис.). Отже, $BH \parallel CD$.



8.7. Розв'язання. Доведемо, що жодне число вигляду $8k + 3$ не можна подати у вигляді з умови задачі. Насправді припустимо, що $a^{bc} - b^{ad} = 8k + 3$ для деякого k . Якби числа a, b мали однакову парність, то й число $a^{bc} - b^{ad}$ було б парним, але воно таким не є. Отже, одне з них парне, а інше непарне і не менше за 3. Тоді одне з чисел a^{bc}, b^{ad} ділиться на 8, а інше після ділення на 8 має остачу 1, бо є квадратом непарного числа. Тому їх різниця не може мати остачу 3 після ділення на 8.

8.8. Відповідь: і за умови a , і за умови b переможницею є Соломія.

Розв'язання: а) розглянемо діагональне розфарбування квадрата в 3 кольори, що позначимо числами 0, 1 і 2. Соломія ставитиме в клітинки числа, що відповідають їх кольорам. Вона може робити так, оскільки кожен із прямокутників матиме по одній клітинці кожного кольору. Отже, сума чисел у кожному стовпчику дорівнюватиме $2n(0 + 1 + 2) = 6n$, що ділиться на 3. Так само сума чисел у кожному рядку буде дорівнювати $3n$ і ділитися на 3;

б) кожен куточок із трьох клітинок займає 1 клітинку в одному стовпчику та 2 клітинки в іншому. Соломія ставитиме 0 у ту клітинку, яка є єдиною в стовпчику, а 1 і 2 – в інші 2 клітинки, причому 2 саме в кутову клітинку. Тоді кожного наступного разу Соломія додаватиме число,

що ділиться на 3, до обох стовпчиків. Залишилось довести, що сума чисел у рядках буде також ділитись на 3. Хай якийсь рядок покривають t куточків, що займають 2 клітинки в цьому рядку, і k куточків, що займають там 1 клітинку. Тоді, оскільки у цьому рядку $6n$ клітинок, справджується рівність $6n = 2t + k$. Тепер зазначимо, що у всі куточки, що займають дві клітинки в рядку, Соломія написала числа 0 і 2, а у ті куточки, що займають одну клітинку, – число 1. Тоді сума всіх чисел у рядку дорівнює $2t + k$, тобто $6n$, що ділиться на 3.

Зауважимо! В обох випадках ми можемо допускати, що квадрат повністю заповнений, бо інакше Соломія виграла б раніше.

9 клас

9.1. Відповідь: 6.

Розв'язання. Для 6 чисел достатньо взяти 1, 2, 3, 4, 5 і 9. Доведемо тепер, що для 5 чисел шуканого прикладу не існує.

Нехай написано 5 чисел a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 . Тоді буде всього 10 їх попарних сум, отже, серед них останні цифри від 0 до 9 зустрічаються лише по 1 разу. Якщо додати всі попарні суми $a_1 + a_2, a_1 + a_3, \dots, a_4 + a_5$, отримаємо число $4(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)$. З іншого боку, серед попарних сум має бути рівно 5 непарних чисел (ті, що закінчуються на 1, 3, 5, 7, 9), тож результат цього додавання мав би бути непарним.

9.2. Відповідь: $n^2 - 1$.

Розв'язання. Якщо всі n^2 клітинок покриті різною кількістю прямокутників, то якась клітинка покрита мінімум $n^2 - 1$ прямокутником, а отже, їх не менше ніж $n^2 - 1$.

Позначатимемо клітинку на перетині i -го рядка та j -го стовпця як (i, j) . Наведемо приклад: для кожного $1 \leq i \leq n - 1$ покладемо на дошку прямокутник із лівим верхнім кутом $(1, 1)$ і правим нижнім кутом (i, n) . Також для кожного $1 \leq i \leq n - 1$ покладемо на дошку n прямокутників із лівим верхнім кутом $(1, 1)$ і правим нижнім (n, i) ; усього $n^2 - 1$. Порахуємо, скількома прямокутниками покрита клітинка (i, j) : $(n - i) + n(n - j)$. Очевидно, що такі значення різні для всіх пар $1 \leq i, j \leq n$.

9.3. Відповідь: $\frac{2}{3}$.

Розв'язання. Нехай по колу розставлені числа $\frac{2}{3 \cdot 1012}, \frac{1}{3 \cdot 1012}, \frac{2}{3 \cdot 1012}, \dots, \frac{1}{3 \cdot 1012}$. Тоді для кожної пари чисел відповідна різниця дорівнюватиме $\frac{1}{3 \cdot 1012}$, тож результатом буде число $\frac{2024}{3 \cdot 1012} = \frac{2}{3}$.

Доведемо, що результат завжди буде не меншим за $\frac{2}{3}$. Дійсно, для довільної пари сусідніх чисел a, b (нехай $a \geq b$) маємо $a \geq 2b$, отже:

$$|a - b| = a - b \geq \frac{1}{3}(a + b).$$

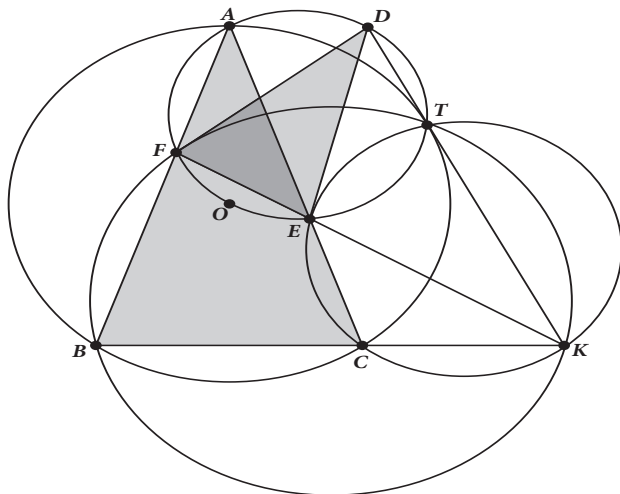
Тоді якщо вписані числа $a_1, a_2, \dots, a_{2024}$, матимемо нерівності:

$$|a_1 - a_2| \geq \frac{1}{3}(a_1 + a_2), |a_2 - a_3| \geq \frac{1}{3}(a_2 + a_3), \dots, |a_{2024} - a_1| \geq \frac{1}{3}(a_{2024} + a_1).$$

Додавши всі ці нерівності, отримаємо результат додавання усіх різниць, який буде не меншим за:

$$\frac{1}{3} \cdot 2(a_1 + a_2 + \dots + a_{2024}) = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

9.4. Розв'язання. Нехай T – точка Мікеля чотирибічника, утвореного прямими AB , BC , CA і EF (див. рис.). Оскільки $\triangle AEO = \triangle BFO$ за двома сторонами й кутом між ними, то $OE = OF$. Обидва серединні перпендикуляри до відрізків AT і EF проходять через центри описаних кіл $\triangle ABC$ і $\triangle AEF$, тобто збігаються. З цього випливає, що $ATEF$ – рівнобічна трапеція. Звідси $\angle EDF = \angle EAF$ і точка D належить описаному колу трапеції. Тоді $\angle KTE = \angle BCA = \angle DFE = 180^\circ - \angle DTE$, отже, точка T лежить на прямій KD . Крім того, $\angle DTC = 180^\circ - \angle KTC = 180^\circ - \angle KEC = 180^\circ - \angle FEA = 180^\circ - \angle TAC$, де остання рівність справджується тому, що $AT \parallel EF$, тобто пряма DT дотикається до описаного кола $\triangle ABC$.



9.5. Відповідь: 2.

Розв'язання. Перепишемо наш вираз таким чином:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - ab - bc - cd - ad &= \\ &= \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-a)^2}{2}. \end{aligned}$$

Кожна з різниць $a-b$ і однотипні різниці за модулем не перевищують 1, оскільки всі змінні належать відрізку $[0; 1]$, отже, весь вираз не перевищує $\frac{1+1+1+1}{2} = 2$. Це значення можна отримати набором $a = c = 1, b = d = 0$.

9.6. Розв'язання. Позначимо шестикутник $ABCDEF$ і розглянемо середини діагоналей AD, BE, CF – точки M, N, K . Якщо ці точки попарно різні, то проведені прямі збігаються з прямими MN, NK, KM і не можуть перетинатись в одній точці (див. рис. 1). Тому можна припустити, що $M = N$. Звідси $ABDE$ – паралелограм, отже, трикутники BCD та EFA мають попарно паралельні сторони й у них $BD = EA$, тому ці трикутники є рівними, звідки й випливає твердження (див. рис. 2).

Якщо довжини протилежних сторін рівні, то $ABDE, BCEF, CDFA$ – паралелограми. Тоді точки M, N, K збігаються і ця точка належить усім трьом прямим з умови.

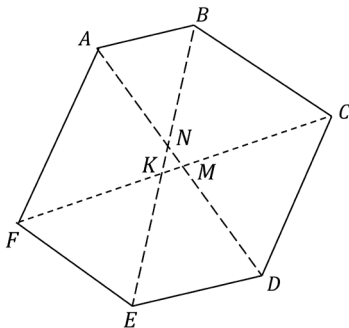


Рис. 1

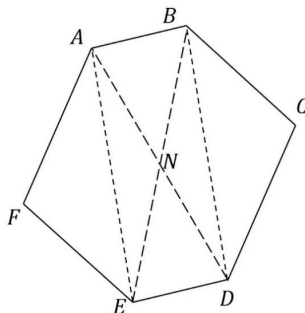


Рис. 2

9.7. Відповідь: 15.

Розв'язання. Відомо, що кількість дільників n парна, отже, n не є точним квадратом.

Розглянемо якесь n з даною в умові властивістю. Якщо якесь непарне просте число p входить у n у степені, більшому за 1, то понад половину дільників n ділиться на p , відповідно сума принаймні в одній із пар ділитиметься на p і не буде степенем двійки. Тому n – це добуток кількох різних простих чисел, причому для кожного простого p у кожній парі є лише один дільник, що ділиться на p . Отже, у кожній парі добуток чисел рівний n .

Нехай $1 < a < n$ – якийсь дільник n . Нехай $b = \frac{n}{a}$. Тоді $ab + 1$ та $a + b$ є степенями двійки. Нехай $a + b = 2^k$, $ab + 1 = 2^l > 2^k$. Тут $k \geq 3$, адже інакше одне з a, b буде рівним 1. Тоді $(a + 1)(b + 1)$, $(a - 1)(b - 1)$ діляться на 2^k . Отже, принаймні одне з чисел $a + 1, a - 1$ ділиться на 2^{k-1} , і принаймні одне з чисел $b + 1, b - 1$ ділиться на 2^{k-1} . Оскільки сума $a + b$ рівна 2^k та $a, b > 1$, єдині розв'язки – це $(2^{k-1} - 1, 2^{k-1} + 1)$ і $(2^{k-1} + 1, 2^{k-1} - 1)$. Зауважимо, що $n = ab$, отже, n – це $a(a + 2)$ або $a(a - 2)$. Оскільки це стосується кожного власного дільника $a > 1$, то подібне можливо, лише якщо n є добутком двох простих чисел, тобто якщо в нас лише 2 можливі a . За такої умови $2^{k-1} - 1, 2^{k-1} + 1$ мають бути простими. Але одне з них має ділитись на 3, тому $2^{k-1} - 1 = 3$, $k = 3$, звідки $n = 15$.

Для $n = 15$ дільники можна розділити на пари $(1, 15), (3, 5)$.

9.8. Відповідь: і за умови a , і за умови b переможницею є Соломія.

Розв'язання: а) розглянемо діагональне розфарбування квадрата в 3 кольори, що позначимо числами 0, 1 і 2. Соломія ставитиме в клітинки числа, що відповідають їх кольорам. Вона може робити так, оскільки кожен із прямокутників матиме по одній клітинці кожного кольору. Отже, сума чисел у кожному стовпчику дорівнюватиме $2n(0 + 1 + 2) = 6n$, що ділиться на 3. Так само сума чисел у кожному рядку буде дорівнювати $3n$ і ділитися на 3;

б) кожен куточок із трьох клітинок займає 1 клітинку в одному стовпчику та 2 клітинки в іншому. Соломія ставитиме 0 у ту клітинку, яка є єдиною в стовпчику, а 1 і 2 – в інші 2 клітинки, причому 2 саме в кутову клітинку. Тоді кожного наступного разу Соломія додаватиме число, що ділиться на 3, до обох стовпчиків. Залишилось довести, що сума чисел

у рядках буде також ділитись на 3. Хай якийсь рядок покривають m куточків, що займають 2 клітинки в цьому рядку, і k куточків, що займають там 1 клітинку. Тоді, оскільки у цьому рядку $6n$ клітинок, справджується рівність $6n = 2m + k$. Тепер зазначимо, що у всі куточки, що займають дві клітинки в рядку, Соломія написала числа 0 і 2, а у ті куточки, що займають одну клітинку, — число 1. Тоді сума всіх чисел у рядку дорівнює $2m + k$, тобто $6n$, що ділиться на 3.

Зауважимо! В обох випадках ми можемо допускати, що квадрат повністю заповнений, бо інакше Соломія виграла б раніше.

10 клас

10.1. Відповідь: 1012.

Розв'язання. Розділимо числа на пари з однаковими сумами: 1 і 2024, 2 і 2023, ..., 1012 і 1013. Тоді, застосувавши таку операцію для кожної із цих пар, Соломія зробить усі числа рівними 2025 за 1012 операцій.

Припустимо, що Соломія зробила не більше ніж 1011 операцій, тоді в них було використано не більше ніж 2022 числа, отже, якісь два числа залишаться не використаними, тобто різними.

10.2. Відповідь: $k = n$.

Розв'язання. Для $k = n$ візьмемо $a_1 = a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 3, \dots, a_n = n - 1$, тоді виконується:

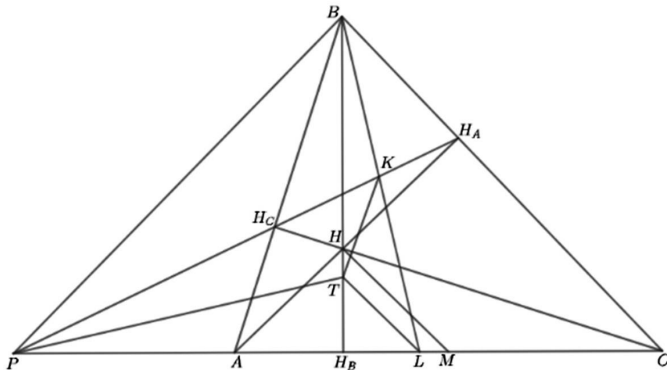
$$2^1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1} = 2^n.$$

Припустимо, що існує $k < n$, що задовольняє умову. Якщо деякі два числа набору a_i і a_j виявились рівними, то їх можна замінити на одне число $a_i + 1$. Для нього буде виконуватись $2^{a_i+1} = 2^{a_i} + 2^{a_i} = 2^{a_i} + 2^{a_j}$. Повторюватимемо такі дії, доки всі числа набору не стануть попарно різними. Позначатимемо їх $a_1 > a_2 > \dots > a_m$, де $m \leq k$. Відзначимо, що права частина менша за 2^n , бо $k < n$, тож $a_1 \leq n - 1$ й тоді $a_i \leq a_1 - (i - 1) \leq n - i$ для всіх i . Оскільки всі числа набору різні та $m \leq k$, маємо:

$$\begin{aligned} n - k &= 2^n - 2^{a_1} - 2^{a_2} - \dots - 2^{a_m} \geq 2^n - 2^{n-1} - 2^{n-2} - \dots - 2^{n-m} = \\ &= 2^{n-m} \geq 2^{n-k}. \end{aligned}$$

Однак для довільного натурального числа t справджується $2^t > t$, що суперечить отриманій нерівності.

10.3. Розв'язання. Нехай прямі $H_A H_C$ і AC перетинаються в точці P (див. рис.). Відповідно $BP \perp MH$ (зокрема тому, що BP – полярна точки H відносно описаного кола $AH_C H_A C$ із центром у точці M). Тоді $BP \perp TL$, а отже, T – ортоцентр $\triangle BPL$, звідки $PT \perp BL$. Оскільки BK, BL – відповідні бісектриси в подібних трикутниках $H_C B H_A$, CBA , то $\angle PKL = \angle PLK$. Тому $PK = PL$. Тоді PT є серединним перпендикуляром до KL , а отже, $TK = TL$.



10.4. Відповідь: $f(x) = 0$, $f(x) = x$ та $f(x) = -x$.

Розв'язання. Рівність, що дана в умові, позначимо як $P(x, y)$.

Позначимо $c = f(1)$ і розглянемо підставлення $P(1, 1)$:

$$cf(c) + c = c + c \Rightarrow c(f(c) - 1) = 0.$$

Якщо $c = f(1) = 0$, то розглянемо підставлення $P(1, y)$ для довільного $y \in R$:

$$0 + yf(y) = f(y) + 0 \Rightarrow f(y)(y - 1) = 0 \Rightarrow f(y) = 0, \forall y \in R.$$

Перевіряємо і переконуємося, що ця функція є розв'язком заданого рівняння.

Надалі вважаємо, що функція f відмінна від тотожного нуля. Тоді $c = f(1) \neq 0$ і $f(c) = 1$.

Розглянемо підставлення $P(c, y)$:

$$f(y) + yf(cy) = cf(cy) + y^2 \Rightarrow f(cy) = \frac{y^2 - f(y)}{y - c}, y \neq c.$$

Крім того, якщо $y = c$, тоді $1 = f(c) = c^2 \Rightarrow c = \pm 1$. Зробимо підставлення $P(1, y)$, де $y \neq c$:

$$\begin{aligned} cf(cy) + yf(y) &= f(y) + y^2c \Rightarrow c \frac{y^2 - f(y)}{y - c} + yf(y) = f(y) + y^2c \Rightarrow \\ &\Rightarrow cy^2 - cf(y) + y^2f(y) - cyf(y) = yf(y) + y^3c - cf(y) - y^2c^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow y(cy + yf(y) - cf(y)) = y(f(y) + y^2c - yc^2) \Rightarrow \\ &\Rightarrow f(y)(y - c - 1)y = cy^2(y - c - 1). \end{aligned}$$

Якщо $y \neq c + 1, c$ або $y \neq 0$, маємо $f(y) = cy$.

Якщо $c = -1$, то $f(y) = -y$ для всіх $y \neq -1$ та $y \neq 0$. Підставлення $P(0, 0)$ нам дає, що:

$$f(0)^2 = 0 \Rightarrow f(0) = 0.$$

Підставлення $P(1, 1)$ дає, що:

$$c(f(c) - 1) = 0 \Rightarrow -(f(-1) - 1) = 0 \Rightarrow f(-1) = 1.$$

Тоді $f(x) = -x$ – це ще один розв'язок рівняння, у чому пересвідчуємося підставленням.

Якщо $c = 1$, то $f(y) = y$ для всіх $y \neq 1$ та $y \neq 2$ або $y \neq 0$. Завдяки підставленню $P(1, 2)$ отримуємо:

$$cf(2c) + 2f(2) = f(2) + 4c \Rightarrow f(2) + 2f(2) = f(2) + 4 \Rightarrow f(2) = 2.$$

Так само і в попередньому випадку підставлення $P(0, 0)$ дає змогу отримати $f(0) = 0$. Також $f(1) = c = 1$.

Отже, $f(x) = x$ – останній розв'язок рівняння, свідченням чого є відповідне підставлення.

10.5. Відповідь: 2.

Розв'язання. Перепишемо наш вираз таким чином:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - ab - bc - cd - ad &= \\ &= \frac{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - d)^2 + (d - a)^2}{2}. \end{aligned}$$

Кожна з різниць $a - b$ і однотипні різниці за модулем не перевищують 1, оскільки всі змінні належать відрітку $[0; 1]$, отже, весь вираз не перевищує $\frac{1+1+1+1}{2} = 2$. Це значення можна отримати набором $a = c = 1, b = d = 0$.

10.6. Розв'язання. Спочатку доведемо таку лему.

Лема. Якщо всередині рівнобедреного трикутника XYZ із вершиною в точці X обрано різні точки M і N так, що трикутники XMY і XNZ будуть рівними рівнобедреними трикутниками з вершинами в точках M і N відповідно, то $MN \parallel YZ$.

Доведення. Нехай прямі XM і XN перетинають сторону YZ у точках K і L відповідно (рис. 1). З умови леми випливає, що $\angle KYX = \angle LZX$, $\angle YXK = \angle ZXL$ та $XY = XZ$, тому $\Delta KYX = \Delta LZX$ за другою ознакою.

Отже, $\triangle K LX$ – рівнобедрений, як і $\triangle MNX$. Тоді з суми кутів трикутника випливає: $\angle XMN = \angle XKL$, що підтверджує шукану паралельність.

Лема доведена.

Позначимо точку S , для якої справджуються такі умови: точка S розташована з того самого боку від прямої BC , що й точка T , а також $BS = CS = BP = AP = CQ = DQ$ (рис. 2). Тоді $\triangle APB = \triangle CQD = \triangle BSC$ за трьома сторонами. З леми для трикутників BCD і ABC випливає, що $QS \parallel BD$ і $SP \parallel AC$. Тобто прями QS і PS збігаються, відповідно, з прямими QT і PT , звідки $T = S$, а тому за побудовою $BT = CT$.

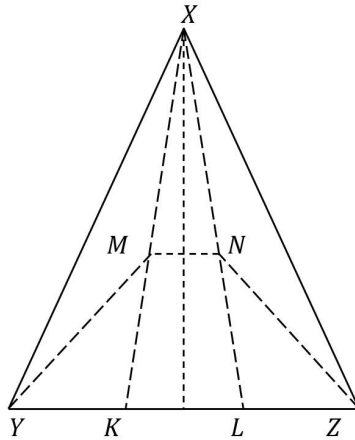


Рис. 1

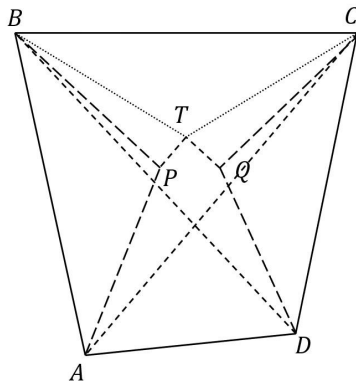


Рис. 2

10.7. Відповідь: $P(x) = 1$ або $P(x) = x$.

Розв'язання. Перепишемо многочлен $P(n)$ у вигляді $n^d Q(n)$, де $Q(n)$ не ділиться на n , тобто $Q(0) \neq 0$. Одразу зауважимо, що $0 \leq d \leq 1$, бо якщо $d \geq 2$, то $2! : 2^d Q(2) : 4$, що неможливо. Тепер нехай для простого p існує натуральне число x , для якого $Q(x)$ ділиться на p . Нехай r є остачею від ділення x на p , тоді оскільки $x \equiv r \pmod{p}$, то $Q(r) \equiv Q(x) \equiv 0 \pmod{p}$. Також $0 \leq r \leq p - 1$. Якщо $r \geq 1$, то $r! : r^d Q(r) : Q(r) : p$, але оскільки $r < p$, то жодне з чисел від 1 до r не може бути поділений на p . Тому зазначена подільність неможлива. Отже, $r = 0$ та $Q(0) : p$. Оскільки $Q(0) \neq 0$, то $p \leq |Q(0)|$. Це означає, що множина простих чисел, що ділять якесь значення многочлена в натуральній точці, є скінченною.

Нехай $\{p_1, \dots, p_l\}$ є цією непорожньою множиною. Тоді з умови $1 : Q(1)$ маємо $Q(1) = 1$. Тепер для довільного натурального k число $Q(1 + p_1 \dots p_l k)$, за попередніми міркуваннями, дорівнює 1 за модулем кожного простого числа із цієї множини, тобто не ділиться на нього. Також це число не можна поділити на інші прості числа, воно є додатним, а тому дорівнює 1. Оскільки многочлен $Q(n)$ для нескінченної кількості натуральних n дорівнює 1, то він є константою, що дорівнює 1, тобто $Q(n) = 1$ для будь-якого натурального n . Тепер залежно від значення d маємо варіанти розв'язку $P(n) = 1$ для $d = 0$ і $P(n) = n$ для $d = 1$.

Можна переконатися, що обидва многочлени задовольняють умову.

10.8. Розв'язання. Розглянемо можливий найдовший маршрут $S: A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_t$, що проходить через t попарно різних міст. Назвемо інші $2024 - t$ міст *зайвими*. Припустимо, що $t < 2022$. Міста A_1 й A_t не з'єднані з жодним із *зайвих* міст, інакше маршрут можна було б подовжити.

Якщо $t = 2$, то кожне місто з'єднане максимум з одним іншим містом. Отже, можемо розділити всі міста на пари, які не матимуть рейсів до міст з інших пар. Тоді якщо вибрати по 1 місту з 6 різних пар, то отримаємо суперечність з умовою. Отже, $t \geq 3$.

Розглянемо трійку міст A_1, A_2, A_t і будь-які зайві три міста X, Y і Z . З попередніх міркувань про міста A_1 й A_t випливає, що з A_2 є рейс в одне із міст X, Y і Z , наприклад у місто X . Тепер, якщо $2024 - t \geq 4$, то можемо

взяти в одну трійку міста A_1, X, A_t , а в іншу трійку – довільні три *зайві* міста, окрім X . Тоді виходить, що знову з міста X є рейс до якогось іншого *зайвого* міста Y . Отже, маємо маршрут $Y \rightarrow X \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow \dots \rightarrow A_t$, що є довшим за маршрут S , а це суперечить припущенню. Таким чином, $2024 - t \leq 3$. Якщо $2024 - t \leq 2$, то маршрут S містить щонайменше 2022 міста – твердження доведене. Отже, $t = 2021$.

Доведемо такі дві леми.

Лема 1. У країні немає замкненого маршруту, що проходить рівно через 2021 місто.

Доведення проведемо методом від супротивного. Розглянемо такі трійки міст: довільні три міста із замкненого маршруту, а також три міста поза таким маршрутом. Між ними є ребро, тому маємо маршрут, що проходить через 2022 міста. Цей маршрут проходить через більшу кількість міст, ніж S , що суперечить припущенню. Одержана суперечність завершує доведення леми.

Лема доведена.

З цієї леми випливає, що міста A_1 й A_{2021} не мають спільного рейсу.

Лема 2. У країні немає замкненого маршруту, що проходить рівно через 2020 міст.

Доведення знову проведемо методом від супротивного. Так само, як і в попередній лемі, знайдемо місто B із замкненого маршруту, що з'єднане рейсом із якимось містом C поза замкненим маршрутом. Нехай B_1 і B_2 – два міста маршруту, що сусідять з B , а D, E та F – три вершини поза маршрутом, відмінні від C . Розглянемо трійки міст – B_1, B_2, C та D, E, F . Якщо є рейс із міста B_1 , наприклад до міста D , то маємо маршрут $D \rightarrow B_1 \rightarrow \dots \rightarrow B \rightarrow C$, довжина якого 2022. Аналогічно для рейсу з міста B_2 . Якщо є рейс із міста C до міста D , то маємо маршрут: $D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow \dots \rightarrow B_1$, довжиною 2022. Таким чином, ми отримали маршрут довжиною 2022, що суперечить припущенню.

Лема доведена.

Усі три міста поза нашим маршрутом S позначимо X, Y і Z : $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_{2021}$. Кожне з міст A_i , $2 \leq i \leq 2020$, з'єднане рейсом хоча б з одним із міст X, Y, Z . Якщо міста A_2 й A_{2020} з'єднані з одним і тим самим містом, то матимемо замкнений маршрут довжиною 2020, що призводить до суперечності з лемою 2. Тому без обмеження загальності можемо

вважати, що місто A_2 з'єднане з містом X , а місто A_{2020} з'єднане з містом Y . Якщо між містами X, Y і Z є принаймні один рейс, то легко вибудується маршрут більшої довжини ніж S , наприклад: $Y \rightarrow X \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_{2021}$. Тепер, вочевидь, між 5 містами A_1, A_{2021}, X, Y, Z немає жодного рейсу. Розглянемо дві трійки міст A_1, A_2, X й A_{2021}, Y, Z , між якими має бути рейс. Якщо це рейс між A_2 й A_{2021} , то матимемо цикл від A_2 до A_{2021} завдовжки 2020 – суперечність з лемою 2. Якщо рейс між A_2 та Y , то A_2 й A_{2020} з'єднані рейсами з одним і тим самим містом, що було розглянуто вище.

Отже, є рейс між A_2 та Z . З аналогічних міркувань для A_{2020}, A_{2021}, Y й A_1, X, Z має бути рейс між A_{2020} і Z , тобто знову міста A_2 й A_{2020} з'єднані рейсом з одним і тим самим містом. Одержана суперечність завершує доведення того, що S – найдовший маршрут. Таким чином, $t = 2022$, і доведення можна вважати завершеним.

11 клас

11.1. Відповідь: $a = n + 1, b = n$ для довільного натурального числа n .

Розв'язання. Позначимо вирази $A = (a, b) + 3 \cdot [a, b]$ та $B = a^3 - b^3$.
Перевіривши, переконуємося, що пари чисел $(a, a - 1)$ для $a \geq 2$ задовольняють умови. Дійсно, $(a, a - 1) = 1$ і $[a, a - 1] = a(a - 1)$, тоді $A = 1 + 3a(a - 1) = 3a^2 - 3a + 1 = a^3 - (a - 1)^3 = B$.

Якщо припустити, що $b \leq a - 2$, то маємо:

$$\begin{aligned} A &= (a, b) + 3 \cdot [a, b] \leq a + 3ab \leq a + 3a(a - 2) = 3a^2 - 5a; \\ B &= a^3 - b^3 \geq a^3 - (a - 2)^3 = 6a^2 - 12a + 8. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що $3a^2 - 5a \geq 6a^2 - 12a + 8$, а це є суперечністю.
Тому інших розв'язків немає.

11.2. Відповідь: якщо числа m і n непарні, то перемагає Василь, а за умови інших значень m і n – Петро.

Розв'язання. Нехай серед чисел m і n є хоча б одне парне число без обмеження загальності m . Доведемо, що Петро може перемогти.

Нехай Василь позначив першу точку A на якійсь горизонтальній лінії. Тоді Петро відмічає сусідню з нею точку B на цій горизонталі. Нехай довільна точка C не лежить на прямій AB . Тоді трикутник ABC є не виродженим. Якщо довжини сторони BC й AC є цілими числами, то за нерівністю трикутника $AC < AB + BC = 1 + BC$, тобто $AC \leq BC$. Так само $BC \leq AC$. Тепер маємо $AC = BC$, отже, C лежить на серединному перпендикулярі відрізка AB . Але він не проходить через жодну точку з цілими координатами. З цього випливає, що вибір точки не на прямій AB призводить до поразки.

Тому в кращому разі гравці мають відмічати точки лише на цій прямій постійно, а оскільки їх рівно m – парна кількість, то Петро позначить точку останнім і переможе.

За умови, якщо m і n є непарними числами, то Василь першим зможе відмітити точку $O\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$, що є центром симетрії множини допустимих точок. Кожного разу після Петра Василь позначає точку A' , симетричну точці A , яку відмітив Петро. Отже, для довільної пари симетричних точок B і B' оскільки AB' має цілу довжину, то й $A'B$ теж

має цілу довжину. Також відрізки $A'O = AO$ й $A'A = 2AO$ мають цілі довжини, тому вибір точки A' не призводить до поразки. Тому Василь безперестанку може позначати точку після Петра, бо оскільки програшна ситуація обов'язково настане, то вона буде такою саме для Петра. Отже, переможцем стане Василь.

Альтернативне розв'язання за умови парного m . Якщо m є парним, то Петро може використати стратегію із симетрією, коли потрібно позначати точки симетрично прямій $x = \frac{m+1}{2}$. Тобто якщо Василь відмітив точку $A(x; y)$, то Петро має позначити точку $A'(m+1-x; y)$. Ця точка ще не буде позначеною, бо якщо вона вже була відмічена Петром, то Василь два рази позначив точку A , а якщо вона була відмічена раніше Василем, то зразу після нього Петро позначив би точку A , а тоді знову ця точка була б відміченою двічі, що неможливо.

Також якщо B – якась інша позначена точка, то відмічена й симетрична їй точка B' , а тоді $A'B = AB'$ – натуральне. Тому Петро завжди може позначити наступну точку після Василя, а отже, не може програти.

11.3. Розв'язання. Припустимо, що на дошці не більше ніж 44 різні числа. Тоді розглянемо числа $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_i}{i+1}$ для кожного $1 \leq i \leq 2023$. Серед них принаймні $\left\lceil \frac{2023}{44} \right\rceil = 46$ однакових. Позначимо індекси i , для яких отримуємо такі однакові числа, як $b_1, b_2, \dots, b_{46}$. Для деякого x маємо:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{b_i} = x(b_i + 1) \text{ для } 1 \leq i \leq 46.$$

Тоді:

$$a_{b_1+1} + a_{b_1+2} + \dots + a_{b_i} = x(b_i + 1) - x(b_1 + 1) = x(b_i - b_1) \text{ для } 2 \leq i \leq 46.$$

Отже, майже середнє арифметичне чисел $a_{b_1+1}, a_{b_1+2}, \dots, a_{b_i}$ дорівнює:

$$x \frac{b_i - b_1}{b_i - b_1 + 1} = x - \frac{1}{b_i - b_1 + 1} \text{ для } 2 \leq i \leq 46.$$

Усі ці числа попарно різні, тому маємо принаймні 45 різних чисел. Отримано суперечність, що завершує доведення.

11.4. Розв'язання. Нехай прямі BC, AD перетинаються в точці K , пряма KT перетинає описане коло трикутника AOD знову в точці N , а Y, Z – проєкції X на AD, BC відповідно (див. рис.).

Оскільки трикутники AXD, BXC подібні, то $\frac{AY}{YD} = \frac{BZ}{ZC}$. Зазначимо, що трикутники TBC, TAD також подібні, а тому точки Z, Y у них відповідні. Тому $\angle TZB = \angle TYA$, а чотирикутник $KTZY$ вписаний. З іншого боку, чотирикутник $KZXY$ вписаний у коло з діаметром KX . Отже, всі 5 точок K, T, Z, Y, X лежать на одному колі, що має діаметр KX , тому $\angle KTX = 90^\circ$.

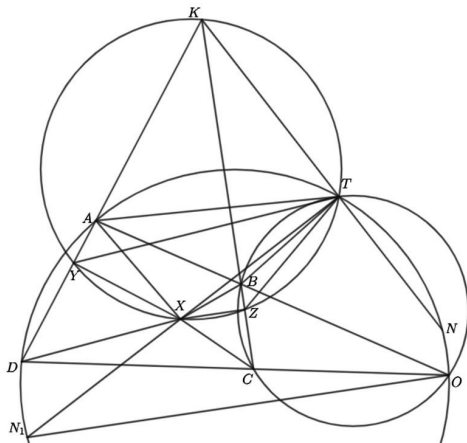
Оскільки $\angle TBC = \angle TAD$, то точки K, T, B, A лежать на одному колі.

Нехай тепер N_1 – точка, діаметрально протилежна N в описаному колі трикутника AOD . Тоді TX проходить через N_1 , бо $\angle NTX = 90^\circ$. Також зазначимо, що

$$\begin{aligned}\angle(ON, KN) &= \angle(ON, TN) = \angle(OA, TA) = \angle(BA, TA) = \angle(BK, KT) = \\ &= \angle(BC, KN),\end{aligned}$$

тому прямі ON, BC є паралельними. Отже, перпендикуляр з O на BC – це перпендикуляр у точці O до відрізка ON , що також проходить через N_1 .

Зауважимо! Точка T є точкою Мікеля для прямих AB, BC, CD і DA .



11.5. Відповідь: $k = 1, 3, 5, 7$ та 9 .

Розв'язання. Для парних k достатньо розглянути набір із 12 чисел -1 . Їх сума дорівнює $-k$, а добуток дорівнює 1 .

Нехай тепер k – непарне.

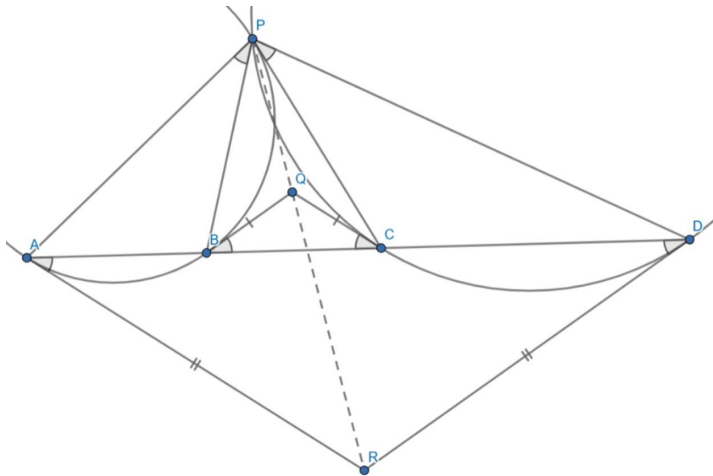
- Для $k = 11$ можна використати набір $\{-6, -6, 1, 1, \dots, 1\}$. У ньому є два можливі набори з 11 чисел. Перший – 10 чисел 1 та одне число -6 , тоді їх добуток дорівнює -6 , а сума дорівнює 4. Другий – 9 чисел 1 і два числа -6 , тоді добуток дорівнює 36, а сума становить -3 .

- Якщо $k \leq 5$, то з принципу Діріхле серед чисел є або k додатних, або k від'ємних, що відповідає умові.

- Для $k = 7$, якщо є принаймні k додатних або k від'ємних чисел, то такі k чисел задовольняють умову. Інакше в наборі є 6 додатних і 6 від'ємних чисел. Виберемо довільні 4 додатні та 2 від'ємні числа. Їх добуток є додатним. Якщо їх сума додатна, то додамо до них додатне число сьомим, якщо їх сума від'ємна, то додамо до них від'ємне число. Отриманий набір відповідає умові.

- Для $k = 9$, якщо є принаймні k додатних чи k від'ємних чисел, такі k чисел відповідають умові. Інакше в наборі є принаймні 4 додатні й 4 від'ємні числа. Виділимо довільні 2 додатні й 2 від'ємні числа. З інших 8 чисел виберемо довільні 7. Якщо їх добуток додатний, то додамо до них додатне число, якщо від'ємний, то від'ємне. Таким чином, маємо набір із 8 чисел, добуток яких – додатний. Як у попередньому випадку, додаємо до них додатне число, якщо їх сума додатна, а якщо їх сума від'ємна, то додаємо до них від'ємне число. Отриманий набір відповідає умові.

11.6. Розв'язання. Оскільки $\angle QBC = \angle APB$, то пряма BQ дотикається до кола ω_1 , що є описаним для $\triangle APB$, а оскільки $\angle QCB = \angle CPD$, то пряма CQ дотикається до кола ω_2 , що є описаним для $\triangle PCD$ (див. рис.). Проте $BQ = QC$, тож точка Q лежить на радикальній осі кіл ω_1 і ω_2 . З іншого боку, через те, що $\angle RAD = \angle APB$ та $\angle RDA = \angle CPD$, ми маємо RA та RD , які також дотикаються до кіл ω_1 і ω_2 відповідно, а оскільки $AR = RD$, то точка R теж лежить на радикальній осі кіл ω_1 та ω_2 . Зрештою точка P , очевидно, належить цій радикальній осі, тож точки P , Q та R колінеарні.



11.7. Відповідь: $3 \cdot 2024 + 1 = 6073$.

Розв'язання. Спочатку наведемо приклад, для якого така оцінка досягається. Розглянемо правильний 4048-кутник, вершини якого розфарбовані по черзі в жовтий і синій кольори. Розглянемо будь-яку півплощину, що містить кілька послідовних вершин цього багатокутника. Отже, якщо вона містить a жовтих і b синіх точок, то $|a - b| \leq 1$, причому зрозуміло, що всі такі пари з $0 \leq a, b \leq 2024$ є *гарними*. Порахуємо кількість таких пар: 2025 пар вигляду (x, x) , $x = \overline{0, 2024}$ та по 2024 пари вигляду $(y, y + 1)$ та $(y + 1, y)$, $y = \overline{0, 2023}$.

Тепер доведемо оцінку. Очевидно, що для кожного $0 \leq s \leq 4048$ існує підплощина, що містить рівно s точок. Таким чином буде утворено 4049 *гарних* пар. Далі достатньо довести, що є принаймні 2024 різні s , для яких існують принаймні дві різні *гарні* пари $(a_1, b_1) \neq (a_2, b_2)$, що відповідають умові $a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = s$.

Розглянемо випуклу оболонку даних 4048 точок. Розглянемо довільну точку A на цій оболонці. Без обмеження загальності вона жовта. Проведемо через точку A пряму l , на якій лежить лише ця точка A . Почнемо повертати пряму l за рухом годинникової стрілки й пронумеруємо всі сині точки як $B_1, B_2, \dots, B_{2024}$ в такому порядку, у якому вони потраплятимуть на пряму l . Розглянемо півплощину, що обмежена

прямою AB_i . Вона містить точки $B_1, \dots, B_{i-1}$, але не містить точки $B_{i+1}, \dots, B_{2024}$. Далі малими коливаннями прямої можна отримати й півплощину, що містить усі ті самі точки, включно з A та не включно з B_i , і півплощину, що містить усі ті самі точки, включно з B_i та не включно з A . Якщо кількість жовтих точок на півплощині, що обмежена прямою AB_i , не рахуючи точку A , дорівнює j , то ми отримуємо такі гарні пари $(i-1, j+1)$ та (i, j) . За побудовою розуміємо, що $i+j$ для різних i попарно різні, тому твердження задачі доведено, адже ми довели, що існує принаймні 2024 різні s , для яких є принаймні дві різні гарні пари $(a_1, b_1) \neq (a_2, b_2)$, де $a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = s$.

11.8. Відповідь: $P(n) = c$ або $P(n) = c(n - a_1) \dots (n - a_k)$, де c та k – довільні натуральні числа, а $a_1 < \dots < a_k$ – довільні цілі невід'ємні числа.

Розв'язання. Перепишемо многочлен $P(n)$ у вигляді $(n - a_1)^{d_1} \dots (n - a_k)^{d_k} Q(n)$, де $Q(n)$ не має цілих коренів та $a_1 < \dots < a_k$, тобто $Q(x) \neq 0$ для будь-якого цілого числа x (якщо $P(n)$ не має цілих коренів, то $P(n) = Q(n)$). Тоді розв'яжемо задачу в три етапи.

1. Многочлен $Q(n)$ є константою.

Нехай для простого p існує натуральне число $x \geq N$, для якого $Q(x)$ ділиться на p . Нехай r є остачею від ділення x на p , тоді оскільки $x \equiv r \pmod{p}$, то $Q(r) \equiv Q(x) \equiv 0 \pmod{p}$. Також $0 \leq r \leq p-1$. Якщо $r \geq N$, то $r! : P(r) : Q(r) : p$, але оскільки $r < p$, то жодне з чисел від 1 до r не може бути поділений на p . Тому наведена подільність неможлива. Це означає, що $0 \leq r \leq N-1$. Оскільки $Q(r) \neq 0$, то $p \leq |Q(r)|$, а отже, $p \leq \max\{|Q(0)|, \dots, |Q(N-1)|\}$. Це означає, що таких простих чисел скінченна кількість (можливо, їх взагалі немає). Нехай $\{p_1, \dots, p_l\}$ є множиною цих чисел і $Q(N) = p_1^{b_1} \dots p_l^{b_l}$ є розкладом на прості множники. Розглянемо числа вигляду $Q(N + np_1^{b_1+1} \dots p_l^{b_l+1})$, де n є натуральним числом (для нульової кількості простих чисел покладемо $l = 1$, $p_1 = 2$ та $b_1 = 0$). Тоді відповідно до попередніх міркувань $Q(N + np_1^{b_1+1} \dots p_l^{b_l+1}) \equiv Q(N) \pmod{p_i^{b_i+1}}$ для кожного i від 1 до l . Це означає, що такі числа можна поділити на $p_i^{b_i}$, але не на $p_i^{b_i+1}$. Також оскільки такі числа додатні та не можуть бути поділені на інші прості числа, то $Q(N + np_1^{b_1+1} \dots p_l^{b_l+1}) = p_1^{b_1} \dots p_l^{b_l}$, тоді для якогось числа

многочлен для нескінченної кількості аргументів дорівнює цьому числу, а це означає, що сам многочлен є константою. Далі розглянемо випадок, коли $P(n)$ має цілі корені.

2. Усі корені $P(n)$ є невід'ємними.

Припустимо, що $a_1 < 0$, тоді підставимо $n = p + a_1$, де p є достатньо великим простим числом, таким, що $p \geq N - a_1$, тобто $n \geq N$. Тоді $n! : P(n) : n - a_1 = p$, але $n < p$, і, як і на першому етапі, маємо суперечність. Отже, $a_k > \dots > a_1 \geq 0$, тому всі корені є невід'ємними.

3. $P(n)$ не має кратних коренів.

Припустимо, що якийсь корінь a_m має кратність хоча б 2. Тоді підставимо $n = p + a_m$, де p є достатньо великим простим числом: $p \geq N + a_m + 1 \geq a_m + 1$, тоді $n \geq N + 1 + 2a_m > N$, а тому $n! : P(n) : (n - a_m)^2 = p^2$, але $n = p + a_m \leq 2p - 1 < 2p$, тому серед чисел від 1 до n лише одне можна поділити на p , причому воно дорівнює p . Тому $n!$ можна поділити на p , але не на p^2 – суперечність.

Таким чином, залишається довести, що многочлени $P(n) = c$ та $P(n) = c(n - a_1) \dots (n - a_k)$, де c і k є натуральними числами та $a_1 < \dots < a_k$ є цілими невід'ємними, відповідають умові. Для першого типу нехай $N = c$, для другого – $N = a_k + c + 1$. Тоді можна переконатися, що для довільного $n \geq N$ множники многочленів є додатними, попарно різними й не перевищують n , а тому їх добуток, а отже, значення многочлена, є додатним та ділить $n!$.

The background is composed of three main color regions: a dark blue upper section with fine, light blue diagonal lines; a medium orange section below it; and a yellow-orange section at the bottom left. The word 'ФІЗИКА' is centered in the orange section.

ФІЗИКА

Умови задач

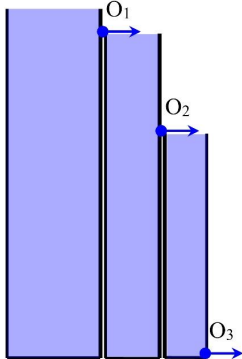
8 клас

Теоретичний тур

8.1. Водоспад

Три посудини, висоти яких дорівнюють 56 см, 52 см і 36 см, а площі відповідно рівні 36 см^2 , 9 см^2 і 4 см^2 , розташовані на столі так, як показано на рисунку. У всі посудини доверху налили воду, а потім у стінках посудин відкрили однакові маленькі отвори O_1 , O_2 і O_3 . При цьому струмінь води з першої посудини переливається в другу, а струмінь води з другої посудини переливається у третю. З отвору O_3 вода витікає на підлогу. Знайдіть рівні води у другій і третій посудинах, коли у першій посудині рівень зменшиться на 1 см. Внутрішнім тертям у воді знехтуйте.

Вказівка. Відомо, що з маленького отвору, який знаходиться на глибині h у відкритій посудині, рідина за відсутності тертя витікає зі швидкістю $v = \sqrt{2gh}$, де $g = 10 \text{ Н/кг}$.



8.2. Лабораторна комашка

Невеличка комаха Мерзлячка повадилася відпочивати у фізичній лабораторії, гріючись на теплому від електричного струму реостаті (див. рис. 1). Електрична напруга у колі $U_0 = 10 \text{ В}$, опір $r = 10 \text{ Ом}$.

За тривалий час відпочинку комаха, штовхаючи лапками ковзний контакт, знайшла і зафіксувала таке його розташування, за якого та частина реостата, на якій вона відпочивала, видавала максимальну теплову потужність серед усіх інших можливих положень ковзного контакту.

1. Розрахуйте опір частини реостата, за якого на цій частині виділятиметься максимальна теплова потужність. Знайдіть цю максимальну потужність.

2. Одного разу, повернувшись в лабораторію, комаха побачила поряд із своєю «підкою» лампочку! Її під'єднали замість резистора, який був паралельним до реостата, а контакт реостата був на тому самому місці, де комаха його зафіксувала. Тепер комасі стало дуже спекотно від тепла двох «печей»: реостата й лампи. Розрахуйте сумарну теплову потужність від них. Лампочка не є лінійним елементом, її вольтамперна характеристика показана на рис. 2.

Примітка. Потужність електричного струму: $P = U \cdot I$.

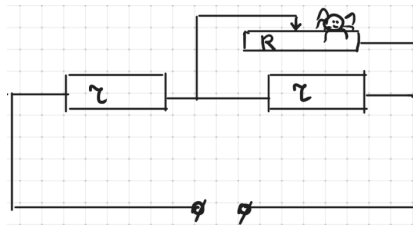


Рис. 1

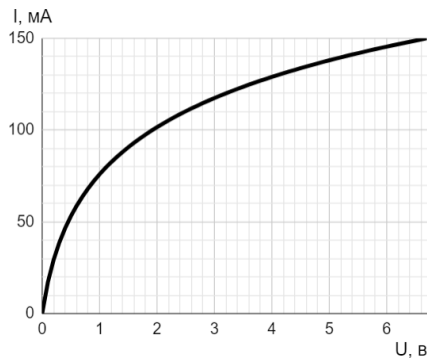


Рис. 2

8.3. Намішав води з водою

За температури $0,01\text{ }^{\circ}\text{C}$ та низького тиску у 612 Па вода може одночасно існувати в усіх трьох агрегатних станах – лід, рідина і пара. Такі умови називають потрійною точкою води. Нехай вам вдалось у калориметрі отримати однакову масову частку води у цих трьох станах: маса льоду $m_{\text{л}} = \frac{1}{3}m$, маса рідини $m_{\text{р}} = \frac{1}{3}m$ та маса пари $m_{\text{п}} = \frac{1}{3}m$, де m – загальна маса води.

Така ситуація буде нестійкою, і за невеликої зміни об'єму вода перейде у два агрегатні стани. Знайдіть, які будуть масові частки різних агрегатних станів, якщо, не змінюючи тиск і температуру, вода повністю перейде:

1) в рідину і пару; 2) в лід і рідину; 3) в лід і пару.

Зважайте, що біля потрійної точки питома теплота плавлення льоду

$$\lambda = 300 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}}, \text{ а питома теплота пароутворення } - L = 2,5 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}}.$$

8.4. На варті галактики

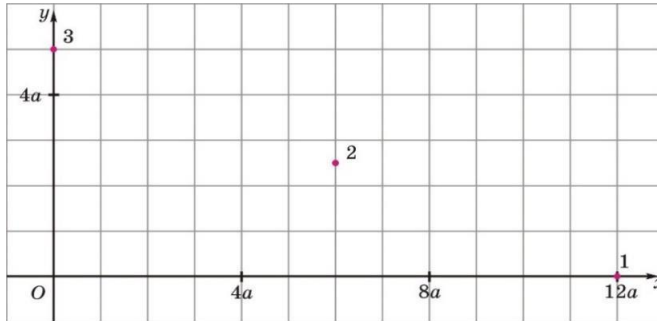
Космічний патруль відстежує рух зорельота галактичних прибульців, спостерігаючи яскраве світло від ілюмінаторів (молодший прибулець дуже розсіяний і періодично забуває про світломаскування). Зореліт рухається відносно патруля прямолінійно та рівномірно з великою швидкістю. Штурман патруля за традицією наносить видиме положення зорельота на стародавній планшет (див. рис.). Початок координат на планшеті відповідає положенню патруля, а точки 1, 2, 3 – видимому положенню зорельота в моменти часу відповідно: $t_1 = 08\text{ год } 10\text{ хв } 00\text{ с}$, невідомий момент t_2 і $t_3 = 08\text{ год } 19\text{ хв } 00\text{ с}$. Відомо, що світло в космосі поширюється зі швидкістю $300\,000\text{ км/с}$.

Виконайте такі завдання:

1) визначте швидкість руху зорельота відносно патруля, якщо бічна сторона кожного квадрата на планшеті відповідає відстані $a = 18\text{ млн км}$;

2) напишіть формулу залежності $r(t)$, де r – модуль відстані між зорельотом і патрулем, t – час за годинником патруля;

3) визначте момент t_2 нанесення на планшет точки 2.



Експериментальний тур

8.1. Теплове розширення

Обладнання: пробірка, пробка з пластиковою трубкою, мірний циліндр, мензурка, термометр, лінійка, дегазована вода у стакані.

Групове обладнання: гаряча вода, серветки.

Завдання

1. Використовуючи надане обладнання, запропонуйте та зберіть установку, за допомогою якої можна було б встановити залежність між об'ємом води та її температурою.

2. Визначте температурний коефіцієнт об'ємного розширення води в температурних межах, близьких до 60 °С.

3. Назвіть фактори, які суттєво вплинули на результати вимірювань. Опишіть, як можна покращити точність результатів.

Примітка. Для отримання гарячої води для експерименту зверніться до вчителя.

Застереження щодо техніки безпеки. Вчитель надає гарячу воду з температурою близько 80 °С. Сплануйте експеримент так, щоб не було потреби вмочувати у гарячу воду пальці. Стежте за тим, щоб посудина з гарячою водою не перекинулася.

Теоретичні відомості. Зв'язок між зміною об'єму рідини та зміною її температури: $\Delta V = V \cdot \beta \cdot \Delta t$, де V – об'єм рідини за певної температури, ΔV – зміна об'єму при зміні температури на Δt , β – температурний коефіцієнт об'ємного розширення.

8.2. Густина ізоляції

Обладнання: відрізок дроту зі знятим шматком ізоляції, дерев'яна лінійка, шприц на 5 мл, нитка.

Групове обладнання: вода (густина води – 1000 кг/м^3).

Завдання

1. Визначте радіуси алюмінієвого осердя та дроту з ізоляцією.
 2. Обчисліть масу дроту з ізоляцією (густина алюмінію – 2700 кг/м^3).
 3. Знайдіть густину матеріалу ізоляції.
 4. Назвіть фактори, які суттєво вплинули на результати вимірювань.
- Опишіть дії, які ви виконали, щоб покращити точність результатів.

9 клас

Теоретичний тур

9.1. Володар лінз

Юний дослідник захотів отримати на екрані збільшене у 2,5 раза зображення світлодіода в робочому стані. В інтернеті він знайшов таку пропозицію: «Настільна лупа 2,5 X збільшення». Перед замовленням товару, знаючи, що відстань найкращого зору людини дорівнює 25 см, він почав розмірковувати над такими запитаннями:

- 1) яка відстань має бути між світлодіодом і лупою?
 - 2) яка відстань має бути між світлодіодом і екраном?
 - 3) якщо мені знадобиться збільшення у 5 разів, то чи обов'язково використовувати лупу з написом «Настільна лупа 5 X збільшення», чи можна буде скористатися лупою з першої пропозиції; якщо можна, то якою буде відстань між світлодіодом і екраном у цьому випадку?
 - 4) якими будуть оптичні сили луп цих двох пропозицій?
- Обґрунтуйте свої відповіді на ці запитання.

9.2. Космічний туризм

У 2024 р. ще одна компанія пропонує скористатися послугами космічного туризму, але тепер вже не на космічному кораблі, а на повітряній кулі, наповненій легким газом. Куля виготовлена з нерозтяжної плівки. На рис. 1, який можна знайти на сайті компанії, бачимо залежність висоти кулі від часу. Куля підіймається на 100 000 футів (1 фут = 30,48 см). На рис. 2 зображена залежність температури стандартної атмосфери від висоти над поверхнею Землі. (Стандартна атмосфера – це модель атмосфери, прийнята Міжнародною організацією зі стандартизації. Тиск і температура на рівні моря вважаються рівними 101 кПа і 15 °C відповідно.) На осі ординат відкладена висота в кілометрах, на осі абсцис – температура в кельвінах.

Розгляньте уважно рисунки і дайте відповіді на запитання (за потреби можна користуватися лінійкою).

1. Чому куля змінює свою форму з висотою?
2. На скільки градусів зменшується температура повітря з кожним кілометром перші 11 км підйому? Запишіть рівняння залежності температури від висоти на цій ділянці.

3. Як бачимо з рис. 2, температура атмосфери зі зміною висоти то зменшується, то збільшується. Чи є ділянки підйому, на яких збільшується й тиск? Відповідь обґрунтуйте.

4. Вважаючи графік залежності висоти від часу, що заданий ланцюжком точок на рис. 1, точним, визначте, скільки часу термометр, встановлений на кулі, показуватиме найнижчу температуру довколишнього повітря. Чому вона дорівнює?

5. На скільки знесе кулю вітром за час усієї подорожі, якщо вважати, що швидкість вітру лінійно збільшується від 0 км/год біля поверхні до 20 км/год на половині висоти підйому, після чого лінійно зменшується від 20 км/год до 0 км/год на максимальній висоті? Горизонтальна швидкість кулі весь час дорівнює швидкості вітру, а вітер постійно дме в одному напрямку.

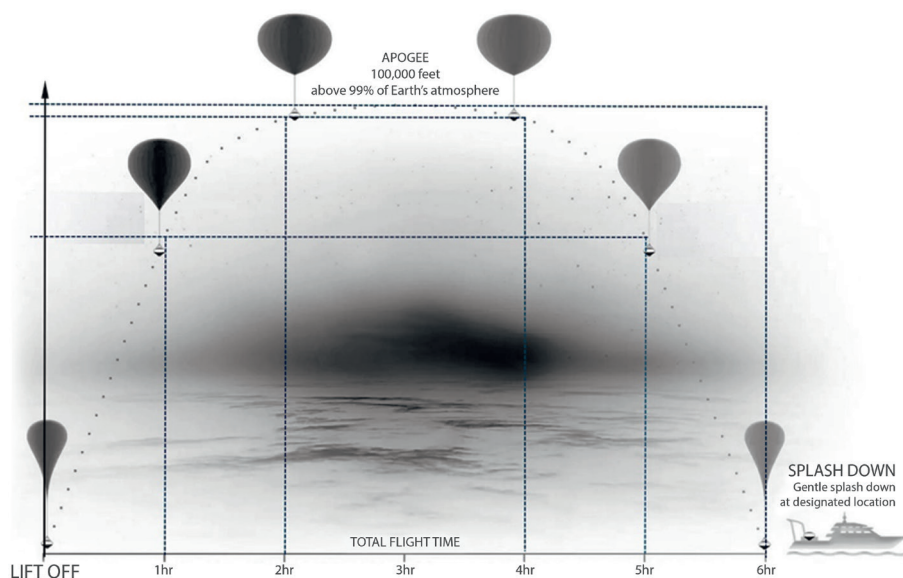


Рис. 1

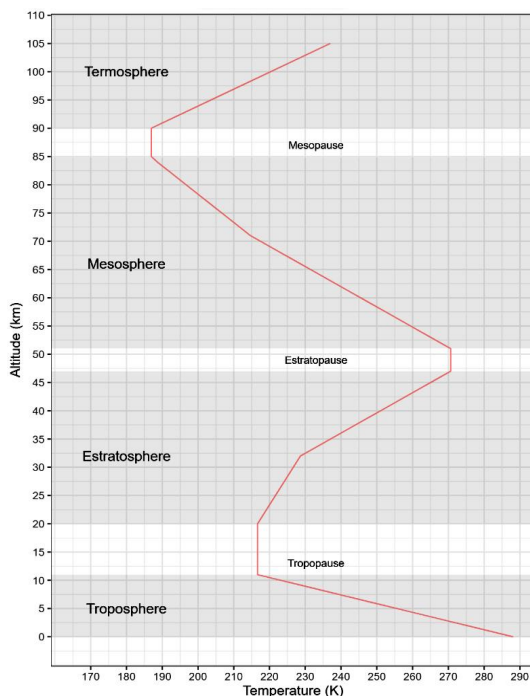


Рис. 2

9.3. Навички швидкого охолодження

На столі стоїть закрита кришкою циліндрична посудина, *частково* наповнена гарячою кавою. Циліндрична стінка посудини дуже тонка та має низьку теплопровідність, тому тепло крізь стінку поширюється перпендикулярно до неї. Теплообміном через дно та кришку можна знехтувати.

Ви можете охолодити каву за 5 хв двома способами: а) зачекати протягом 5 хв, а потім долити доверху молока кімнатної температури; б) відразу долити доверху молока кімнатної температури, а потім зачекати 5 хв. Вважайте, що всі фізичні характеристики кави й молока однакові.

1. У якому випадку температура кави буде меншою? Вважайте, що потужність теплових втрат через стінку прямо пропорційна різниці температур з обох боків від неї та площі поверхні, через яку відбуваються втрати.

2. Як зміниться відповідь, якщо температура долитого молока на кілька градусів відрізняється від кімнатної?

Обґрунтуйте свої відповіді розрахунками.

9.4. Електричний глобус

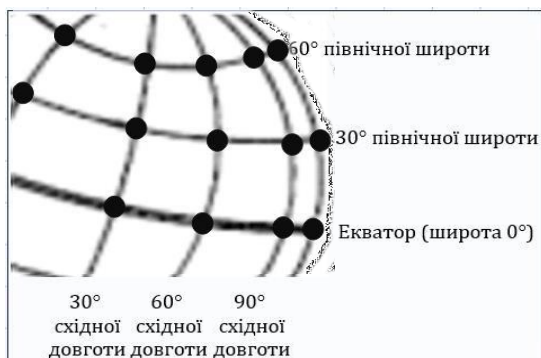
Учень вирішив «електрифікувати» великий глобус з діелектричного матеріалу. Для цього він розташував електричні дроти вздовж сітки меридіанів і паралелей через кожні 30° широти та 30° довготи (на рисунку показаний фрагмент дротяної сітки на глобусі). У всіх місцях перетину дроти припаяні один до одного. Товщину дротів дібрано так, що опір усіх відрізків між сусідніми вузлами кола становить: $r = 10$ Ом. Джерело струму приєднано до полюсів на глобусі. Коли вже все було готове, учень побачив, що він припустився помилки: замість одного з відрізків дроту поставив інший, з опором $3r$. Пригадати, де саме цей відрізок, або відрізнути його за зовнішнім виглядом не вдалося.

Дайте відповіді на запитання:

1) яким мав бути повний опір кола, виготовленого за початковим задумом?

2) на скільки відсотків міг змінитися опір кола через допущену помилку; чи міг він, наприклад, збільшитися на 0,5 %?

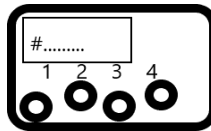
Підказка для знавців географії. Широта змінюється від 0° на екваторі до 90° північної або південної широти на полюсах; довгота — від 0° до 180° східної або західної довготи.



Експериментальний тур

9.1. Чорна скринька

У чорній скриньці з чотирма виводами розміщено 5 резисторів, 4 з яких з'єднані «зіркою» (мають спільну точку всередині скриньки). Їхні вільні кінці приєднані до виводів, а п'ятий резистор з'єднує два виводи. Відомо, що два з чотирьох резисторів «зірки» мають однаковий опір.



Обладнання: мультиметр з дротоми, чорна скринька з 4 виводами (нумерація виводів – 1, 2, 3, 4 – зліва направо, коли скринька повернута так, що її номер – зверху).

Завдання

1. Намалюйте схему з'єднання резисторів з обов'язковим позначенням номерів виводів; відмітьте однакові резистори. Обґрунтуйте вибір схеми.

2. Розрахуйте опір всіх резисторів.

Примітка. Мультиметр DT-9208A – це багатофункціональний електровимірювальний прилад, за допомогою якого можна вимірювати силу струму, напругу (як постійні, так і змінні), опір, ємність, частоту. Потрібний тип вимірювання задається обертовим перемикачем у центрі передньої панелі. Мультиметр вмикається і вимикається жовтою клавішею ON / OFF у лівому верхньому кутку. Один щуп підключають до клеми COM – спільний, мінус, а другий до клеми, позначеної:

- $V \Omega Hz$ – для вимірювання напруги, опору чи частоти;
- $mA, 20A$ – для вимірювання сили струму залежно від діапазону вимірювання.

У цій задачі радимо користуватися мультиметром у режимі омметра.

Якщо вимірювана величина перевищує межі вибраного діапазону вимірювання, то на екрані з'являється OL. Це відбувається, наприклад, у випадку, коли мультиметр перевели в режим вимірювання опору («зелені» положення перемикача в лівому верхньому секторі позначені

символом « Ω »), а вимірюваний опір не під'єднали, або коли величина опору перевищує вибраний діапазон. У такому разі обертом центрального гвинта встановлюємо необхідний діапазон вимірювання.

У разі невикористання мультиметра вимикайте його за допомогою жовтої кнопки.

9.2. Маса лінійки

Обладнання: лінійка, брусок пластиліну невідомої густини, посудина з водою, штатив.

Завдання

1. Визначте, у скільки разів відрізняються маси лінійки та бруска пластиліну.

2. Визначте масу лінійки.

3. Опишіть дії, які ви виконали, щоб покращити точність результатів. Назвіть фактори, які суттєво вплинули на похибки вимірювань.

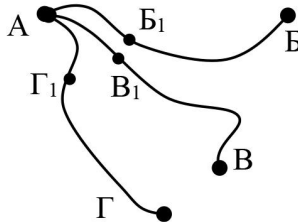
Примітка. Працюючи з пластиліном, не забрудніть парту – використовуйте додаткові аркуші паперу. Густина води становить 1 г/см^3 .

10 клас

Теоретичний тур

10.1. Дротові відносини

Три однакові дроти з опором R кожний з'єднали кінцями в точці А (див. рис.). На кожному з дротів відмітили точки B_1 , V_1 та Γ_1 , що лежать на третині довжини від А. Точку B_1 приєднали до В, точку V_1 до Г, а Γ_1 – до Б. Отриману схему двома точками з набору А, Б, В, Г підключають до джерела напруги. У скільки разів відрізняються максимальна і мінімальна потужності, які може споживати ця схема, залежно від обраних двох точок?



10.2. Похилий маятник

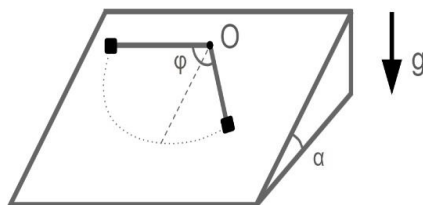
1. Виконуючи лабораторну роботу з визначення коефіцієнтів тертя між поверхнею та невеликим тілом методом похилої площини, учень помітив, що тіло починає самостійно рухатися вниз по площині за кута нахилу $\alpha_0 = 21,8^\circ$. І після цього тіло зісковзує рівноприскорено за 2,5 с з площини довжиною 2,0 м.

Нехтуючи опором повітря та вважаючи $g = 9,81 \text{ м/с}^2$, потрібно знайти коефіцієнти тертя спокою і ковзання.

2. Далі учень продовжив досліджувати тертя у вільній формі й змінив кут нахилу площини на α до горизонту. У точці О прикріпив один кінець нитки до площини, а до іншого кінця прикріпив тіло. Натягнув нитку і відвів її у горизонтальне положення (див. рис.). Відпустив тіло, і воно почало ковзати вниз по площині. Нитку вважати нерозтяжною.

Тіло зупинилось після збільшення кута ϕ від нуля до деякого $\phi_{\max}$ ($90^\circ < \phi_{\max} \leq 180^\circ$) на площині та більше не рухалось. За яких значень

кута α це можливо? Нитка була натягнута протягом усього часу руху тіла. Встановіть зв'язок між $\varphi_{\max}$ та α .



10.3. Телескоп

У вас є оптичний лінзовий телескоп з опуклих лінз. Велика лінза об'єктива закріплена. А на іншому кінці телескопа – тримач для малої лінзи окуляра. Тримач можна трохи рухати між двома кінцевими положеннями вздовж осі телескопа за допомогою гвинта фокусування. У вас є дві малі лінзи, які по одній можна вставляти в тримач і використовувати як окуляр. З однією з малих лінз ви сфокусували телескоп на Місяць і отримали коефіцієнт кутового збільшення 35 в одному з кінцевих положень тримача окуляра. Щоб сфокусувати іншу малу лінзу, ви пересунули тримач на 15 мм в інше кінцеве положення і отримали коефіцієнт кутового збільшення 140. Вважайте, що в одному з двох описаних вище спостережень мала лінза була розташована на максимально можливій відстані від великої, а в іншому – на мінімально можливій.

1. Знайдіть фокусні відстані кожної з трьох лінз.

2. Знайдіть мінімальну відстань, на яку можна сфокусувати телескоп.

3. У вас є додаткова трубка довжиною $l = 10$ см. Один кінець трубки можна прикріпити ззовні до кінця телескопа з тримачем окуляра з однією із малих лінз, а в протилежний вставити іншу малу лінзу. Таким чином малі лінзи будуть знаходитись на відстані l одна від одної, їх осі будуть збігатися з віссю телескопа, а тримач окуляра можна рухати, як і раніше, за допомогою гвинта фокусування. Опишіть схему, щоб отримати максимальний коефіцієнт кутового збільшення під час спостережень за Місяцем. Знайдіть, чому цей коефіцієнт дорівнює.

Зауважимо! На кожному з кінців додаткової трубки можна прикріпити не більше ніж одну лінзу.



10.4. А витекти не може...

У плоскому дні широкої посудини є отвір, з якого донизу стирчить пряма тонка трубка (її переріз значно менший за переріз посудини) довжиною h . У посудину наливають воду до висоти H . Час витікання води з посудини через трубку – t . В'язкістю води знехтуйте.

1. Оцініть, як зміниться час витікання, якщо трубку зробити довшою в 3 рази. Вважайте, що $H \ll h$. Об'єм трубки значно менший за початковий об'єм води в посудині.

2. Розгляньте певний момент часу, коли вода ще не вилилась із посудини і повністю заповнює трубку. Знайдіть і відтворіть залежність тиску води від вертикальної координати вздовж посудини та трубки на одному графіку, поясніть отриману залежність і вкажіть значення тиску в характерних точках. Для побудови цього графіка вважайте, що H та h одного порядку.

3. Тепер припустимо, що рідина в'язка. Нехай у нас є горизонтальна трубка довжиною L та радіусом поперечного перерізу r , до кінців якої прикладена різниця тисків Δp . Динамічна в'язкість рідини – η . Виведіть формулу для знаходження об'ємної витрати рідини Q (об'єм за одиницю часу), що протікає по трубці, з точністю до безрозмірного коефіцієнта.

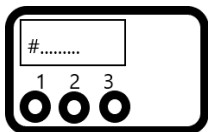
Підказка. Ви можете використовувати, наприклад, розмірні міркування. В такому випадку для отримання однозначної відповіді використовуйте той факт, що одиниця вимірювання «метр», яка присутня у зазначених вище величинах, має різний фізичний сенс у різних напрямках цієї задачі. Нагадаємо, що динамічний коефіцієнт в'язкості η визначається як відношення сили в'язкості, що діє між двома паралельними шарами рідини, до градієнта їх швидкостей (для тонких шарів поділити на відстань між ними) та площі їх дотику S : $\eta = F \frac{F}{(\Delta v / \Delta x) S}$.

Експериментальний тур

10.1. Чорна скринька

Чорна скринька має 3 виводи і містить схему, яка складається з 2 резисторів і нелінійного елемента.

Примітка 1. Нелінійними називають такі елементи електричних схем, які мають нелінійну вольтамперну характеристику, тобто елементи, опір яких залежить від величини протікаючого струму.



Обладнання: чорна скринька, батарейка, змінний резистор, два постійні резистори різного опору, з'єднувальні провідники, мультиметр.

Завдання

1. Визначте схему ввімкнення елементів («зіркою» чи «трикутником»), на зображенні схеми використовуйте таку нумерацію виводів – 1, 2, 3 зліва направо, коли скринька повернута так, що її номер – зверху).

2. Визначте опори резисторів у чорній скриньці.

3. Визначте характер залежності опору нелінійного елемента від струму (для даного елемента опір, як відношення напруги на ньому до струму, монотонно зростає чи спадає при збільшенні струму через нього).

Примітка 2. Необов'язково застосовувати всі надані вам резистори, але використання деяких з них може спростити здійснення серії вимірювань.

Примітка 3. Мультиметр DT-9208A – це багатофункціональний електровимірювальний прилад, за допомогою якого можна вимірювати силу струму, напругу (як постійні, так і змінні), опір, ємність, частоту. Потрібний тип вимірювання задається обертовим перемикачем у центрі передньої панелі. Мультиметр вмикається і вимикається жовтою клавішею ON / OFF у лівому верхньому кутку. Один щуп підключають до клемі COM – спільний, мінус, а другий до клемі, позначеної:

– VΩHz – для вимірювання напруги, опору чи частоти;

– mA, 20A – для вимірювання сили струму залежно від діапазону вимірювання. Якщо полярність напруги або струму виявиться

протилежною до описаної вище, на екрані з'являється знак «—» перед вимірюваною величиною. Якщо вимірювана величина перевищує межі вибраного діапазону вимірювання, то на екрані з'являється OL. Це відбувається, наприклад, у випадку, коли мультиметр перевели в режим вимірювання опору («зелені» положення перемикача в лівому верхньому секторі позначені символом « Ω »), а вимірюваний опір не під'єднали, або коли величина опору перевищує вибраний діапазон.

Мультиметр має захист від неправильного приєднання або перевищення діапазону вимірювання в розумних межах, окрім режимів вимірювання сили струму. Тому, здійснюючи вимірювання сили струму, подбайте, щоб вона не перевищувала встановлений діапазон вимірювання. Наприклад, не можна підключати мультиметр у режимі вимірювання сили струму до батарейки без обмежувального опору, бо при цьому він вийде з ладу і ви не зможете більше вимірювати ним силу струму.

Для розв'язання задачі ви можете використовувати всі можливості виданого мультиметра.

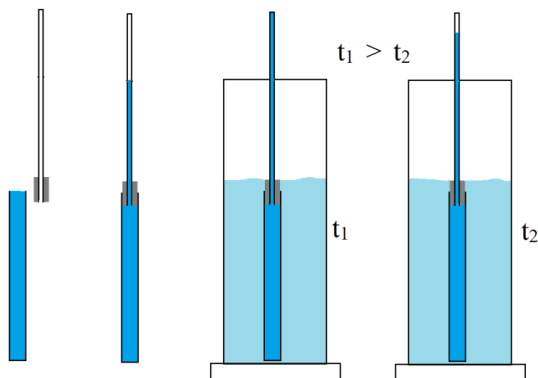
10.2. Теплове розширення

Обладнання: пробірка з пробкою, пластикова трубка ($6,0 \times 1,5$), посудина, в яку можна налити гарячу воду, термометр, вимірювальна лінійка, міліметровий папір.

Завдання

1. Використовуючи надане обладнання, запропонуйте спосіб демонстрації теплового розширення води.
2. Що, на вашу думку, означає маркування « $6,0 \times 1,5$ » пластикової трубки?
3. Побудуйте графік залежності об'єму води від температури (приблизно в діапазоні від 40°C до 60°C).
4. Визначте коефіцієнт об'ємного розширення води за температур 40°C , 50°C , 60°C . Чи можна стверджувати, що коефіцієнти однакові в межах похибки?
5. Оцініть вплив на результат вимірювання теплового розширення скла пробірки. Коефіцієнт лінійного розширення скла $\alpha = 8,5 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$.
6. Визначте, яким чином можна мінімізувати похибки у вашому експерименті?

Застереження щодо техніки безпеки. Вчитель надає гарячу воду з температурою близько 80°C . Сплануйте експеримент так, щоб унеможливити потрапляння гарячої води на частини тіла. Стежте за тим, щоб посудина з гарячою водою не перекинулася.



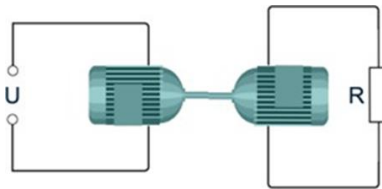
11 клас

Теоретичний тур

11.1. Вічний двигун

Електродвигун постійного струму з постійними магнітами приєднаний до мережі з постійною напругою U . Він напрями механічно з'єднаний з таким самим двигуном (який виконує роль генератора) так, що вони обертаються з однаковою частотою. До генератора під'єднали резистор з опором R . Опір обмотки двигуна та генератора – r . Нехтуючи механічними втратами, знайдіть сили струмів:

- 1) у колі двигуна та генератора;
- 2) коли генератор має вдвічі слабші магніти, тобто $B_{\text{ген}} = \frac{1}{2} B_{\text{двиг}}$;
- 3) коли кількість витків котушки у генераторі вдвічі менша.



11.2. Космічний туризм

У 2024 р. ще одна компанія пропонує скористатися послугами «космічного туризму», але тепер вже не на космічному кораблі, а на повітряній кулі, заповненій воднем H_2 . На рис. 1, який можна знайти на сайті компанії, бачимо залежність висоти кулі від часу. Куля підіймається на 100 000 футів (1 фут = 30,48 см). На рис. 2 зображена залежність температури міжнародної стандартної атмосфери від висоти. На осі ординат відкладена висота, на осі абсцис – температура.

Довідка. Стандартна атмосфера – це модель атмосфери, прийнята Міжнародною організацією зі стандартизації. Тиск і температура на рівні моря вважаються рівними 101,3 кПа та 15 °С відповідно. Ділянки графіка на рис. 2 прямолінійні. Куля зроблена з легкого матеріалу із запасом площі для збільшення об'єму так, що тиск всередині кулі можна вважати рівним тиску ззовні.

Розгляньте уважно рисунки і виконайте завдання (за потреби скористайтесь вимірювальною лінійкою).

1. Куля змінює свій об'єм з висотою. Чи слід змінювати кількість водню у кулі під час підйому і спуску? Відповідь обґрунтуйте аналітично. Знехтуйте зміною хімічного складу повітря на висотах підйому кулі і вражайте, що завдяки повільному підйому між воднем у кулі й зовнішнім повітрям встигає встановитися теплова рівновага.

2. Запишіть рівняння залежності температури від висоти на ділянках підйому кулі.

3. Знайдіть рівняння залежності тиску від висоти на ділянках підйому кулі.

4. Спеціальний генератор звуку на кулі формує тонкий промінь звукової хвилі у заданому напрямку. Нехтуючи затуханням сигналу з відстанню, визначте, за яких кутів до горизонту звук буде блукати землею атмосферою, не досягаючи верхніх шарів атмосфери і земної поверхні. Кривиною земної поверхні знехтуйте. Швидкість звуку в атмосфері пропорційна середній квадратичній швидкості молекул повітря.

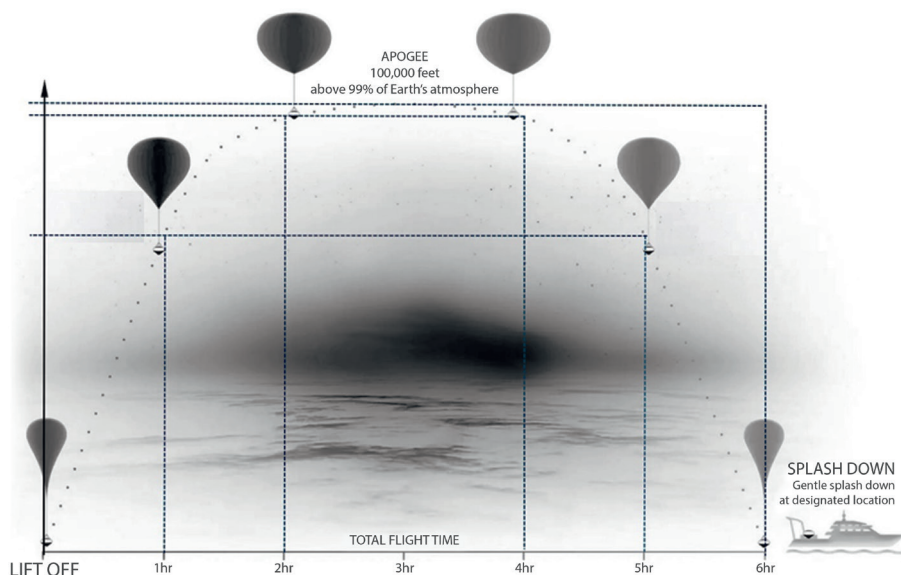


Рис. 1

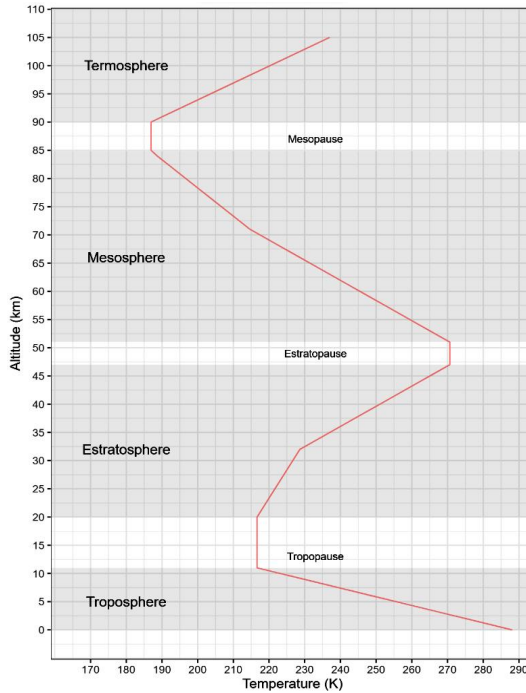


Рис. 2

11.3. Кульові з'єднання

Юні фізики зацікавились, чи можна визначити кількість маленьких жорстких металевих кульок радіусом a , які вміщаються в циліндричну посудину, висота H і радіус b якої набагато більші за радіус кульок, за допомогою омметра. Для цього вони провели експеримент з двома кульками. Один контакт припаяли до однієї кульки, а другий – до другої. Притиснувши кульки з деякою силою, виміряли опір, і його величина R виявилася значно більшою, ніж у тому випадку, коли обидва контакти припаювали до однієї кульки. Цікавим було те, що від взаємної орієнтації двох кульок це значення практично не залежало. Тоді вони засипали циліндричну посудину, виготовлену з непровідного матеріалу, доверху такими кульками, старанно утрушуючи. Дно посудини і кришку виготовили з м'якого, добре провідного матеріалу і стиснули так, щоб кульки притискалися одна до одної з такою самою силою, як при

вимірюванні опору між ними. Далі виміряли електричний опір між кришкою і дном.

Дайте відповіді на запитання:

- 1) яким буде результат вимірювання опору між дном і кришкою?
- 2) скільки кульок помістилося в циліндричну посудину?
- 3) чи пропорційний опір між дном і кришкою кількості кульок у посудині?

11.4. Нестабільна оболонка

Еластична, теплонепроникна та ідеально провідна сферична оболонка має масу M і поверхневий натяг σ . Оболонка заповнена багатоатомним ідеальним газом, що має показник адіабати $4/3$. Оболонка розміщена у вакуумі за відсутності поля тяжіння і будь-яких інших зовнішніх полів. Спочатку оболонка не заряджена і перебуває в рівновазі, маючи при цьому фіксований радіус r_0 . Потім оболонці надають електричний заряд Q .

1. Якісно (без наведення явної залежності) проаналізуйте залежність радіуса кульки від часу (монотонність, зростання, спадання, періодичність, швидкість зростання, швидкість спадання) у випадках, коли:

- поверхневий натяг раптово зникне;
- σ буде від'ємним.

Як зміниться ця залежність при зміні знака заряду оболонки?

2. Запишіть рівняння, що описує радіальний рух зарядженої оболонки у випадку додатної σ .

Якісно проаналізуйте цей рух: буде він обмеженим чи ні, періодичним чи ні?

3. За якої умови оболонка здійснює гармонічні коливання? Визначте амплітуду та період цих коливань.

Примітка. $(1 + y)^\alpha \approx 1 + \alpha y$ за умови $y \ll 1$.

4. За якої умови тиск газу всередині оболонки у всіх точках можна вважати однаковим у даний момент часу? До яких фізично спостережуваних наслідків призведе порушення цієї умови? Вважати швидкість звуку в газі c відомою.

Експериментальний тур

11.1. Мутне завдання

Обладнання: лінійка, штатив, шматочок напівпрозорої плівки в оправі, аркуш паперу А4 з таблицею Сівцева (літери різного розміру), аркуш міліметрового паперу.

Завдання

1. Визначте, в якому випадку видимість об'єкта краща – якщо розмістити плівку поблизу ока чи впритул до об'єкта.
2. Побудуйте хід променів для пояснення замутнення зображення предмета.
3. Проведіть необхідні вимірювання та визначте мутність цієї плівки.
4. Оцініть похибку вимірювання.
5. Вкажіть фактори, які впливають на похибку вимірювань.

Вказівка. Вважайте, що плівка відхиляє промінь світла, який проходить крізь неї, на певний невеликий кут. Назвемо мутністю μ плівки тангенс максимального кута відхилення променя від попереднього напрямку.

11.2. Насичена пара

Обладнання: посудина, в яку можна налити гарячу воду, гаряча вода (звернутися до вчителя), скляна трубка, термометр, лінійка, нитка, зубочистка.

Завдання

1. Перевірте, чи виконується рівняння стану ідеального газу для бульбашки, обмеженої водою в трубці. Вимірювання проведіть за відомої кімнатної температури та температури води 70 °С.
2. Визначте тиск насиченої пари води за температури 70 °С.
3. Назвіть фактори, які суттєво вплинули на результати вимірювань. Вкажіть, в який бік (збільшення чи зменшення) вони вплинули на результат п. 2.

Примітка. Для отримання гарячої води для експерименту зверніться до вчителя. Атмосферний тиск прийняти як 101 кПа, тиск насиченої пари води за кімнатної температури (21 °С) становить 2,5 кПа.

11.3. Пружне яблуко

Обладнання: штатив, пружина (з гачком), лінійка, яблуко, пісковий годинник.

Завдання

Визначте інтервал часу, який вимірює пісковий годинник:

- 1) опишіть установку, яку використовували для проведення експерименту;
- 2) детально опишіть проведення експерименту;
- 3) обґрунтуйте формули, що використовувалися для розрахунків;
- 4) наведіть таблицю отриманих результатів та розрахунки;
- 5) оцініть похибку вашого вимірювання.

Примітка. Прискорення вільного падіння вважати відомим:
 $g = 9,81 \text{ м/с}^2$.

Розв'язання задач

8 клас

Теоретичний тур

8.1. Водоспад

Розв'язання

За умовою задачі, початкова висота води у першій посудині становить $H_{01} = 56$ см, у другій – $H_{02} = 52$ см, у третій – $H_{03} = 36$ см.

Відповідно початкова висота води в першій посудині на рівні отвору O_1 $h_{01} = H_{01} - H_{02} = 4$ см, у другій посудині на рівні отвору O_2 $h_{02} = H_{02} - H_{03} = 16$ см, у третій посудині на рівні отвору O_3 $h_{03} = H_{03} = 36$ см.

Початкові швидкості витікання води через відповідні отвори дорівнюють:

$$v_{01} = \sqrt{2gh_{01}} = 0,2\sqrt{2g},$$
$$v_{02} = \sqrt{2gh_{02}} = 0,4\sqrt{2g}, \quad v_{03} = \sqrt{2gh_{03}} = 0,6\sqrt{2g}.$$

Відношення швидкостей витікання води з відповідних отворів у початковий момент часу $v_{01}:v_{02}:v_{03} = 1:2:3$.

Враховуючи те, що в другу посудину втікає вода зі швидкістю v_{01} , а витікає зі швидкістю $v_{02} = 2v_{01}$, результуюча швидкість витікання води з другої посудини: $v_2 = v_{02} - v_{01} = v_{01} = v$.

Аналогічно результуюча швидкість витікання води з третьої посудини: $v_3 = v_{03} - v_{02} = v_{01} = v$.

Отже, *результуюча швидкість витікання води у всіх посудинах однакова*. Відповідно за доволі малий інтервал часу Δt зміна об'ємів води $\Delta V = vS_o\Delta t$ у всіх посудинах однакова.

Тоді $S_1\Delta h_1 = S_2\Delta h_2$, звідки

$$\Delta h_2 = \frac{S_1\Delta h_1}{S_2} = 4\Delta h_1. \quad (1)$$

Аналогічно $S_1\Delta h_1 = S_3\Delta h_3$, звідки

$$\Delta h_3 = \frac{S_1\Delta h_1}{S_3} = 9\Delta h_1. \quad (2)$$

Із (1) і (2) випливає, що відношення змін висот $\Delta h_1:\Delta h_2:\Delta h_3 = 1:4:9$ є рівним відношенню початкових висот $h_{01}:h_{02}:h_{03} = 4:16:36$ стовпчиків води над рівнями отворів.

Це означає, що при витіканні води співвідношення між змінами висот будуть зберігатися весь час витікання і становитимуть 1:4:9. Тому, коли у першій посудині висота зменшиться на 1 см, то у другій посудині зменшиться на 4 см, а у третій – на 9 см.

Відповідно $H_2 = 52 \text{ см} - 4 \text{ см} = 48 \text{ см}$, $H_3 = 36 \text{ см} - 9 \text{ см} = 27 \text{ см}$.

8.2. Лабораторна комашка

Розв'язання (спосіб 1)

1. Знайдемо теплову потужність, яка виділяється на реостаті, застосовуючи закони Джоуля – Ленца, Ома та формули паралельного й послідовного з'єднань.

$$I_0 = \frac{U_0}{r + \frac{rR}{r+R}}; \quad U_p = \frac{U_0}{r + \frac{rR}{r+R}} \cdot \frac{rR}{r+R};$$

$$P_p = \frac{U_p^2}{R} = \frac{U_0^2 R}{(r + 2R)^2} = \frac{U_0^2}{\frac{r^2}{R} + 4r + 4R}.$$

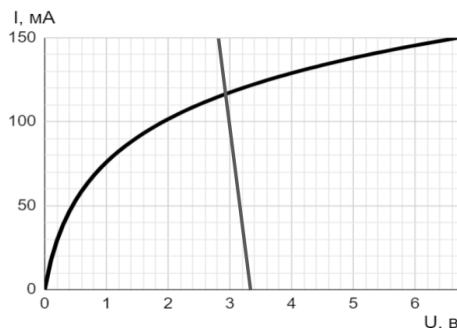
Зрозуміло, що ця потужність буде максимальною, коли знаменник цього дробу буде мінімальним (легко побачити, що знаменник має мінімальне значення).

Проаналізуємо вираз у знаменнику, виділивши у ньому повний квадрат:

$$Y = \frac{r^2}{R} + 4r + 4R = \left(\frac{r}{\sqrt{R}} - 2\sqrt{R}\right)^2 + 4r + 4r.$$

Мінімальне значення цієї функції досягається, коли вираз у дужках дорівнює нулю, тобто при $R = \frac{r}{2} = 5 \text{ Ом}$. Максимальна теплова потужність на реостаті при цьому буде дорівнювати: $P_p = \frac{U_0^2}{8r} = 1,25 \text{ Вт}$.

2. Позначимо напругу і силу струму на лампочці як U_l і I_l . З минулого питання знаємо, що $R = \frac{r}{2}$. Застосовуючи закон Ома та формули паралельного й послідовного з'єднань, маємо: $U_0 = U_l + I_l \cdot r + U_l \cdot \frac{r}{R}$. Звідси отримаємо залежність між силою струму та напругою на лампочці: $I_l = (U_0 - 3U_l)/r$.



Побудуємо цю пряму на графіку вольтамперної характеристики лампи. На перетині графіків знайдемо напругу та силу струму на лампочці: $U_{\text{л}} = 2,95$ В і $I_{\text{л}} = 115$ мА. При цьому сумарна потужність дорівнює: $P_1 = U_{\text{л}} \cdot I_{\text{л}} + U_{\text{л}}^2/R = 2,1$ Вт.

Розв'язання (спосіб 2)

1. Знайдемо теплову потужність, яка виділяється на частині реостата. Позначимо опір частини реостата R . Тоді опір кола, зображеного на рисунку:

$$R_{\text{ЗАГ}} = r + \frac{R \cdot r}{R + r} = r + R_x, \text{ де позначимо } R_x = \frac{R \cdot r}{R + r}. \quad (1)$$

Тоді напруга на реостаті: $U_p = \frac{U_0}{r + R_x} \cdot R_x$.

Перепишемо останній вираз, поділивши чисельник і знаменник на R_x :

$$U_p = \frac{U_0}{\frac{r}{R_x} + 1}. \quad (2)$$

Підставимо (1) в (2):

$$U_p = \frac{U_0}{\frac{R+r}{R} + 1} = \frac{U_0}{\frac{r}{R} + 1 + 1} = \frac{U_0}{\frac{r}{R} + 2}. \quad (3)$$

Знайдемо потужність, яка виділяється на частині реостата:

$$P = \frac{U_p^2}{R}. \quad (4)$$

Підставивши (3) в (4), отримаємо: $P = \frac{U_0^2}{\left(2 + \frac{r}{R}\right)^2 R}$.

Перепишемо останній вираз, розкривши дужки:

$$P \left(4 + 4 \frac{r}{R} + \frac{r^2}{R^2}\right) R = U_0^2.$$

Домноживши обидві частини на R^2 та розкривши квадрат, отримаємо:

$$4PR^2 + 4PRr + Pr^2 = U_0^2 R.$$

Перегрупувавши доданки, отримаємо квадратне рівняння відносно R :

$$(4P)R^2 - (U_0^2 - 4Pr)R + Pr^2 = 0. \quad (5)$$

Якщо теплова потужність, яка виділяється на частині реостата, – максимальна P , то дане квадратне рівняння для максимального значення потужності повинно мати два однакові корені, тому знайдемо дискримінант цього рівняння і прирівняємо його до нуля:

$$D = (U_0^2 - 4Pr)^2 - 16 \cdot P^2 r^2 = 0.$$

Розв'язавши утворене рівняння, знайдемо шукану максимальну потужність: $U_0^4 - 8U_0^2Pr + 16 \cdot P^2 r^2 - 16 \cdot P^2 r^2 = 0$, звідки $P = \frac{U_0^2}{8 \cdot r} = 1,25$ Вт.

З рівняння (5) знаходимо і шуканий опір частини реостата, за умови, що дискримінант рівняння дорівнює нулю:

$$R = \frac{U_0^2 - 4Pr}{8 \cdot P}. \quad (6)$$

Підставивши у (6) формулу максимальної потужності, знайдемо: $R = \frac{r}{2} = 5$ Ом.

2. Врахуємо знайдений у попередньому пункті опір частини реостата $R = \frac{r}{2}$. Позначимо напругу та силу струму на лампочці U_L та I_L відповідно.

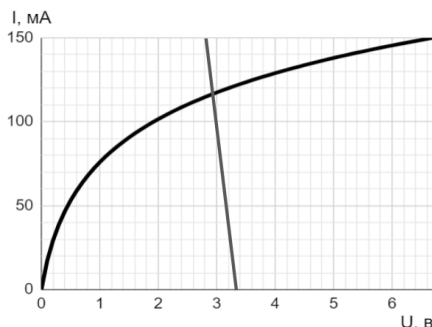
За законом послідовного з'єднання для напруг:

$$U_0 = U_r + U_L. \quad (7)$$

Напруга на резисторі:

$$U_r = I \cdot r = (I_L + I_R) \cdot r, \quad (8)$$

де I_R – сила струму, що тече через реостат.



Оскільки напруги на лампочці та реостаті будуть рівні ($U_L = U_R$), за законом Ома знайдемо I_R :

$$I_R = \frac{U_R}{R} = \frac{U_L}{r/2} = \frac{2U_L}{r}. \quad (9)$$

Підставимо (9) у (8) та (7), отримаємо: $U_0 = \left(I_L + \frac{2U_L}{r}\right) \cdot r + U_L$.

Розкривши в останньому виразі дужки, знайдемо силу струму на лампочці:

$$I_L = \frac{U_0 - 3U_L}{r} = \frac{U_0}{r} - \frac{3}{r}U_L. \quad (10)$$

Отже, значення сили струму та напруги на лампочці мають одночасно задовольняти лінійне рівняння (10) та належати кривій, зображеній на рисунку. Тому, побудувавши пряму, яку описує функція (10), знайдемо координати точки перетину цієї прямої та кривої графіка (див. рис.): $U_L = 2,9 \text{ В}$ і $I_L = 115 \text{ мА}$. При цьому сумарна потужність, яка виділяється на лампочці $P_L = I_L \cdot U_L$ та реостаті $P_R = U_L^2/R$, дорівнює: $P_{\text{СУМ}} = I_L U_L + \frac{U_L^2}{R} \approx 2,1 \text{ Вт}$.

8.3. Намішав води з водою

Розв'язання

1. Рідина та пара. Для того, щоб весь лід розплавився, потрібна така кількість теплоти: $Q = m_{\text{л}}\lambda$. Оскільки система знаходиться в калориметрі, то загальна енергія води зберігається, і єдиний спосіб отримати таку кількість теплоти – з конденсації частини пари $Q = m_{\text{конд}}L = m_{\text{л}}\lambda$. Отже, має сконденсуватись стільки пари:

$$m_{\text{конд}} = \frac{\lambda}{L} m_{\text{л}} = \frac{\lambda}{L} \frac{1}{3} m \frac{300 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}}}{3 \cdot 2500 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}}} m = 0,04m.$$

Тобто отримаємо $m_{\text{п}} - m_{\text{конд}} \approx 0,29m$ пари і $m_{\text{л}} + m_{\text{п}} + m_{\text{конд}} = 0,71m$ рідини.

2. Лід та рідина. Для отримання тільки льоду і рідини треба, щоб вся пара сконденсувалась у рідину. При цьому виділиться така кількість теплоти: $Q = m_{\text{п}}L$. Ця теплота може піти тільки на плавлення льоду, але максимум енергії, яку може поглинути лід, рівна $Q = m_{\text{л}}\lambda$, що менше ніж треба, оскільки питома теплота плавлення менша за питому теплоту

пароутворення. Тобто без зміни температури чи тиску така ситуація неможлива.

3. Лід та пара. Для отримання тільки льоду і пари треба, щоб частина рідини кристалізувалась у лід, а частина випарувалася, в такій пропорції, щоб зберігався тепловий баланс системи. Тобто

$$Q_{\text{крист}} = m_{\text{крист}}\lambda = Q_{\text{випар}} = m_{\text{випар}}L,$$

причому

$$m_{\text{крист}} + m_{\text{випар}} = m_p = \frac{1}{3}m.$$

Із цих двох рівнянь отримаємо:

$$m_{\text{випар}} = \frac{\lambda}{L} m_{\text{крист}},$$

$$m_{\text{крист}} + \frac{\lambda}{L} m_{\text{крист}} = \frac{1}{3}m,$$

$$m_{\text{крист}} = \frac{m}{3\left(1 + \frac{\lambda}{L}\right)} \approx 0,298m, \quad m_{\text{випар}} = m_p - m_{\text{крист}} = 0,035m.$$

Тоді повна маса льоду буде $m_{\text{л}} + m_{\text{крист}} = 0,333m + 0,298m \approx 0,63m$, а пари $m_{\text{п}} + m_{\text{випар}} = 0,333m + 0,035m = 0,37m$.

Відповідь:

- 1) $0,71m$ рідини та $0,29m$ пари;
- 2) така ситуація неможлива;
- 3) $0,63m$ льоду та $0,37m$ пари.

8.4. На варті галактики

Розв'язання

1. Перше, що може спасти на думку – визначити модуль s переміщення зорельота за час $\Delta t = t_3 - t_1 = 9$ хв. Як легко побачити, цей модуль дорівнює довжині гіпотенузи прямокутного трикутника з катетами $12a$ і $5a$, тобто, за теоремою Піфагора, маємо $s = 13a$. Звідси $v = \frac{s}{\Delta t} = 430\,000 \frac{\text{км}}{\text{с}}$. Але така відповідь абсолютно нереальна, бо отримане значення значно перевищує швидкість світла у вакуумі $c = 300\,000 \frac{\text{км}}{\text{с}}$. Тому слід повернутися до аналізу умови задачі.

Такий аналіз показує, що слід урахувати. Зореліт дійсно перебував у точках 1, 2, 3, але в інші моменти, адже світло ще мало дійти до патруля.

На це витрачався час: відповідно $\tau_1 = \frac{r_1}{c} = \frac{12a}{c} = 720$ с з точки 1 і $\tau_3 = \frac{r_3}{c} = \frac{5a}{c} = 300$ с з точки 3. Отже, насправді на проходження ділянки 1–3 витрачено на 420 с (7 хв) більше часу, а швидкість руху виходить $v \approx 244\,000 \frac{\text{км}}{\text{с}}$, що вже менше за швидкість світла.

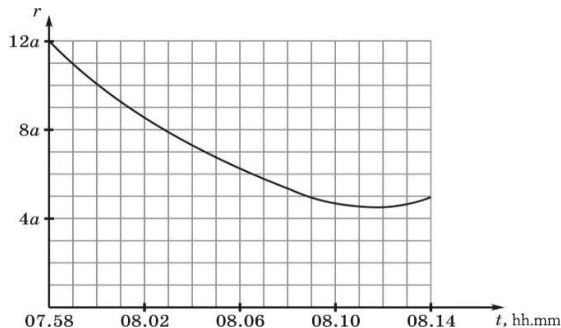
2. З урахуванням поправок на час поширення світла ми доходимо висновку: насправді зореліт перебував у точці 1 о 07 год 58 хв 00 с (позначимо цей час t_0), а в точці 3 – в момент 08 год 14 хв 00 с. Можемо знайти залежність $r(t)$ для проміжку часу між 07 год 58 хв і 08 год 14 хв. Тобто відповідне переміщення тривало $T = 16$ хв. Кожної хвилини координата зорельота x зменшувалася на $\frac{12a}{T}$, а координата y збільшувалася на $\frac{5a}{T}$. Отже, залежності координат від часу за годинником патруля мають такий вигляд:

$$\begin{aligned}x &= 12a - \frac{12a}{T}(t - t_0) = 12a \left(1 - \frac{t - t_0}{T}\right), \\y &= 5a \frac{t - t_0}{T}.\end{aligned}$$

Залежність $r(t)$:

$$r(t) = \sqrt{x^2 + y^2} = a \sqrt{144 \left(1 - \frac{t - t_0}{T}\right)^2 + 25 \left(\frac{t - t_0}{T}\right)^2}.$$

Для наочності можна побудувати графік такої залежності (це не входить у вимоги до учасників / учасниць олімпіади!).



Схематичний графік (див. рис.) можна побудувати за наведеною формулою або розбити траєкторію руху зорельота на рівні частини та виміряти відповідні значення $r(t)$ на планшетах з урахуванням масштабу.

3. Оскільки рух зорельота прямолінійний і рівномірний, а точка 2 лежить посередині відрізка 1–3, зореліт перебував у точці 2 на $T/2$ (тобто на 8 хв) пізніше, ніж у точці 1. Це момент 08 год 06 хв 00 с. Світло пододало відстань $6,5a$ від цієї точки до початку координат за 390 с, тобто за 6,5 хв. Отже, патруль мав побачити зореліт у точці 2 (а штурман – нанести точку 2 на планшет) у момент $t_2 = 08 \text{ год } 06 \text{ хв } + 6,5 \text{ хв}$, тобто $t_2 = 08 \text{ год } 12 \text{ хв } 30 \text{ с}$.

Експериментальний тур

8.1. Теплове розширення

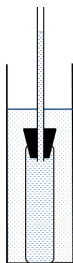
Розв'язання

1. Опис установки для дослідження залежності об'єму рідини від її температури.

Наливаємо воду у пробірку по вінця. Закриваємо щільно пробірку корком, в який наскрізь вставлено трубку. Забезпечуємо відсутність повітря у пробірці та трубці. При вставленні пробки рідина витіснятиметься у трубку і підніматиметься в ній.

Наливаємо у мірний циліндр такий об'єм гарячої води (при 80°C), щоб поміщена в нього пробірка була повністю занурена у гарячу воду. Занурюємо у мірний циліндр разом з пробіркою термометр і стежимо за його показниками. У момент, коли стовпчик води у трубці перестане збільшуватись, фіксуємо температуру та довжину стовпчика води у трубці. В момент, коли довжина стовпчика води у трубці перестане збільшуватись, у мірному циліндрі та пробірці досягається теплова рівновага.

У процесі охолодження об'єм води в трубці та її температура будуть зменшуватись. Таким чином ми сконструювали прилад, за допомогою якого можна встановити залежність між об'ємом і температурою води.



2. Визначення температурного коефіцієнта об'ємного розширення води.

Вимірюємо внутрішню площу поперечного перерізу S трубки. Щоб покращити точність, багаторазово наповнюємо трубку холодною водою та випускаємо цю воду у мірний циліндр. Вимірюємо $V_{\text{заг}} = N \cdot V_0$, де N – кількість порцій води, вилитих у мензурку, V_0 – внутрішній об'єм трубки. Довжину трубки L вимірюємо лінійкою. Обчислюємо внутрішню площу поперечного перерізу S :

$$S = \frac{V_{\text{заг}}}{N \cdot L}.$$

Наливаємо воду у пробірку по вінця, попередньо вимірявши її об'єм V за допомогою мензурки. Закриваємо щільно пробірку пробкою так, щоб вода піднялась у трубці.

Наливаємо у мірний циліндр гарячу воду і занурюємо у неї пробірку.

Після того як між пробіркою і водою у мірному циліндрі встановиться теплова рівновага, стежимо за зміною довжини стовпчика води у трубці. За температури, близької до 60°C , фіксуємо довжину стовпчика води у трубці. Почекавши, коли вода охолоне на Δt , вимірюємо, на скільки Δh змінилась висота стовпчика в трубці.

Використовуючи ці дані, визначаємо зміну об'єму ΔV води при охолодженні на Δt . Обчислюємо температурний коефіцієнт об'ємного розширення води за формулою:

$$\beta = \frac{\Delta V}{V \cdot \Delta t}.$$

Контрольний експеримент, проведений журі

Площа поперечного перерізу трубки $S \cdot 10^{-2}, \text{см}^2$	Об'єм води в пробірці з трубкою $V, \text{см}^3$	Зміна висоти стовпчика води в трубці (при 60°C) $\Delta h, \text{см}$	Зміна об'єму води в трубці $\Delta V, \text{см}^3$	Зміна температури $\Delta t, ^\circ\text{C}$	Температурний коефіцієнт об'ємного розширення $\beta, ^\circ\text{C}^{-1}$
7	40	2	0,14	7,7	$4,5 \cdot 10^{-4}$

3. Фактори, які суттєво впливають на результати вимірювань.

Основними факторами, що впливають на точність результату, є такі:

1) точність вимірювальних приладів (ціна поділки мірного циліндра – 5 см^3 , лінійки – 1 мм);

2) вимірювання діаметра трубки безпосередньо лінійкою для обчислення внутрішньої площі поперечного перерізу трубки. Це призводить до значних похибок, оскільки діаметр трубки одного порядку з ціною поділки лінійки;

3) наявність бульбашок пари в пробірці під час експерименту. Бульбашки повітря призводять до завищення β , оскільки розширення повітря значно більше за розширення води;

4) при нагріванні пробірки з водою розширюється не лише вода, а й пробірка, тому зміна рівня води у трубці дещо менша через збільшення місткості пробірки при нагріванні. Це призводить до заниження β . Урахування теплового розширення матеріалу пробірки при розрахунках дасть можливість підвищити їх точність.

8.2. Густина ізоляції

Розв'язання

1. Визначення радіусів алюмінієвого осердя та дроту з ізоляцією:

1) окремо алюмінієвого осердя: щільно намотати нитку на оголену частину дроту та порахувати кількість зроблених витків;

2) розмотати, виміряти довжину та знайти радіус

$$(L_{\text{намотки}} = n_{\text{витків}} \cdot 2\pi R);$$

3) те саме повторити для дроту з ізоляцією.

Результати наведені для 10 витків.

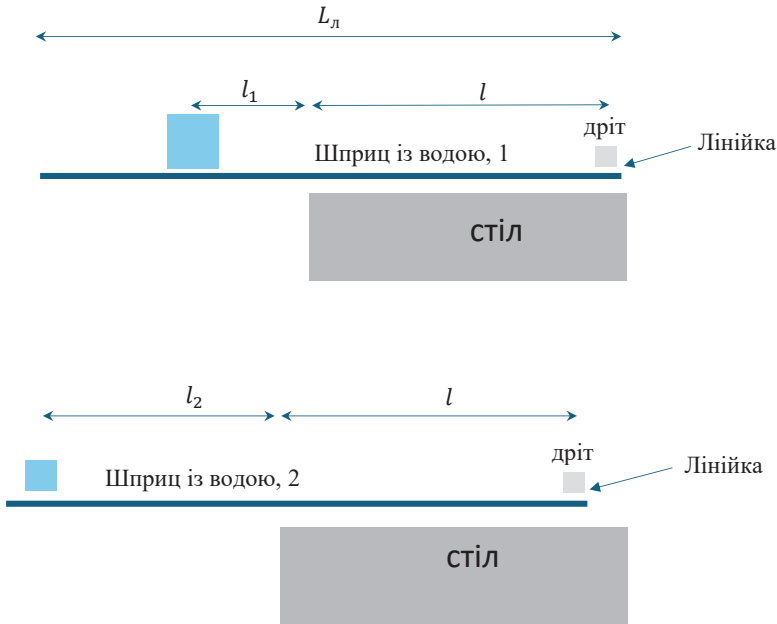
Алюміній: $L_{\text{ос}} = 11,3 \text{ см}$, $R_{\text{ос}} = 0,18 \text{ см}$, дріт з ізоляцією:

$L_{\text{намот. д}} = 18,6 \text{ см}$, $R_{\text{д}} = 0,3 \text{ см}$.

2. Визначення маси дроту з ізоляцією (густина алюмінію – 2700 кг/м^3):

1) зробити рівноплечий важіль з лінійки, поклавши її на край столу та врівноваживши. На край лінійки, що лежить на столі, покласти дріт, а на іншу половину лінійки підвісити шприц, частково заповнений водою. Врівноважити. Дослід повторити з іншою кількістю води у шприці;

2) щоб позбутись маси пустого шприця та знайти масу дроту, треба записати правила моментів, використовуючи дані двох вказаних вище дослідів.



Маса води в шприці у першому та другому досліді відповідно рівна: $m_{в1} = 5$ г, $m_{в2} = 3$ г, а відстань від точки обертання до дроту $l = 24$ см, до шприця у першому положенні $l_1 = 19$ см та у другому положенні $l_2 = 25$ см.

Правила моментів для двох випадків:

$$\begin{cases} m_d l = (m_{ш} + m_{в1}) l_1; \\ m_d l = (m_{ш} + m_{в2}) l_2. \end{cases}$$

Із системи рівнянь знаходимо масу дроту:

$$m_d = \frac{(m_{в1} - m_{в2}) l_1 l_2}{(l_2 - l_1) l} = 6,77 \text{ г.}$$

3. Визначення густини матеріалу ізоляції.

Довжина частини дроту, покритого ізоляцією: $L_{із} = 13$ см, довжина осердя: $L_{ос} = 15$ см. Густина алюмінію: $\rho_{ал} = 2700 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$. Тоді густина ізоляції дорівнює:

$$\rho_{із} = \frac{m_{із}}{V_{із}} = \frac{m_d - m_{ос}}{V_{із}} = \frac{m_d - \rho_{ал} L_{ос} \pi R_{ос}^2}{\pi L_{із} (R_d^2 - R_{ос}^2)} \approx 1130 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

4. Визначення факторів, які суттєво вплинули на результати вимірювань. Опис дій для покращення точності результатів:

1) при вимірюванні діаметрів дроту й алюмінію необхідно, щоб витки щільно прилягали один до одного, але при цьому не допускати, щоб будь-який з витків налазив на інші;

2) центр мас лінійки необов'язково знаходиться на позначці «25 см». Нерозмічена частина якоїсь зі сторін може бути довшою, що перевірялось експериментально. При проведенні цього експерименту центр мас лінійки перебував на позначці 24,8 см;

3) максимально збільшити плечі важеля для шприца та дроту (шприц та дріт знаходяться якнайдалі від точки обертання важеля). Більші довжини плечей – менша відносна похибка. Для цього дріт слід покласти на кінець лінійки, а відстань до шприца визначити з умови рівноваги;

4) місце розташування дроту є однаковим в обох експериментах. Це зменшує число вимірювань та спрощує систему рівнянь;

5) проводити експеримент слід багаторазово, вимірюючи значення l_1 та l_2 . Далі розрахувати середні значення, які й використовуються для обчислення за фінальною формулою.

9 клас

Теоретичний тур

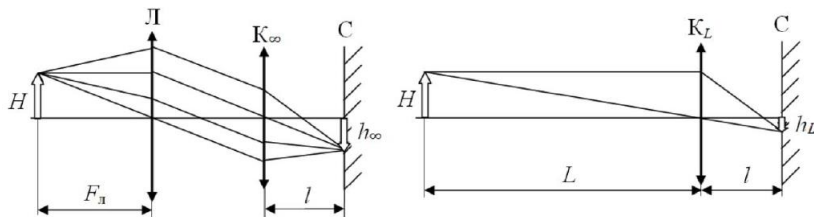
9.1. Володар лінз

Розв'язання

Останнє запитання і є ключовим. Як же пов'язані оптична сила лупи та її збільшення, яке вказують в оголошенні про продаж? Зазначимо принагідно, що збільшення лупи іноді пишуть на її футлярі (наприклад, у випадку з першою пропозицією, про яку йдеться в задачі, міг би бути такий напис: «2,5^x»). Відповідь на це запитання криється в такій формулі: $\Gamma_{\text{л}} = DL$, де $\Gamma_{\text{л}}$ – збільшення лупи, D – її оптична сила, а L – так звана відстань ясного бачення (або відстань найкращого зору), яка дорівнює 0,25 м.

Доведемо цю формулу (хоча її можна використовувати як відому), вважаючи, що збільшення (кратність) лупи показує, у скільки разів збільшиться на сітківці ока зображення предмета при використанні лупи у порівнянні з тим, яке воно було б, якби на цей предмет дивилися без лупи, розмістивши його на відстані 25 см від кришталика. Але важливо зазначити, що передбачається правильне використання лупи людиною з нормальним зором. Найбільш розслаблене око за нормального стану зору збирає паралельні промені на сітківці. При правильному користуванні лупою око має перебувати саме у такому розслабленому стані. Це означає, що людині з нормальним зором необхідно розташувати предмет у фокальній площині лупи. При цьому розмір зображення на сітківці не буде залежати від відстані між лупою і оком.

Позначимо на наших оптичних схемах висоту предмета як H , а висоти зображень на сітківці (С) як h_{∞} (при використанні лупи) і h_L (у випадку без лупи). Відстань між кришталиком і сітківкою в обох випадках залишається однакою (вона позначена як l). Зазначимо, що на цих схемах кришталік позначено по-різному (K_{∞} і K_L) не випадково. Його оптична сила у цих двох випадках буде різною. Нагадаємо, що відстань від предмета до лупи (L) дорівнює її фокусній відстані ($F_{\text{л}}$), а $L = 0,25$ м.



З подібних трикутників на лівій схемі маємо $H/F_L = h_{\infty}/l$, а з подібних трикутників на правій схемі отримуємо $H/L = h_L/l$. Відповідно $L/F_L = h_{\infty}/h_L = \Gamma_L$ або з урахуванням того, що $l/F_L = D$, у кінцевому рахунку матимемо вираз для оптичної сили лупи через її збільшення і відстань ясного бачення:

$$D = \Gamma_L/L.$$

Отже, у випадку $\Gamma_L = 2,5$ оптична сила лупи дорівнюватиме 10 дптр, а коли $\Gamma_L = 10$, то оптична сила вдвічі більша, тобто 20 дптр.

Для отримання відповідей на інші запитання не будуватимемо оптичної схеми, оскільки у подальшому нам будуть потрібні додатково лише дві добре відомі зі шкільного підручника формули:

$$D = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}; \quad \Gamma = \frac{f}{d},$$

де d – відстань від предмета до лінзи, f – відстань від лінзи до екрана, на якому спостерігається чітке зображення предмета, Γ – збільшення, яке дає ця лінза при заданому значенні d . Зазначимо, що збільшення Γ не є характеристикою лінзи, на відміну від збільшення лупи Γ_L , яке надає нам можливість обчислити інші пов'язані з ним характеристики лупи (D і F_L). Для отримання на екрані зображення в Γ разів більше за предмет немає потреби купувати лупу з таким самим значенням Γ_L . З трьох наведених вище формул маємо такі вирази для шуканих відстаней:

$$d = \frac{(\Gamma + 1)L}{\Gamma\Gamma_L}; \quad d + f = \frac{(\Gamma + 1)^2 L}{\Gamma\Gamma_L}.$$

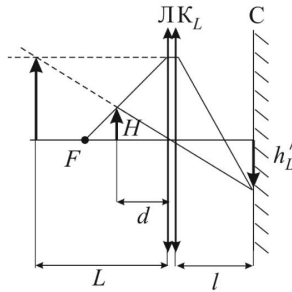
Останній вираз і дає відстань між предметом і екраном.

Підставляючи значення величин, отримуємо такі *числові відповіді*:

- 1) $d = 14$ см;
- 2) $d + f = 49$ см (бо тут $\Gamma = \Gamma_L = 2,5$; $L = 25$ см);
- 3) $d + f = 72$ см (бо тут уже $\Gamma = 10$, хоча $\Gamma_L = 2,5$ і $L = 25$ см);
- 4) $D = 10$ дптр (коли $\Gamma_L = 2,5$) і $D = 20$ дптр ($\Gamma_L = 5$).

Якщо під час спостереження за допомогою лупи розглядається око, акомодоване на відстань найкращого зору і розташоване упритул до лупи, то одержується інший хід променів та інша формула для збільшення лупи. З подібних трикутників на схемі маємо $H/d = h'_L/l$, де d – відстань від предмета до лупи. Для неозброєного ока, як було показано раніше, $H/L = h_L/l$. З формули тонкої лінзи – $d = \frac{FL}{F+L}$. З наведених формул випливає: $\Gamma_L = DL + 1$, що призводить до зміни числових відповідей:

- 1) $d \approx 23,3$ см;
- 2) $d + f \approx 81,7$ см (бо тут $\Gamma = \Gamma_L = 2,5$; $L = 25$ см);
- 3) $d + f = 120$ см (бо тут уже $\Gamma = 10$, хоча $\Gamma_L = 2,5$ і $L = 25$ см);
- 4) $D = 6$ дптр (коли $\Gamma_L = 2,5$) і $D = 16$ дптр ($\Gamma_L = 5$).



9.2. Космічний туризм

Розв'язання

1. З висотою зменшується тиск, і куля роздувається. Оболонка кулі виготовлена з нерозтяжного матеріалу, тому необхідна зміна об'єму кулі забезпечується зміною її форми.

2. Температура зменшується приблизно на 71–72 градуси на 11 км, або $k \approx 6,5 \frac{K}{km} = 6,5 \frac{C}{km}$.

$$t = 15^\circ C - ky.$$

3. Ділянок підйому, на яких збільшується тиск, не існує, оскільки тиск зумовлений силою тяжіння, що діє на повітря, а з підняттям вгору ми залишаємо масу повітря внизу.

4. Від 11 км до 20 км температуру можна вважати сталою і найменшою з тих, які проходитиме куля. Ця температура дорівнює приблизно:

$$t_{\min} = 15^{\circ}\text{C} - 6,5 \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{км}} \cdot 11 \text{ км} = -56,5^{\circ}\text{C}.$$

Це значення можна було отримати й напряду з графіка.

На рис. 1 проведемо дві горизонталі на висоті 11 км і 20 км та визначимо час за відповідними горизонтальними відрізками. Яку частину їх загальна довжина становить від горизонтального відрізка у 6 год, таку саму частину часу від 6 год рухатиметься куля у найхолоднішому повітрі. Приблизно це становить 52 хв. Можливі похибки через неточне вимірювання лінійкою.

5. Першу половину висоти підйому швидкість v_x росте з висотою лінійно. Тобто $v_x = ay$, де a знайдемо за умови, що на половині максимальної висоти $h \approx 30,5$ км швидкість досягає максимального значення $v_m = 20$ км/год; $a = 2v_m/h$. Або $v_x = 2v_m \frac{y}{h}$.

Аналогічно для другої частини підйому:

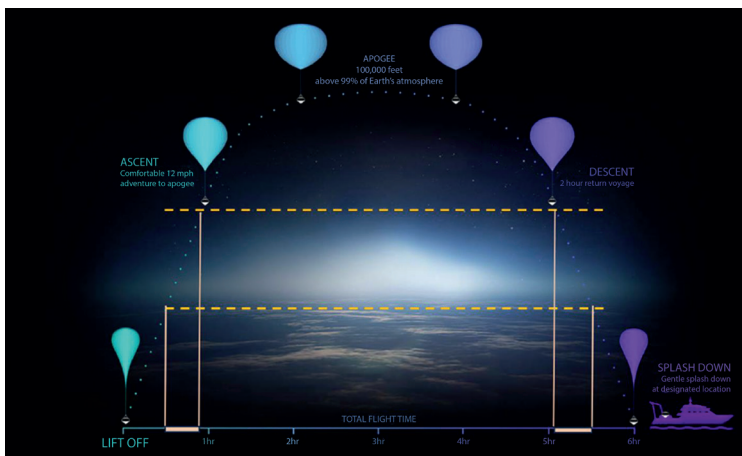
$$v_x = 2v_m(1 - \frac{y}{h}).$$

Відстань Δx , яку в горизонтальному напрямку пролітає повітряна куля, що рухається зі швидкістю вітру, за невеликий проміжок часу Δt :

$$\Delta x = v_x \Delta t.$$

На першій частині підйому:

$$\Delta x = \frac{2v_m}{h} y \Delta t.$$



9.3. Навички швидкого охолодження

Розв'язання

Позначимо висоту посудини H , початкову висоту рівня кави – h , радіус посудини – R . Різницю температур між вмістом посудини та повітрям у кімнаті позначимо t (таким чином ми фактично домовляємося відраховувати значення температури від кімнатної). Оскільки за умовою товщина циліндричної стінки дуже мала, можна вважати, що ця стінка *не передає* тепло у вертикальному напрямку. Тому теплообмін з навколишнім середовищем відбувається тільки через ту частину поверхні стінки, яка торкається рідини всередині (площа цієї частини стінки $2\pi Rh$ до доливання води та $2\pi RH$ після доливання). Маса води до та після доливання води відповідно $\pi R^2 h$ і $\pi R^2 H$.

Завдання 1:

а) зміна різниці температур t протягом маленького проміжку часу Δt відповідає рівнянню: $mc \Delta t = \pi R^2 h \Delta t = -K \cdot 2\pi Rh \cdot t \cdot \Delta t$. Коефіцієнт K залежить тільки від теплопровідності та товщини стінки. Відразу бачимо, що h у цьому рівнянні скорочується. Рівняння можна записувати у вигляді $\frac{\Delta t}{t} = -\frac{2K}{pcR} \Delta t = -A \Delta t$. Коефіцієнт A є певною сталою в умовах цієї задачі. Подивимося уважно на отримане рівняння: воно показує, що *відносне зменшення t* за однакові проміжки часу завжди *однакове!* Це зменшення однакове як для остигання кави *перед* доливанням, так і *після* доливання. Отже, за 5 хв значення t зменшується від початкового t_0 до Bt_0 , де B теж є сталою величиною в умовах цієї задачі. Зрозуміло, що $B < 1$.

Залишається тільки записати рівняння теплового балансу для теплообміну між кавою та долитим молоком (для якого t дорівнює нулю) та знайти кінцеве значення t_{fin} :

$$\pi R^2 h \cdot c \cdot (Bt_0 - t_{\text{fin}}) = \pi R^2 (H - h) \cdot c \cdot t_{\text{fin}}. \quad (*)$$

Звідси маємо $t_{\text{fin}} = \frac{h}{H} Bt_0$. Це досить очевидний результат (внутрішня енергія перерозподіляється між молоком та кавою);

б) якщо ми відразу долимаємо молоко, то отримуємо певну проміжну температуру $\frac{h}{H} t_0$ (розрахунок цілком аналогічний наведеному вище). А після остигання протягом ще 5 хв значення t треба буде ще помножити

на коефіцієнт B . Таким чином ми знов отримуємо таку саму кінцеву температуру: $t_{\text{fin}} = \frac{h}{H} B t_0$.

Отже, обидва способи приводять до однакової кінцевої температури. Зазначимо, що це справедливо тільки в межах описаної в умові задачі моделі процесу. Наприклад, закривши посудину кришкою, ми «вимкнули» такий важливий механізм охолодження, як випаровування.

Позначимо значення t для долитого молока t_B .

а) рівняння (*) для визначення кінцевої температури набуває вигляду: $\pi p R^2 h \cdot c \cdot (B t_0 - t_{\text{fin a}}) = \pi p R^2 h (H - h) \cdot c \cdot (t_{\text{fin a}} - t_a)$. Звідси:

$$t_{\text{fin a}} = \frac{h}{H} B t_0 + \frac{H - h}{H} t_B;$$

б) тепер одразу після доливання молока «проміжна» температура буде $\frac{h}{H} t_0 + \frac{H - h}{H} t_B$. Після остигання протягом 5 хв:

$$t_{\text{fin б}} = \frac{h}{H} B t_0 + \frac{H - h}{H} B t_B.$$

Таким чином, $t_{\text{fin a}} - t_{\text{fin б}} = \frac{H - h}{H} (1 - B) t_B$. Ураховуючи, що $B < 1$, маємо:

- якщо температура долитого молока нижча ніж кімнатна, то кінцева температура нижча у випадку *а* (краще зачекати 5 хв, а потім долити молока);

- якщо температура долитого молока вища за кімнатну, то кінцева температура нижча у випадку *б* (краще відразу долити молока, а потім зачекати 5 хв).

9.4. Електричний глобус

Розв'язання

1. З умови випливає, що кожна паралель складається з 12 відрізків з опором r , а кожен меридіан – з 6 таких відрізків. На рис. 1, де показаний фрагмент кола, кожен такий відрізок показано як резистор з опором r . Легко побачити (враховуючи симетрію кола), що струм не протікатиме паралелями, тому відповідні ділянки кола можна просто вилучити без зміни загального опору кола. Тоді залишаються 12 меридіанних ділянок кола, кожна з опором $6r$, з'єднаних паралельно. Загальний опір кола, за просктом, мав бути $R_0 = \frac{r}{2}$.

2. Збільшення опору будь-якої ділянки кола в жодному разі не може спричинити зменшення загального опору. Але якщо помилка стосується ділянки кола в якійсь паралелі, то змінений опір ділянки, якою струм усе

одно не протікає. У такому випадку загальний опір кола не змінюється, залишається рівним R_0 .

Розглянемо випадок заміни відрізка дроту на меридіані. Ми не знаємо, наскільки близько до екватора та полюсів розташований цей відрізок. Можна висловити припущення, що положення заміненого відрізка відносно полюса дає різні значення загального опору. Але повний розрахунок буде дуже громіздким, тому спробуємо обмежитися саме оцінкою, як і вимагає умова задачі.

Уявімо, що ми збільшили опори всіх ділянок на паралелях у багато разів, тобто «до нескінченності». Це фактично означає, що ми розриваємо зв'язки між сусідніми меридіанами. Унаслідок такої зміни загальний опір кола може тільки збільшитися до значення $R_{\max}$, яке напевно перевищує реальний опір кола. Тепер ми отримали коло з 12 паралельно з'єднаних ділянок: 11 з них мають опір $6r$, а одна – опір $8r$ (незалежно від того, яку саме ділянку меридіана помилково замінили). Тоді $\frac{1}{R_{\max}} = \frac{11}{6r} + \frac{1}{8r} = \frac{47}{24r}$, тобто $R_{\max} = \frac{24}{47}r \approx 0,5106r$.

А от зменшення опорів усіх ділянок на паралелях до нуля дасть коло, фрагмент якого показаний на рис. 2. Тут сірим зафарбований «помилковий» резистор (зрозуміло, що точне місце його на меридіані є несуттєвим). Тоді маємо послідовне з'єднання п'яти ділянок з опором по $r/12$ і однієї ділянки з опором $3r/34$.

Опір такого кола $R_{\min} = 103r/204 \approx 0,505r$. Це значення є мінімально можливим у випадку заміни відрізка дроту на меридіані.

Отже, опір кола міг взагалі не змінитися (якщо помилково замінений відрізок дроту на паралелі), а міг збільшитися на частку від 1 % до 2 % (якщо замінений відрізок дроту на меридіані). Збільшитися на 0,5 % опір ніяк не міг.

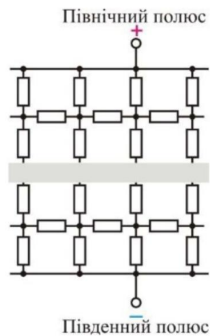


Рис. 1

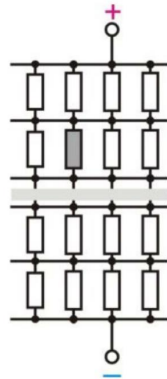


Рис. 2

Експериментальний тур

9.1. Чорна скринька

Розв'язання

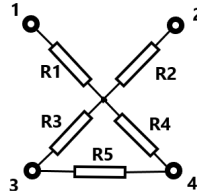
1. Вимірюємо опір між всіма парами виводів.
2. Записуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} R_{12} = R_1 + R_2; \\ R_{13} = R_1 + \frac{R_3(R_4 + R_5)}{R_3 + R_4 + R_5}; \\ R_{23} = R_2 + \frac{R_3(R_4 + R_5)}{R_3 + R_4 + R_5}; \\ R_{24} = R_2 + \frac{R_4(R_3 + R_5)}{R_3 + R_4 + R_5}; \\ R_{43} = \frac{R_5(R_4 + R_3)}{R_3 + R_4 + R_5}; \\ R_{14} = R_1 + \frac{R_4(R_3 + R_5)}{R_3 + R_4 + R_5}. \end{cases}$$

3. Звертаємо увагу на те, що є пари однакових значень. Робимо висновок про взаємне розташування резисторів. Рисуємо схему.

4. Уважно подивившись на систему рівнянь, можна помітити, що праві частини двох пар рівнянь співпадають. Їх можна викинути,

врахувавши, що два опори на схемі однакові. Це спрощує розв'язання системи.



5. Наприклад, якщо $R_{13} = R_{14}$ і $R_{23} = R_{24}$, що і спостерігається в експерименті, $R_3 = R_4$ або $R_1 = R_2$ (перевірте самостійно), то у другому випадку оптимальніше виконати перетворення «трикутник» – «зірка» та навпаки. Система зменшується до 4 рівнянь для 4 невідомих опорів.

6. Розглядаємо обидва випадки, розв'язуємо системи рівнянь.

9.2. Маса лінійки

Розв'язання

1. Спочатку пересвідчимося, що центр мас лінійки розташований у її геометричному центрі.

2. Використаємо лінійку як важіль для визначення співвідношення мас лінійки та бруска пластиліну (див. рис. 1).

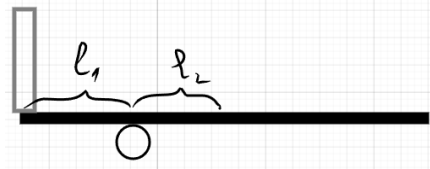


Рис. 1

3. Запишемо рівняння рівноваги важеля для цього випадку:

$$m_{\text{пл}} g l_1 = m_{\text{лін}} g l_2.$$

4. Отже, відношення мас лінійки та бруска пластиліну становить:

$$\frac{m_{\text{лін}}}{m_{\text{пл}}} = \frac{l_1}{l_2}.$$

5. Тепер зануримо брусок або його частину у посудину з водою і знайдемо нове положення рівноваги важеля (див. рис. 2). Для більшої точності потрібно, щоб занурення пластиліну було максимальним. Якщо

занурення неповне, то об'єм зануреної частини визначаємо за допомогою цієї ж лінійки, надавши пластиліну правильної форми (паралелепіпеда). Важливо у вимірюванні дотримуватись рівномірного занурення шматка по всьому об'єму.

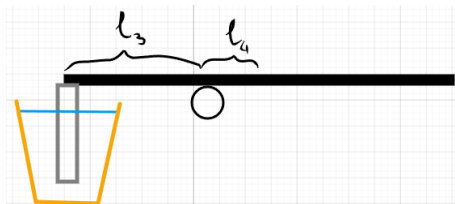


Рис. 2

6. Запишемо рівняння рівноваги важеля для нового положення

$$(m_{\text{пл}} - \rho_{\text{води}}V)gl_3 = m_{\text{лін}}gl_4.$$

7. Поділимо друге рівняння на перше:

$$\frac{(m_{\text{пл}} - \rho_{\text{води}}V)l_3}{m_{\text{пл}}l_1} = \frac{l_4}{l_2}.$$

Якщо форма зануреної частини пластиліну прямокутний паралелепіпед, то $V = abc$. З отриманого рівняння знаходимо масу пластиліну:

$$m_{\text{пл}} = \rho_{\text{води}}V \frac{l_2 l_3}{l_2 l_3 - l_1 l_4}.$$

8. Підставляючи отриманий результат у перше рівняння, отримуємо масу лінійки:

$$m_{\text{пл}} = \rho_{\text{води}}V \frac{l_1 l_3}{l_2 l_3 - l_1 l_4}.$$

9. Зазначимо фактори, які можуть суттєво вплинути на похибки вимірювань:

- урахування розмірів бруска для більш точного визначення плечей важеля;
- вибір плечей важеля у положеннях рівноваги максимально довгими;
- занурення у воду максимально можливого об'єму бруска;
- для більш точного вимірювання об'єму пластиліну акуратне зім'яття рифленої сторони бруска і надання йому форми паралелепіпеда.

10 клас

Теоретичний тур

10.1. Дротові відносини

Розв'язання

Перетворимо схему, з'єднавши між собою точки відповідно до умови. Неважко побачити, що еквівалентна схема матиме вигляд:

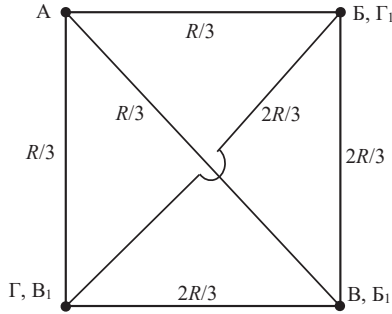


Рис. 1

Звичайно, схему можна підключити до джерела будь-якою парою точок з набору А, Б, В, Г. Однак можна помітити, що підключення АБ, АВ, АГ мають однаковий опір, тому вони еквівалентні.

Можливі інші варіанти підключення без точки А. Але всі вони мають однаковий опір. Отже, можливо отримати лише дві принципово різні схеми залежно від того, чи приєднано до точки А клему джерела. Кожна з них зводиться до збалансованого містка Уїтстона. Опір кожної схеми можна розрахувати, видаливши вертикально розташований резистор: для лівої схеми – $R_1 = R/5$, для правої – $R_2 = 4R/15$. Оскільки напруга в обох випадках однакова, то відношення значень потужності для цих двох схем має вигляд:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{U^2/R_1}{U^2/R_2} = \frac{4R/15}{R/5} = \frac{4}{3}.$$

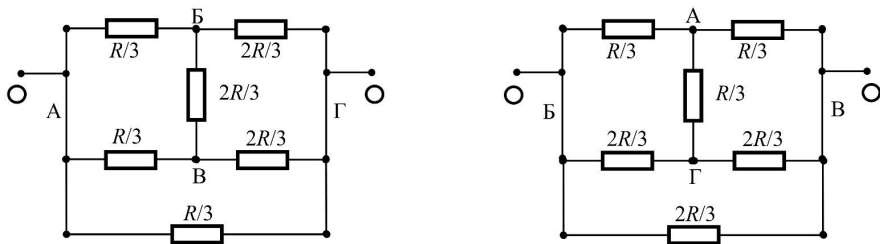


Рис. 2

10.2. Похилий маятник

Розв'язання

1. Знайдемо коефіцієнт тертя спокою μ_0 . Сила нормальної реакції опори, що діє на тіло як під час його руху, так і коли воно нерухомо лежить на площині, $-N = mg\cos(\alpha_0)$. Проекція сили тяжіння на похилу площину $mg\sin(\alpha_0)$ у нерухомому стані компенсується силою тертя спокою, максимальне значення якої $\mu_0 N$. Звідси знаходимо: $\mu_0 = \tg(\alpha_0) = 0,4$.

Під час ковзання площиною вниз сила тертя зменшується завдяки зміні коефіцієнта тертя до μN .

У напрямку руху тіла залишаються проекція сили тяжіння $mg\sin(\alpha_0)$, спрямована вниз по схилу, і сила тертя ковзання $\mu mg\cos(\alpha_0)$ у протилежному напрямку.

Маємо прискорення: $a = g(\sin(\alpha_0) - \mu\cos(\alpha_0))$. Або:

$$\mu = \tg(\alpha_0) - a/(g\cos(\alpha_0)). \quad (1)$$

З руху вниз по площині маємо у SI:

$$a = 2L/t^2 = 0,64. \quad (2)$$

З рівнянь (1) і (2) маємо: $\mu \approx 0,33$.

Далі будемо розглядати рух на нитці по дузі кола. Треба бути дуже уважними з кутами у різних площинах.

2. Робота сили тертя ковзання (спрямована проти напрямку швидкості) при відхиленні нитки на кут φ дорівнює: $A = -\varphi\mu mg\cos(\alpha)$. Різниця потенціальних енергій у початковій і кінцевій точках, де швидкість дорівнює нулю:

$$mg/\sin(\alpha)\sin(\varphi).$$

Отже,

$$\mu_k = \tg(\alpha)\sin(\varphi)/\varphi. \quad (3)$$

3. Розглянемо умови рівноваги в кінцевій точці. Якщо розглядати сили на площині, то маємо три сили: силу натягу нитки T , проєкцію сили тяжіння $mg\sin(\alpha)$ і силу тертя спокою, максимальне значення якої $\mu_0 mg\cos(\alpha)$.

Для визначення напрямку сили тертя у граничній точці зупинки (коли тіло може почати зісковзувати назад) уявимо навколо кінця вектора скочуючої сили (проєкції сили тяжіння на похилу площини) коло радіусом у модуль вектора сили тертя спокою (візуалізує усі можливі напрямки сили тертя спокою). Можна показати, що сила тертя має бути перпендикулярна до напрямку нитки і сили її натягу. Тоді

$$\mu_0 mg \cos(\alpha) \geq mg\sin(\alpha)\cos(\pi-\varphi),$$

або

$$\mu_0 \geq -\operatorname{tg}(\alpha)\cos(\varphi). \quad (4)$$

Косинус від'ємний, бо $90^\circ < \varphi < 180^\circ$. Якщо кут φ більший, то тіло не залишиться у спокої і буде ковзати вниз після зупинки.

Зазначимо, що визначення напрямку сили тертя у граничній точці можливе з інших міркувань.

Знайдемо можливі кути φ . Розділимо рівняння (4) на (3), щоб позбутися $\operatorname{tg}(\alpha)$, й отримаємо співвідношення коефіцієнтів тертя

$$\mu_p/\mu_k = 0,4/0,33 \approx 1,21 \geq -\varphi \operatorname{ctg}(\varphi). \quad (5)$$

Котангенс також від'ємний, адже $\varphi > 90^\circ$. Підставляємо кілька стандартних кутів на калькуляторі й знаходимо, що рівняння виконується, коли $\varphi \approx 120^\circ$. Якщо кут більший, то функція у правій частині нерівності (5) буде більшою. Це легко побачити, тому що абсолютні значення φ і $\operatorname{ctg}(\varphi)$ зростають для $90^\circ < \varphi < 180^\circ$. З пояснень до нерівності (5) також маємо, що тіло почне ковзати вниз після зупинки, якщо $\varphi > 120^\circ$. Тому:

$$90^\circ < \varphi \leq 120^\circ. \quad (6)$$

З умови початку ковзання у початковій точці маємо, що $\alpha \geq \alpha_0 = 21,8^\circ$. Далі з рівняння (3) маємо $\operatorname{tg}(\alpha) = \varphi\mu/\sin(\varphi)$. Підставимо кути для φ з (6), щоб знайти α . Ми можемо це зробити, бо $\varphi/\sin(\varphi)$ зростає на відрізьку $(90^\circ; 120^\circ)$.

Маємо, що $0,52 < \operatorname{tg}(\alpha) < 0,8$, або $27^\circ < \alpha < 39^\circ$.

10.3. Телескоп

Розв'язання

1. У телескопічній системі фокуси об'єктива та окуляра мають збігатися. Тому відстань між цими лінзами $F_{об} + F_{ок}$. Враховуючи малість кутів, отримуємо з рисунка кутове збільшення: $\Gamma = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{F_{об}}{F_{ок}}$.

Тоді з умови випливає: $\Gamma_1 = \frac{F_{об}}{F_{1ок}} = 35$, $\Gamma_2 = \frac{F_{об}}{F_{2ок}} = 140$, $F_{2ок} - F_{1ок} = 15$ мм. Звідси $F_{2ок} = 5$ мм, $F_{1ок} = 20$ мм, $F_{об} = 700$ мм.

2. Якщо об'єкт розташований на мінімально можливій для даного телескопа відстані r , то об'єктив дає зображення на відстані, що перевищує його фокусну відстань. Це зображення має бути у фокальній площині окуляра, щоб на виході отримати паралельний пучок світла.

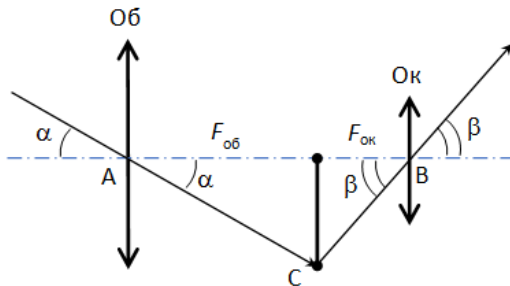


Рис. 1

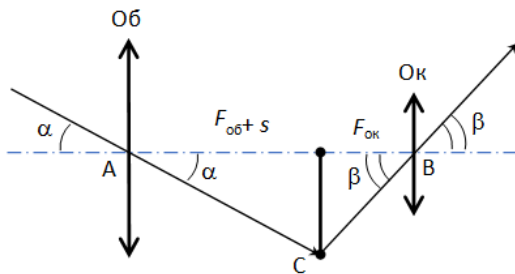


Рис. 2

Отже, треба тепер використати як окуляр лінзу, у якій $F_{2ок} = 5$ мм (тобто з найменшою фокусною відстанню), та відсунути її від об'єктива на максимально можливу відстань: $s = 15$ мм. Скористаємося формулою

тонкої лінзи: $\frac{1}{r} + \frac{1}{F_{об} + s} = \frac{1}{F_{об}}$. Звідси $r = \frac{F_{об}(F_{об} + s)}{s} = 33,4$ м.

3. Тепер оптична система складається з трьох лінз. На об'єкт падє паралельний пучок світла, збирається у фокальній площині ($F_{об}$), заломлюється в лінзі $F_{2ок}$, дає зображення у фокальній площині $F_{1ок}$ і виходить із телескопа паралельним пучком. За умовою, відстань $BC = l = 100$ мм і залишається незмінною. Кутове збільшення (див. рис. 3):

$$\Gamma = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\alpha} = \frac{l - F_{1ок}}{F_{1ок}} \cdot \frac{F_{об}}{F_{2ок} + x}.$$

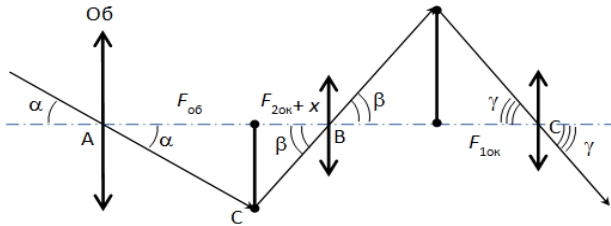


Рис. 3

З рівняння лінзи $\frac{1}{F_{2ок} + x} + \frac{1}{l - F_{1ок}} = \frac{1}{F_{2ок}}$. Підставимо значення виразу $\frac{1}{F_{2ок} + x}$ у попереднє рівняння:

$$\Gamma = \frac{F_{об}(l - F_{1ок} - F_{2ок})}{F_{1ок}F_{2ок}} = 525.$$

Легко переконатися, що поміняти місцями лінзи $F_{1ок}$, $F_{2ок}$ неможливо, бо доведеться перевищити максимально можливе зміщення $s = 15$ мм окулярів.

10.4. А витєкти не може...

Розв'язання

1. З умов «переріз значно менший за переріз посудини», «об'єм трубки значно менший за початковий об'єм води в посудині» впливає, що час спорожнення посудини значно більший за час витікання води з трубки. З умови $H \ll h$ впливає, що під час витікання води з верхньої посудини різниця висоти рівня води в посудині й нижнього краю трубки є практично незмінною. Тому швидкість витікання виявляється практично сталою.

Для її знаходження можна використати рівняння Бернуллі для верхньої межі рідини в посудині (рівень 1) та нижнього отвору трубки

(рівень 0), що є аналогом закону збереження механічної енергії води. На обох рівнях тиск води дорівнює атмосферному.

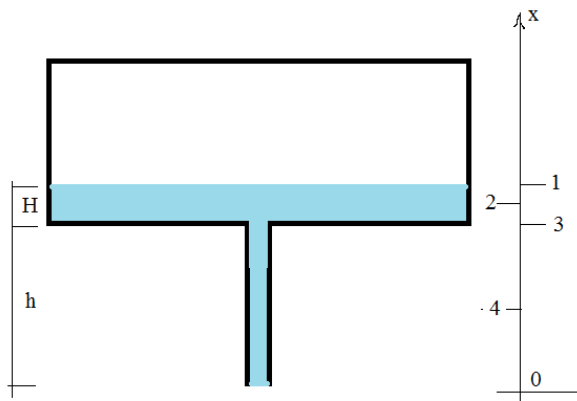


Рис. 1

Також врахуємо, що відповідно до рівняння нерозривності потоку швидкість витікання води в посудині набагато менша за швидкість витікання води в трубці v .

Оберемо за нуль потенціальної енергії нижній рівень трубки:

$$\rho g(h + H) + p_A = p_A + \frac{\rho v^2}{2}.$$

Звідси $v = \sqrt{2g(h + H)} \approx \sqrt{2gh}$. Це формула Торрічеллі, яку, якщо пам'ятаєте, можна використати одразу.

Тоді швидкість витікання в другому випадку (у разі збільшення довжини трубки в три рази) збільшується в $\sqrt{3}$ відносно початкового значення.

У випадку сталої швидкості об'єм води, що витекла з посудини, задається формулою: $V = v \cdot S \cdot t$, де S – площа поперечного перерізу трубки, t – час.

Тому загальний час витікання води в такій системі $t \sim \frac{1}{v} \sim \frac{1}{\sqrt{h}}$. Отже, у другому випадку час витікання води з посудини менший за початковий час в $\sqrt{3}$ разів.

2. Встановимо початок вертикальної осі координат x на нижній отвір трубки (рівень 0). Для знаходження залежності тиску в воді від

вертикальної координати запишемо рівняння Бернуллі для різних рівнів води (пам'ятаємо, що швидкість води в трубці є сталою):

$$\rho g(h + H) + p_1 = p_2 + \rho g x = p_4 + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g x = p_0 + \frac{\rho v^2}{2}. \quad (1)$$

Тиск біля верхньої поверхні рідини в посудині $p_1 = p_A$ і зростає у разі занурення вниз як наслідок першої рівності (1): $p_2 = p_A + \rho g(H + h - x)$ (для $h < x \leq H + h$).

На нижньому отворі тиск $p_0 = p_A$, і у разі підняття вгору тиск всередині трубки спадає, що є наслідком останньої рівності (1): $p_4 = p_A - \rho g x$ (для $0 \leq x < h$).

Якщо підходити до точки 3 (дно посудини) з різних боків, то бачимо, що на цій межі тиск (в посудині й у трубці) відрізняється на $\frac{\rho v^2}{2} = \rho g(H + h)$. Тобто в «ідеальному отворі» спостерігається стрибок тиску.

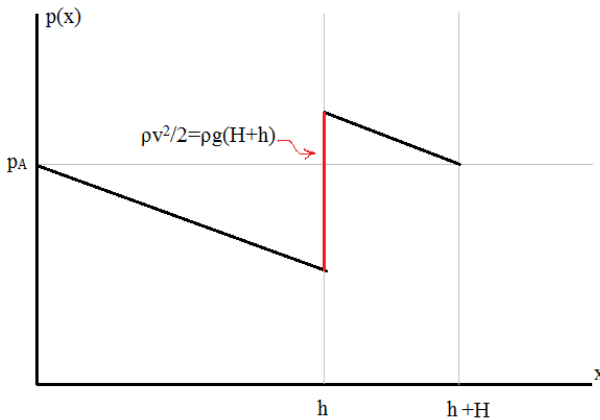


Рис. 2

Його наявність пов'язана з тим, що в цьому місці потоки деформуються і в дуже невеликій області швидкість рідини від дуже маленької змінюється до швидкості води в трубці. Для цього необхідне існування різниці тисків, що й прискорює воду.

3. *Перший спосіб.* У трубці в цій задачі є два фізично різні напрямки: вздовж трубки (y) та перпендикулярно (x). Будемо позначати одиниці вимірювання довжини вздовж трубки як m_y та одиниці вимірювання довжини поперек трубки як m_x . Запишемо розмірності величин:

$$[Q] = \left[\frac{V}{t} \right] = \frac{M_x^2 M_y}{c}, \quad [\Delta p] = \left[\frac{F_{\text{вздовж}}}{S_{\text{поперечне}}} \right] = \frac{\frac{\text{кг} \cdot \frac{M_y}{c^2}}{M_x^2}}{M_x^2}, \quad [r] = M_x, \quad [L] = M_y;$$

$$[\eta] = \left[\frac{F_{\text{вздовж}}}{S_{\text{вздовж}} \Delta x_{\text{поперечне}}} \right] = \frac{\frac{\text{кг} \cdot \frac{M_y}{c^2}}{M_y M_x \frac{M_y}{c M_x}}}{\frac{\text{кг}}{c M_y}} = \frac{\text{кг}}{c M_y}.$$

Пояснимо останній вираз. Сила тertia, що сповільнює рух шарів, спрямована вздовж трубки. Площина дотику шарів рідини, що гальмуються, також орієнтована вздовж трубки, тому ця площа виражається через $M_x M_y$, швидкість рідини – вздовж трубки, відстань між шарами – поперек трубки.

Отже, з наведених вище величин з міркувань розмірності можна зібрати таку комбінацію:

$$Q \sim \Delta p^p r^m \eta^n L^k \quad \text{і} \quad \frac{M_x^2 M_y}{c} = \left(\frac{\text{кг} \cdot \frac{M_y}{c^2}}{M_x^2} \right)^p M_x^m \left(\frac{\text{кг}}{c M_y} \right)^n M_y^k =$$

$$= M_y^{p-n+k} M_x^{-2p+m} c^{-2p-n} \text{кг}^{p+n}.$$

Звідси після порівняння отримуємо: $k = -1, n = -1, p = 1, m = 4$. Отже,
 $Q \sim \frac{\Delta p r^4}{L \eta}.$

Це так звана формула Пуазейля для ламінарної течії в'язкої рідини через трубку.

Другий спосіб. Можна помітити, якщо уявно розрізати трубку навпіл перпендикулярно її осі, то об'ємна витрата води через кожну половину залишається така сама. Оскільки довжина у два рази менша, то це компенсує також вдвічі менша різниця тисків. Отже, Δp та l мають входити у рівняння лише в комбінації $\frac{\Delta p}{l}$. У цьому випадку розділяти дві одиниці довжини не потрібно. За методом розмірності

$$Q \sim \left(\frac{\Delta p}{L} \right)^p r^m \eta^n \quad \text{і} \quad \frac{M^3}{c} = \left(\frac{\frac{\text{кг} \cdot M}{c^2}}{M^3} \right)^p M^m \left(\frac{\text{кг}}{c M} \right)^n = M^{-2p+m-n} c^{-2p-n} \text{кг}^{p+n}$$

і подальшим порівнянням, маємо: $n = -1, p = 1, m = 4$.

Експериментальний тур

10.1. Чорна скринька

Розв'язання

Для вимірювання опору необхідно під'єднати джерело струму до пари виводів чорної скриньки, виміряти напругу на цій парі виводів і силу струму. Але під'єднувати батарейку прямо до виводів – погана ідея, струм може виявитись великим. Послідовно слід увімкнути резистор. Краще змінний, це дасть можливість змінювати струм через чорну скриньку, щоб відрізнити нелінійний елемент від звичайних опорів. Вимірюємо струм і напругу кожної пари виводів чорної скриньки для 2–3 різних величин струму. Результати вимірювань вносимо в таблицю, рахуємо опори.

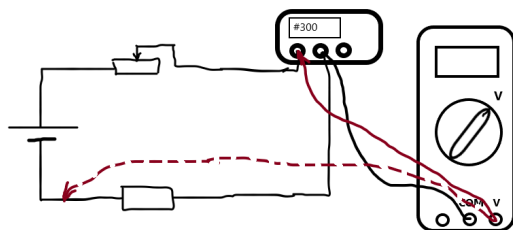
Проводити вимірювання струму буде зручніше і швидше, якщо не перемикаати мультиметр у розрив кола, а ввімкнути послідовно ще один невеликий постійний резистор, попередньо вимірявши його опір омметром. Падіння напруги на цьому резисторі дасть змогу визначати величину струму.

Порівнюючи опори, виміряні між трьома парами виводів, за різних величин сили струму, визначаємо, яка схема з'єднання елементів у скриньці: «зіркою» чи «трикутником». Якщо опір між однією з пар виводів виходить однаковий за різних величин сили струму, це означає, що між цими выводами увімкнуті лише резистори, тобто схема ввімкнення – «зірка». (Саме ця схема реалізована в задачі.) Порівнюючи опори за різних струмів, також одразу можна відповісти на запитання задачі: «Як залежить опір нелінійного елемента від величини сили струму?».

Для коректного розв'язання системи рівнянь для опорів необхідно, щоб опір нелінійного елемента залишався постійним. Для з'єднання «зіркою» цього можна досягти, якщо підтримувати струм постійним (за допомогою змінного резистора, під'єданого послідовно). Вимірюємо падіння напруги на парах виводів скриньки з нелінійним елементом за однакової величини сили струму. Розв'язуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} R_1 + R_2 = R_{12}; \\ R_1 + R_N = R_{13}; \\ R_2 + R_N = R_{23}. \end{cases}$$

Визначаємо опори резисторів R_1 і R_2 .



10.2. Теплове розширення

Розв'язання

План експерименту

1. Приєднуємо до пробірки, повністю заповненої водою, пробку з трубкою. При цьому забезпечується відсутність повітря в пробірці та деякий стовпчик води в трубці (виникає у разі витіснення води пробкою і залежить від глибини входження в пробірку). Занурюємо пробірку у воду, температура якої трохи більша ніж $60\text{ }^{\circ}\text{C}$, а саме: $70\text{--}90\text{ }^{\circ}\text{C}$, залишаючи трубку зовні.

Температура в посудині спадає, а між пробіркою та зовнішньою водою встановлюється теплова рівновага. Поки пробірка прогрівається, висота стовпчика води в трубці збільшується (це триває близько $5\text{--}10$ хв). Коли висота перестає збільшуватись (чи якась частина води витече через трубку, повністю заповнивши її), вважаємо, що настала теплова рівновага і температура води в пробірці дорівнює температурі води в посудині.

Після цього температура починає повільно спадати. Можна проводити вимірювання. Фіксуємо зміну висоти водяного стовпчика.

2. Для розрахунку зміни об'єму води нам знадобиться площа перерізу трубки.

Для визначення діаметра трубки потрібно скористатися наданим маркуванням. « $6,0 \times 1,5$ » означає, що зовнішній діаметр трубки дорівнює $6,0\text{ мм}$, а товщина стінок трубки – $1,5\text{ мм}$. Про це можна здогадатися, якщо прикласти лінійку до трубки. Внутрішній діаметр трубки – 3 мм .

3. Об'єм води у пробірці можна виміряти за допомогою лінійки як об'єм циліндра з напівсферичною частиною внизу.

4. Отримані значення об'єму води за різних температур варто представити на графіку. Тому вимірювання важливо проводити не за

трьох вказаних температур, а за 10–15 значень у вказаному інтервалі температур.

5. Розрахунок β . Скористаємося формулою теплового розширення:

$$\Delta V/V = \beta \Delta t \quad \text{або} \quad \beta = \frac{\Delta V}{V \Delta t}.$$

Коефіцієнт об'ємного розширення води не є сталим. Так, в інтервалі від 0 до 4 °С він від'ємний, а в діапазоні від 4 до 100 °С є додатним.

У цьому досліді ΔV – це збільшення об'єму води, яке добре видно зі збільшення рівня в трубці.

$$\Delta V = S \cdot \Delta h,$$

де S – площа перерізу трубки.

За об'єм води V можна взяти внутрішній об'єм пробірки. Саме в ній переважно перебуває нагріта вода. Вода в трубці має значно меншу температуру.

Вимірюючи всі необхідні величини, визначасмо β в околі вказаних температур.

Орієнтовно значення β може бути: $4,5 \cdot 10^{-4} \cdot 1/^\circ\text{C}$.

6. Для врахування теплового розширення скла потрібно зауважити, що пробірка також розширюється, і зміна об'єму, яку ми бачимо в трубці, – це зміна об'єму води мінус зміна об'єму порожнини в склі, яка відбувається за тим самим законом, що і зміна об'єму скла:

$$\Delta V = \Delta V_{\text{води}} - \Delta V_{\text{скла}}.$$

Для подальших розрахунків слід брати $\Delta V_{\text{води}}$.

$$\Delta V_{\text{води}} = \Delta V + \Delta V_{\text{скла}}.$$

Оскільки об'ємне розширення скла ($\beta = 3\alpha = 25,5 \cdot 10^{-5} \cdot 1/^\circ\text{C}$) приблизно на порядок менше, ніж об'ємне розширення води, то врахування його призведе до збільшення результату приблизно на 10 %.

11 клас

Теоретичний тур

11.1. Вічний двигун

Розв'язання

Для першого контуру (двигун) потужність, яку постачає джерело, витрачається на механічну потужність двигуна і теплові втрати на активному опорі:

$$P_1 = U \cdot I_1 = I_1^2 \cdot r + P_2,$$

де P_2 – механічна потужність двигуна, I_1 – струм у першому контурі.

Для другого контуру (генератор) потужність, яку передає двигун, витрачається на теплові витрати на активних опорах обмотки генератора і резисторі:

$$P_2 = I_2^2 \cdot (r_2 + R),$$

де I_2 – струм у другому контурі.

Разом: $U \cdot I_1 = I_1^2 \cdot r_1 + I_2^2 \cdot (r_2 + R)$ або $U = I_1 \cdot (r_1 + (r_2 + R) \cdot I_2^2/I_1^2)$.

Звідси:

$$I_1 = U/(r_1 + (r_2 + R) \cdot I_2^2/I_1^2). \quad (1)$$

Принцип роботи двигуна і генератора на постійних магнітах подібний обертанню рамки у магнітному полі. Тому механічний момент двигуна пропорційний таким величинам:

B – магнітній індукції магніту;

I – силі струму через рамку (двигун);

n – кількості витків котушки.

Оскільки механічний момент передається без втрат і конструкції двигуна й генератора однакові, то:

$$B_1 \cdot I_1 \cdot n_1 = B_2 \cdot I_2 \cdot n_2. \quad (2)$$

Для кожного з часткових випадків розглянемо останнє рівняння.

1. Оскільки B та n однакові у двигуні та генераторі, то $I_1 = I_2$.

З першого рівняння у цьому разі випливає:

$$I_2 = I_1 = U/(r + (r + R) \cdot I_2^2/I_1^2) = U/(2r + R).$$

2. Оскільки $B_1 = 2 \cdot B_2$, то $I_2 = 2 \cdot I_1$.

З першого рівняння у цьому разі випливає:

$$I_1 = U/(r + (r + R) \cdot I_2^2/I_1^2) = U/(5r + 4R), \quad I_2 = 2U/(5r + 4R).$$

3. Оскільки у генераторі кількість витків зробили вдвічі меншою, то $n_1 = 2 \cdot n_2$, звідки $I_2 = 2 \cdot I_1$. Також зменшився вдвічі опір обмотки генератора: $r_1 = 2 \cdot r_2$.

З першого рівняння у цьому разі випливає:
 $I_1 = U/(r + 4(r/2 + R)) = U/(3r + 4R)$, $I_2 = 2U/(3r + 4R)$.

11.2. Космічний туризм

Розв'язання

1. Для того, щоб куля підіймалася вгору, необхідно, щоб сила Архімеда перевищувала силу тяжіння. Сила Архімеда пов'язана як з об'ємом V водню всередині, так і значно меншим об'ємом ΔV оболонки, знаряддя, герметичного модуля з людьми, всього того, що на відміну від водню має більшу густину, ніж густина ρ_n навколишнього повітря, і ця густина на відміну від ρ_n під час руху не змінюється.

$$\rho_n g V + \rho_n g \Delta V \geq m_H g + \Delta m g.$$

Скористаємося рівнянням М-К. За умовою тиск водню всередині можна вважати однаковим з тиском ззовні. Це саме за умови теплової рівноваги має стосуватися і температури за достатньо повільного підняття кулі вгору.

Тоді з рівняння М-К відношення тиску до температури

$$\frac{P}{T} = \frac{\rho}{\mu} R = \text{const}$$

у будь-який момент часу є однаковим для повітря ззовні й водню всередині кулі.

Отже, $\rho_n = \rho_H \frac{\mu_n}{\mu_H}$ і нерівність набуває вигляду:

$$m_H \left(\frac{\mu_n}{\mu_H} - 1 \right) + \rho_n \Delta V \geq \Delta m.$$

Проаналізуємо нерівність. Припустимо, що кількість водню у кулі не змінюють. Тоді, за винятком густини повітря ρ_n , яка має зменшуватись з висотою, всі інші величини є сталими. Отже, ліва частина нерівності зменшуватиметься з підняттям кулі завдяки зменшенню ρ_n , що призведе до порушення нерівності. Якщо ж ще врахувати зменшення з висотою молярної маси повітря μ_n (важчі гази прагнуть до більш низьких положень, частково витісняючи легші), це тільки підсилить наш висновок: під час підняття кулі її слід підкачувати воднем, а під час спуску – спускати

водень в атмосферу або відкачувати у балон. Зазначимо, що ці зміни кількості водню не є великими, оскільки об'єм ΔV невеликий у порівнянні з об'ємом V і, якщо ми знехтували б ΔV , як зазвичай роблять, то дійшли б висновку, що рівнодійна сил тяжіння й Архімеда спрямована вгору і є сталою під час руху.

2. Рівняння залежності температури від висоти на всіх ділянках лінійне і може бути записане у загальному вигляді: $T = a + by$. З рис. 2 знаходимо коефіцієнти a і b для всіх трьох ділянок підймання кулі:

- 1) $a_1 = 15^\circ\text{C} = 288\text{ K}$, $b_1 \approx -6,5 \frac{\text{K}}{\text{км}} = -6,5 \frac{^\circ\text{C}}{\text{км}}$ для $y \in [0\text{ км}; 11\text{ км}]$;
- 2) $a_2 \approx -56,5^\circ\text{C} \approx 216,5\text{ K}$, $b_2 = 0$ для $y \in [11\text{ км}; 20\text{ км}]$;
- 3) $a_3 \approx -36,5^\circ\text{C} \approx 196,5\text{ K}$, $b_3 \approx 1 \frac{\text{K}}{\text{км}} = 1 \frac{^\circ\text{C}}{\text{км}}$ для $y \in [20\text{ км}; 32\text{ км}]$.

3. Для знаходження рівняння залежності тиску від висоти розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} P = \frac{\rho}{\mu} RT, \\ T = a + by, \\ dP = -\rho g dy, \end{cases}$$

де останнє рівняння – вираз для гідростатичного тиску, який з висотою зменшується, звідки й знак мінус. Це рівняння випливає з рівноваги у гідростатиці невеликого шару повітря або рідини під дією різниці тисків знизу й зверху, яка компенсує силу тяжіння, що діє на нього.

З другого рівняння системи підставимо T у перше, а з першого ρ у третє:

$$dP = -\frac{P\mu}{R(a+by)} g dy,$$

звідки

$$\frac{dP}{P} = -\frac{\mu g}{R} \frac{dy}{a+by}.$$

Інтегруємо від P_0 на висоті y_0 до P на висоті y :

$$\int_{P_0}^P \frac{dP}{P} = -\frac{\mu g}{R} \int_{y_0}^y \frac{dy}{a+by} \Rightarrow P = P_0 \left(\frac{a+by}{a+by_0} \right)^{-\frac{\mu g}{bR}}.$$

Для другого випадку, коли $b = 0$, маємо ізотермічну атмосферу:

$$P = P_0 e^{-\frac{\mu g}{aR}(y-y_0)}.$$

Отже, залежність тиску від висоти можна дізнатись за таким виразом:

$$P(h) = \begin{cases} P_0 \left(\frac{a_1 + b_1 h}{a_1} \right)^{-\frac{\alpha}{b_1}}, & h \in [0; 11 \text{ км}], \\ P(11 \text{ км}) \cdot e^{-\alpha \cdot \frac{h-11 \text{ км}}{216,5 \text{ К}}}, & h \in [11 \text{ км}; 20 \text{ км}], \\ P(20 \text{ км}) \cdot \left(\frac{a_3 + b_3 h}{a_3 + b_3 \cdot 20 \text{ км}} \right)^{-\frac{\alpha}{b_3}}, & h \in [20 \text{ км}; 30,48 \text{ км}], \end{cases}$$

де

$$\alpha = \frac{\mu g}{R} = \frac{29 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}} \cdot 9,81 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}}{8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}} \approx 34,2 \cdot 10^{-3} \frac{\text{К}}{\text{м}} = 34,2 \frac{\text{К}}{\text{км}}.$$

Заради цікавості знайдемо тиск на висоті $y_1 = 11 \text{ км}$ і позначимо як P_1 , на висоті $y_2 = 20 \text{ км}$ – як P_2 , а на максимальній висоті підймання $y_3 \approx 30,5 \text{ км}$ – як P_3 . На рівні моря ($y_0 = 0$) тиск за умовою $P_0 = 101,3 \text{ кПа}$.

$$P_1 = P_0 \left(1 + \frac{b_1}{a_1} y_1 \right)^{-\frac{\mu g}{b_1 R}}, \quad P_2 = P_1 e^{-\frac{\mu g}{a_2 R} (y_2 - y_1)},$$

$$P_3 = P_2 \left(\frac{a_3 + b_3 y_3}{a_3 + b_3 y_2} \right)^{-\frac{\mu g}{b_3 R}}.$$

Звідки:

$$\frac{P_3}{P_0} = \left(\frac{1 + \frac{b_3}{a_3} y_3}{1 + \frac{b_3}{a_3} y_2} \right)^{-\frac{\mu g}{b_3 R}} e^{-\frac{\mu g}{a_2 R} (y_2 - y_1)} \left(1 + \frac{b_1}{a_1} y_1 \right)^{-\frac{\mu g}{b_1 R}} \approx 0,0106.$$

Оскільки атмосферний тиск зумовлений силою тяжіння, що діє на шари повітря, відношення тисків дорівнюватиме відношенню маси шару атмосферного повітря, розташованого вище ніж 30,48 км, до усієї маси атмосфери (змінюю прискорення вільного падіння з висотою нехтуємо). Отже, під рівнем 30,48 км, за нашими розрахунками, залишиться $\left(1 - \frac{P_3}{P_0} \right) \cdot 100 \% \approx 99 \%$ атмосфери.

4. Закон заломлення світла отримується з припущення, що хвилі розповсюджуються. Отже, за аналогією зі світлом маємо такий самий закон заломлення для звукових хвиль:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Якщо взяти стос плоскопаралельних пластин з різними показниками заломлення (таким стосом дуже тоненьких пластин можна змоделювати неперервну зміну показника заломлення, а отже, і швидкості розповсюдження світла) і перемножити рівняння заломлення для кожної границі розділу, то після скорочення залишаться лише початкові та кінцеві значення:

$$\frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha} = \frac{v_0}{v}.$$

Щоб промінь світла або звукова хвиля не пройшли далі, необхідний такий їх розворот, за якого напрямок розповсюдження стає горизонтальним, тобто $\alpha = 90^\circ$. Отже, з урахуванням виразу середньої квадратичної швидкості для звукової хвилі маємо кут α_0 повного внутрішнього відбиття:

$$\sin \alpha_0 = \frac{v_0}{v} = \sqrt{\frac{T_0}{T}} = \cos \beta_0,$$

де β_0 – кут між напрямком випромінювання звукової хвилі й горизонтом.

З рівності зрозуміло, що $T > T_0$. Це означає, що процес повернення звуку до поверхні відбувається на висотах, де температура підвищується. Це з 20 до 47 км і з 90 до 105 км (далі можна вважати, що атмосфера Землі закінчилась). Повернення звукової хвилі, що рухалась під кутом вниз, відбувається на висотах з 11 до 0 км і з 85 до 51 км. Найбільш сприятлива для відповіді на запитання ситуація, коли куля знаходилась у тропоспазі на висотах 11–20 км за температури $T_2 = 216,5$ К. Найбільшу температуру $T_{\max} \approx 270,5$ К визначає ділянка підймання у момент, коли вона закінчується ізотермою. Отже:

$$\beta_0 = \arccos \sqrt{\frac{T_2}{T_{\max}}} = \arccos \sqrt{\frac{216,5}{270,5}} \approx 26,5^\circ.$$

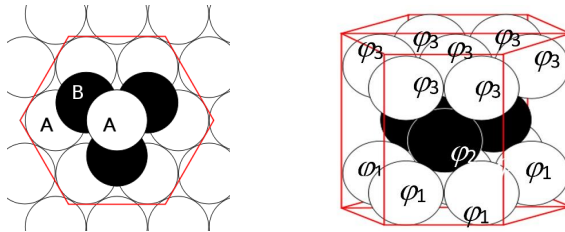
Якщо з висот від 11 до 20 км звукова хвиля піде вгору під кутом $26,5^\circ$ до горизонту, вона підійметься до висоти 47 км, де набуде горизонтального

напрямку і далі повертатиме назад вздовж деякої дуги до висоти 20 км, після чого рухатиметься прямолінійно під кутом $26,5^\circ$ до висоти 11 км, далі почне повертати вгору, розвертаючись на висоті приблизно 2,5 км, і так далі. За кутів, менших ніж $26,5^\circ$, амплітудний коридор відхилень хвилі буде меншим. Все це справедливо для стандартної моделі атмосфери.

11.3. Кульові з'єднання

Розв'язання

Те, що опір двох кульок, які дотикаються, набагато більший, ніж однієї, і те, що від взаємної орієнтації двох кульок він практично не залежить, засвідчує, що в цій задачі основний опір припадає саме на контакти, а не на кульки. За умовою він дорівнює R . Тепер розглянемо циліндр з кульками. Оскільки кульки добре струсили, то можемо припустити, що їх упаковка близька до максимально щільної, а це означає, що кожна кулька (крім верхнього і нижнього шарів) дотикається до 6 кульок у своєму шарі, до 3 у нижньому шарі й до 3 – у верхньому.



(На рисунку зображено варіант упаковки, в якому кульки третього шару розміщені над кульками першого шару. Можливий інший варіант, в якому вони розміщуються над порожнинами першого шару, але при цьому відстані між шарами по висоті й щільність упаковки не змінюються.)

Для обчислення кількості кульок у циліндрі можна розрахувати щільність упаковки в шарі – коефіцієнт заповнення площі круга кульками й кількість шарів за вертикаллю. Для цього врахуємо, що в кожному рівносторонньому трикутнику площею $\sqrt{3}a^2$, утвореному центрами сусідніх кульок, міститься по $1/2$ повної кульки (три сектори по $1/6$ кульки), тобто:

$$N_s = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi b^2}{\sqrt{3}a^2}.$$

$N_y = H\sqrt{6}/4a$ – кількість шарів, оскільки відстань між серединами сусідніх шарів за вертикаллю визначається висотою $4a/\sqrt{6}$ тетраедра, утвореного кульками, що контактують. Їх добуток визначає кількість кульок у циліндрі (нехтуючи крайовими ефектами):

$$N = N_s N_y = \pi b^2 H / 4\sqrt{2}a^3.$$

Цікаво знайти результуючу щільність упаковки (коефіцієнт заповнення об'єму циліндра кульками):

$$\frac{N \frac{4}{3}\pi a^3}{\pi b^2 H} = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \approx 0,74$$

(відомий результат, отриманий Кеплером).

Очевидно, що потенціали у кожному шарі кульок практично однакові, і ці вузли-кульки з'єднані з кульками з нижнього шару трьома опорами-контактами й з кульками з верхнього шару трьома опорами-контактами.

Тому, нехтуючи тепер опором контактів з кришкою і дном, повний опір представимо як послідовне з'єднання N_y шарів, в кожному з яких N_s кульок з'єднані трьома опорами з кульками наступного шару. Загальний опір тоді дорівнює:

$$R_3 \approx R \frac{N_y}{3N_s}.$$

Знайдемо кількість кульок в одному шарі.

Таким чином, отримаємо:

$$R_3 \approx \frac{Ha\sqrt{2}}{2\pi b^2} R.$$

Як бачимо, результуючий опір і кількість кульок не пропорційні. Це можна пояснити якісно, враховуючи властивості паралельного і послідовного з'єднання опорів. Результуючий опір дасть змогу визначити іншу величину – радіус кульки.

11.4. Нестабільна оболонка

Розв'язання

1. Єдиний заряд у системі – це заряд Q , нанесений на оболонку, зовнішні електромагнітні поля відсутні, тому будь-яка сила електростатичної природи залежатиме лише від квадрата цього заряду. Таким чином, динаміка системи не чутлива до знака заряду.

У разі зникнення поверхневого натягу в системі залишаться лише сили, що прагнуть розширити оболонку: сила тиску газу і сила електростатичного відштовхування між зарядами, розподіленими по оболонці. Тому оболонка буде необмежено розширюватися, поки не зруйнується. При цьому її прискорення поступово зменшуватиметься, бо обидві сили зменшуються зі зростанням радіуса оболонки. Якщо поверхневий натяг буде від'ємним, то сила поверхневого натягу стане третьою силою, що намагатиметься розширити оболонку. Отже, оболонка також буде необмежено розширюватися, поки не зруйнується. При цьому прискорення оболонки буде постійно наростати, бо сила поверхневого натягу зростає зі збільшенням радіуса оболонки.

2. Нехай у якийсь момент часу радіус оболонки r . На оболонку діють три сили: а) сила поверхневого натягу (лапласівського тиску), що діє в напрямку до центру, прагнучи стиснути оболонку; б) сила тиску з боку газу, спрямована назовні; в) сила електростатичного тиску, який виникає внаслідок кулонівського відштовхування між елементарними зарядами, рівномірно розподіленими по поверхні сфери, теж спрямована назовні. Знайдемо кожен із цих тисків окремо.

Лапласівський тиск для сферичної поверхні:

$$p_{\text{лапл}}(r) = \frac{2\sigma}{r}. \quad (1)$$

Оскільки оболонка теплонепроникна, то газ усередині оболонки розширюється чи стискається адіабатно. Запишемо рівняння Пуассона для цього процесу:

$$pV^\gamma = p_0V_0^\gamma, \quad (2)$$

де p_0 та V_0 – початкові тиск та об'єм газу, p та V – поточні значення тиску й об'єму, $\gamma = c_p/c_v$ – показник адіабати для газу, який за умовою дорівнює $4/3$.

Враховуючи, що об'єм кулі визначається за формулою $V = \frac{4\pi}{3}r^3$, а також те, що у початковий момент часу тиск газу був скомпенсований лапласівським тиском, тобто $p_0 = p_{\text{лапл}}(r_0) = 2\sigma/r_0$, перепишемо рівняння (2) у такому вигляді:

$$p \left(\frac{4\pi}{3} \right)^Y r^{3Y} = \frac{2\sigma}{r_0} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^Y r_0^{3Y}, \quad (3)$$

що дасть змогу визначити тиск газу як функцію радіуса оболонки:

$$p_{\text{газ}}(r) = 2\sigma \frac{r_0^{3Y-1}}{r^{3Y}} = 2\sigma \frac{r_0^3}{r^4}. \quad (4)$$

Електростатичний тиск всередині краплі знайдемо методом віртуальних переміщень. За умовою оболонка ідеально провідна, тому заряд рівномірно розподілиться по її поверхні. Тобто можна розглядати оболонку як рівномірно заряджену сферу. Її потенціал дорівнює:

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (5)$$

Розіб'ємо всю поверхню оболонки на малі частини, кожна з яких можна розглядати як точковий заряд. Енергія взаємодії системи точкових зарядів:

$$W = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i, \quad (6)$$

де q_i – i -й точковий заряд, φ_i – потенціал у місці знаходження i -го заряду, а множник $1/2$ враховує те, що в сумі (6) двічі врахована взаємодія між кожною парою точкових зарядів. Оскільки потенціал на поверхні провідника однаковий, то всі $\varphi_i = \varphi$, що дається формулою (5). Тому його можна винести за знак суми. Враховуючи, що $\sum_i q_i = Q$, маємо:

$$W = \frac{1}{2} Q \varphi = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 r}. \quad (7)$$

Уявно дамо оболонці розширитись під дією лише (!) власного електростатичного тиску. При цьому її радіус зросте на $\Delta r \ll r$. Під час розширення сила електростатичного тиску виконує роботу шляхом зменшення потенціальної енергії оболонки:

$$\begin{aligned} A &= F \cdot \Delta r = p_{\text{ел}} \cdot 4\pi r^2 \cdot \Delta r, \\ \Delta W &= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 r} - \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 (r + \Delta r)} \approx \frac{Q^2 \Delta r}{8\pi\epsilon_0 r^2}, \\ A &= \Delta W \Rightarrow p_{\text{ел}}(r) = \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 r^4}. \end{aligned} \quad (8)$$

Бачимо, що тиск газу (4) й електростатичний тиск (8) мають однакове спрямування і однакову залежність від радіуса, тому вони однаково впливають на рух оболонки.

Тепер можемо записати рівняння другого закону Ньютона для радіального руху елемента оболонки масою m у такому вигляді:

$$ma_r = -F_{\text{лапл}}(r) + F_{\text{газ}}(r) + F_{\text{ел}}(r),$$

де a_r – радіальне прискорення, а $F_{\text{лапл}}$, $F_{\text{газ}}$ та $F_{\text{ел}}$ позначають абсолютні значення сил лапласівського тиску, тиску газу й електростатичного тиску відповідно.

$$M \frac{d^2 r}{dt^2} = -8\pi\sigma r + \left(8\pi\sigma r_0^3 + \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\right) \cdot \frac{1}{r^2}. \quad (9)$$

Якісний аналіз руху оболонки

• Є дві протилежно спрямовані сили з різними залежностями від радіуса. Отже, можна знайти точку, де вони компенсують одна одну – положення рівноваги:

$$\begin{aligned} -8\pi\sigma r_{eq} + \left(8\pi\sigma r_0^3 + \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\right) \cdot \frac{1}{r_{eq}^2} &= 0, \\ r_{eq}^3 &= r_0^3 + \frac{Q^2}{64\pi^2\epsilon_0\sigma}. \end{aligned} \quad (10)$$

• У разі зміщення з цього положення рівноваги у напрямку до центру (стиснення оболонки) сила лапласівського тиску зменшується, а сила тиску газу й електростатичного відштовхування, навпаки, зростає, тому результуюча сила буде спрямована від центру, тобто назад до положення рівноваги.

• У разі зміщення з положення рівноваги (10) у напрямку від центру (розширення оболонки) ситуація протилежна: сила лапласівського тиску росте, а сила тиску газу й електростатичного відштовхування зменшується, тому результуюча сила спрямована до центру, тобто повертає оболонку назад до положення рівноваги.

• У випадку намагання зменшити радіус оболонки до нуля або збільшити його до нескінченності сила протидії необмежено зростає, тому рух оболонки обмежений у просторі.

• У випадку виведення оболонки з положення рівноваги (10) результуюча сила завжди спрямовує оболонку назад до положення

рівноваги. Але в положенні рівноваги швидкість оболонки вже є ненульовою, тому вона пролітає цю точку за інерцією і знову виходить з положення рівноваги. Оскільки в системі немає дисипації енергії та тепловтрат, повна енергія зберігається, а тому оболонка буде знову і знову пролітати положення рівноваги то в одному, то в іншому напрямку. Таким чином, рух оболонки періодичний. Але ці коливання не є гармонічними, бо другий доданок у правій частині рівняння руху (9) не є лінійним за радіусом.

3. Отже, рух оболонки є періодичним і нам потрібно знайти період та амплітуду малих коливань. До нанесення заряду оболонка була нерухома і мала радіус r_0 . Після нанесення заряду Q з'являється нове положення рівноваги r_{eq} , задане рівнянням (10). Вважатимемо, що r_0 та r_{eq} близькі одне до одного, щоб коливання можна було вважати малими.

Означимо відхилення від положення рівноваги

$$x = r - r_{eq} \quad (11)$$

і розкладемо праву частину рівняння (9), вважаючи $x \ll r_{eq}$. При цьому:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{(r_{eq} + x)^2} = \frac{1}{r_{eq}^2 \left(1 + \frac{x}{r_{eq}}\right)^2} = \frac{1}{r_{eq}^2} \left(1 + \frac{x}{r_{eq}}\right)^{-2} \approx \frac{1}{r_{eq}^2} \left(1 - \frac{2x}{r_{eq}}\right), \quad (12)$$

де використано співвідношення

$$(1 + y)^\alpha \approx 1 + \alpha y \text{ за умови } y \ll 1.$$

З урахуванням (10) і (12) рівняння (9) набуде такого вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= -\frac{8\pi\sigma}{M} \left(r - \frac{r_{eq}^3}{r^2} \right) \approx -\frac{8\pi\sigma}{M} (r_{eq} + x - r_{eq} + 2x), \\ \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{24\pi\sigma}{M} x &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Це рівняння гармонічних коливань із циклічною частотою:

$$\omega = \sqrt{\frac{24\pi\sigma}{M}}. \quad (14)$$

Тоді період малих коливань становить:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{\pi M}{6\sigma}}. \quad (15)$$

Зазначимо, що цей самий результат можна було отримати й з енергетичних міркувань. Дійсно, повну енергію оболонки з газом можна

отримати, якщо домножити рівняння (9) на dr/dt і виділити повну похідну по часу. Тоді отримаємо:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} M \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \sigma \cdot 4\pi r^2 + \left(8\pi\sigma r_0^3 + \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \right) \frac{1}{r} \right] = 0,$$

$$E = \frac{1}{2} M \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \sigma \cdot 4\pi r^2 + \left(8\pi\sigma r_0^3 + \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \right) \frac{1}{r} = 12\pi\sigma r_0^2 + \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 r_0} = \text{const.} \quad (16)$$

Тут перший доданок – кінетична енергія оболонки, другий – поверхнева енергія, третій і четвертий – внутрішня енергія газу й електростатична енергія зарядів на оболонці. Якщо підставити у цей вираз $r = r_{eq} + x$ і розкласти його до другого порядку за x , отримаємо:

$$E = \frac{1}{2} M \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + 12\pi\sigma x^2 + 12\pi\sigma r_{eq}^2. \quad (17)$$

Порівнявши цей вираз з енергією пружинного маятника, бачимо, що ефективна жорсткість пружини $k = 24\pi\sigma$ і циклічна частота мають вигляд (14), а період – (15).

Амплітуда малих коливань визначається початковими умовами, адже в початковий момент часу оболонка мала нульову швидкість, що відповідає максимальному відхиленню від положення рівноваги. Тоді амплітуда дорівнює:

$$x_{\max} = r_{eq} - r_0 = \sqrt[3]{r_0^3 + \frac{Q^2}{64\pi^2\epsilon_0\sigma}} - r_0 = r_0 \left(1 + \frac{Q^2}{64\pi^2\epsilon_0\sigma r_0^3} \right)^{\frac{1}{3}} - r_0 \approx$$

$$\approx r_0 \left(1 + \frac{Q^2}{192\pi^2\epsilon_0\sigma r_0^3} \right) - r_0 = \frac{Q^2}{192\pi^2\epsilon_0\sigma r_0^2}. \quad (18)$$

Знайдемо тепер умову, за якої розглянуті коливання будуть справді малими. Вона полягає в тому, що амплітуда коливань має бути значно менша за радіус оболонки у рівноважному положенні r_{eq} або за r_0 еквівалентно:

$$x_{\max} \approx \frac{Q^2}{192\pi^2\epsilon_0\sigma r_0^2} \ll r_0,$$

$$Q \ll \sqrt{192\pi^2\epsilon_0\sigma r_0^3}. \quad (19)$$

Отже, маємо обмеження на заряд оболонки.

4. До цього ми увесь час вважали, що газ всередині оболонки є однорідним, тобто в будь-який момент часу його тиск в усіх точках однаковий. Так можна вважати лише тоді, коли протягом одного періоду

коливань звук всередині газу встигне багато разів пройти через весь об'єм газу. Дійсно, саме швидкість звуку характеризує, наскільки швидко відбувається поширення інформації про зміну стану системи у середовищі. Тому, щоб формула для тиску газу (4) і рівняння руху (9) були справедливими у будь-який момент під час коливань оболонки, потрібно виконати умову:

$$c_s T \gg r_0. \quad (20)$$

Умову (20) з урахуванням (15) запишемо так:

$$c_s \sqrt{\frac{\pi M}{6\sigma}} \gg r_0, \quad (21)$$

$$M \gg \frac{6\sigma r_0^2}{\pi c_s^2},$$

що дає шукану умову на масу оболонки. Якщо цю умову не виконано, газ не встигатиме змінювати свої параметри синхронно з оболонкою. Внаслідок цього можливі такі явища:

- виникнення радіального розподілу густини газу завдяки стоячим звуковим хвилям, виникнення приповерхневого шару, розподіл може бути навіть нестационарним;
- зміщення рівноважного положення оболонки завдяки тиску в приповерхневому шарі, що не визначається рівнянням (4);
- навіть малі коливання будуть негармонічними: у разі стиснення оболонки вона «згрібає» газ і зазнає більшого опору, у випадку розширення газ відстає від оболонки, тож вона зазнає меншого тиску. Тому крива коливання буде не симетричною.

Примітки. 1. У формулі (1) може бути 4σ замість 2σ з відповідним обґрунтуванням, що враховано наявність в оболонки двох поверхонь, а σ – поверхневий натяг однієї з них; тоді в усіх подальших рівняннях має бути $\sigma \rightarrow 2\sigma$.

2. Бали нараховуються тільки за один правильний шлях розв'язання – динамічний чи енергетичний.

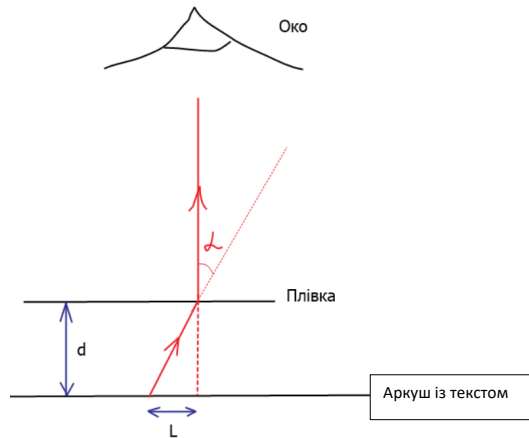
Експериментальний тур

11.1. Мутне завдання

Розв'язання

1. Деталі спостережуваного об'єкта видно краще, коли плівка розташована впритул до предмета (тексту). За певного віддалення від тексту його зображення мутніє і пропадає.

2. Схематичне пояснення цього явища зображено на рисунку.



Будемо вважати, що око людини розташоване доволі далеко від плівки, а отже, в око мають надходити майже паралельні вертикальні промені, що й утворюють зображення. Промінь світла з'являється в певній точці аркуша й, проходячи крізь плівку, відхиляється на кут альфа. Тоді людина бачить цю точку зміщеною від її положення на відстань L . Якщо ця відстань стане такою, як і характерний розмір літер, то все зображення помутніє і чіткість повністю пропаде. Це і буде наш критерій визначення потрібної висоти d плівки над аркушем із текстом.

3. Тоді мутність можна визначити як: $\mu = \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{L}{d}$.

Вимірювання можна провести з якомога більшою кількістю літер різного розміру на аркуші. Розмір літер L визначається лінійкою безпосередньо на аркуші А4. Відстань d вимірюється за допомогою вертикально встановленої на штативі лінійки. У такому випадку вдасться

перевірити нашу теорію. Якщо мутність для всіх цих випадків буде відрізнятися у межах похибки, то можна вважати, що наша теорія підтверджується. Або ж, що краще, побудувати графік залежності $L(d)$ і перевірити, чи він є лінійним. Обробити його можна, наприклад, за допомогою МНК.

Примітка. Багато вимірювання у кожному рядку проводити для однієї й тієї самої літери (або схожих) для мінімізації суб'єктивності. Також треба намагатись дивитись крізь плівку не з малої відстані до неї.

Результати вимірювання одразу нанесемо на графік.

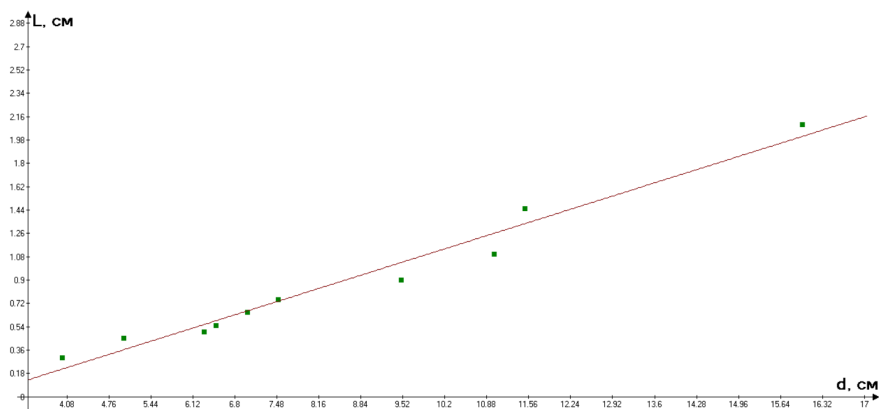


Рис. 2

За кутом нахилу графіка легко побачити, що $\mu \approx 0,15$.

Окремо треба оцінювати нанесення «вусів» похибок на кожну точку графіка та спробувати оцінити похибку визначення кута нахилу графіка. Це можна робити або за допомогою МНК, або провести різні можливі нахили лінеаризувальної прямої по даних точках і таким чином оцінити похибку.

11.2. Насичена пара

Розв'язання

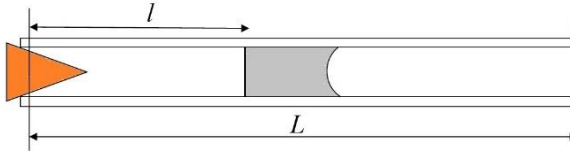
План експерименту

Занурюємо щільно закриту з одного боку зубочисткою трубку з повітрям у горизонтальному положенні у налиту в кювету воду температурою $70\text{ }^{\circ}\text{C}$. Для уникнення термічного впливу на шкіру бажано

скористатися ниткою (обмотати або прив'язати її до трубки). При цьому якась частина повітря виходить з трубки; в трубці залишається суміш повітря та насиченої водяної пари.

Для швидшого встановлення динамічної рівноваги бажано, щоб трубка зсередини була мокрою. Через деякий час вода в посудині починає охолоджуватись; вода засмоктується в трубку. Трубку можна діставати за температури, яка є безпечною. Бажано це робити без використання нитки для запобігання розриву водяного стовпчика.

Покладемо трубку на горизонтальну поверхню і дочекаємось, поки встановиться тепла рівновага. Це стане зрозуміло з умови: вода в трубці перестане змінювати своє положення. Після цього потрібно лінійкою виміряти довжину бульбашки повітря в трубці l та довжину трубки L (див. рис.).



Приймемо як гіпотезу, що середовище бульбашки – ідеальний газ. У цьому випадку має справджуватись рівність $PV/T = \text{const}$. Вважаючи, що площа поперечного перерізу трубки є постійною, повинно виконуватись співвідношення: $p_a L/T_1 = p_a l/T_2$, де p_a – атмосферний тиск.

Провівши дослід, переконуємось, що співвідношення $L/T_1 = l/T_2$ не справджується, що свідчить про помилковість моделі суміші повітря та насиченої водяної пари у контакті з поверхнею води як моделі ідеального газу. $T_1 = 294$ К (кімнатна температура), $T_2 = 343$ К.

Суми парціальних тисків повітря та водяної пари за 70°C і за кімнатної температури мають бути рівними та дорівнювати атмосферному тиску. При цьому виникає питання про вплив поверхневого натягу. Лапласів тиск буде нехтовно малим. Це можна перевірити, зануливши відкриту з обох кінців трубку у кювету вертикально і вимірявши висоту підняття води. Помічаємо, що висота стовпчика буде порядку 10^{-3} м, гідростатичний тиск якого набагато менший за тиск насиченої пари за кімнатної температури (див. умову).

Отже,

$$(p_a - p_{\text{нас1}})L/T_1 = (p_a - p_{\text{нас2}})l/T_2.$$

У цьому рівнянні всі величини, окрім шуканого тиску насиченої пари $p_{\text{нас1}}$, вимірюються або відомі з умови. Розв'язавши його, дізнаємося $p_{\text{нас2}}$.

На запропонованому обладнанні отримуються результати в межах 20–30 кПа за табличного значення 30 кПа.

Для того, щоб у скляній трубці була гарантовано насичена пара, варто перед початком експерименту зволожити її зсередини, набравши та виливши воду. Варто врахувати, що встановлення термодинамічної рівноваги займає деякий час, тому трубку слід занурювати в посудину трохи раніше, ніж температура в ній стане 70 °С.

Застереження щодо техніки безпеки. Вчитель надає гарячу воду, температура якої близько 80 °С. Сплануйте експеримент так, щоб не було потреби вмочувати у гарячу воду пальці.

11.3. Пружне яблуко

Розв'язання

Час роботи годинника можна виміряти, порівнявши його із періодом коливання яблука на пружині. Яблуко, проткнувши поверхню, підвішують на гачок.

Період коливань яблука на пружині визначається таким чином.

Вимірюємо видовження пружини в статичному положенні, підвісивши до неї яблуко. За визначенням положення рівноваги: $k \cdot \Delta x = m \cdot g$. Звідси знаходимо відношення $k/m = g/\Delta x$.

Визначаємо період коливання:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{\Delta x}{g}}.$$

Порахувавши кількість коливань маятника N за час висипання піску в пісковому годиннику, отримуємо час його роботи:

$$t = NT = 2\pi N \sqrt{\frac{\Delta x}{g}}.$$

Журі проводило вимірювання на 3 різних пружинках: від найслабшої до середньої з набору.

Учасникам були видані пружини різної жорсткості. Тому кількість визначених коливань могла бути різною, однак час пісового годинника був близько 2 хв = 120 с.



АСТРОНОМІЯ

Умови задач

10 клас

Теоретичний тур

Загальна кількість балів – 50 (за кожну правильну відповідь – 10 балів).

10.1. Зоря, планета та космічний корабель

Деяка планета обертається навколо деякої зорі по коловій орбіті. Видима із Землі максимальна кутова відстань між зорею і планетою дорівнює π_1 , а період її обертання навколо зорі рівний T . Уявімо, що у майбутньому до планети відрядили космічний корабель. Коли корабель подолав відстань Δd у напрямку до цієї системи, спостережувана з корабля максимальна кутова відстань між зорею і планетою стала рівною π_2 . Знайдіть масу зорі. Рухом зір у просторі знехтувати.

10.2. Зловити полюс у пастку

Дві зорі мають однакові висоти верхніх кульмінацій, що дорівнюють 62° , але при цьому у них кардинально різні схилення. Також обидві зорі ніколи не заходять на певній широті. На яких широтах це може відбуватися? Визначте можливий діапазон значень схилень для цих зір.

10.3. Земля і Місяць з Меркурія

Оцініть максимально можливу видиму зоряну величину Землі і Місяця з поверхні Меркурія, велика піввісь орбіти якого $a_{Mr} = 0,39$ а. о., ексцентриситет $e_{Mr} = 0,21$. Максимальний блиск повного Місяця з Землі $m_{ME} = -12^m,9$, максимальний блиск повної Землі з Місяця $m_{EM} = -16^m$, відстань до Місяця у перицентрі $q_M = 363\,100$ км. Намалюйте схему розташування небесних тіл при максимальному блиску системи Земля – Місяць з Меркурія. Орбіту Землі вважати коловою.

10.4. Комета

Цікава комета, площина орбіти якої співпадає з площиною екліптики, пройде перигелій 21 квітня 2024 року, досягнувши блиску $3^m,3$, та матиме елонгацію 22° . Мінімальна відстань між кометою і Землею становитиме 1,546 а. о. 2 червня 2024 року. Велика піввісь орбіти комети – 17,2045 а. о., ексцентриситет – 0,9546.

Для моменту проходження перигелію кометою оцініть:

- а) відстань від комети до Сонця;
- б) відстань від комети до Землі;
- в) променеву та поперечну компоненти швидкості комети для спостерігача на Землі;
- г) дату наступного мінімального наближення комети до Сонця.

10.5. Подвійна зоряна система

Якщо в подвійній системі зорі знаходяться дуже близько одна до одної, то можливе перетікання речовини з однієї зорі на іншу. При цьому параметри орбіти змінюються з часом, але залишається постійним сумарний кутовий момент системи L .

1. Для системи двох зір, які рухаються по колових орбітах, сумарний кутовий момент задається такою формулою:

$$L = M_1 r_1^2 \omega + M_2 r_2^2 \omega,$$

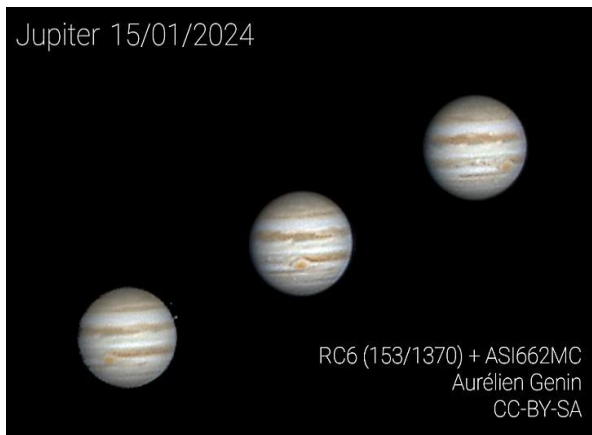
де M_1, M_2 – маси зір, r_1 та r_2 – відстані від зір до центру мас системи, ω – кутова швидкість обертання системи. Виразіть кутовий момент системи через маси зір M_1, M_2 та відстань між ними d .

2. При тривалому спостереженні деякої подвійної системи було виявлено, що за 30 років відстань між зорями зменшилася на $\Delta d = 2 \cdot 10^{-5}$ а. о. відносно початкової відстані $d = 0,1$ а. о. Початкові маси зір в системі $M_1 = 5 M_\odot$ та $M_2 = 3 M_\odot$. Знайдіть, на скільки за ці 30 років змінилася маса кожної зорі в системі? Під час обрахунків можете вважати, що зміни мас набагато менші за початкові маси зір.

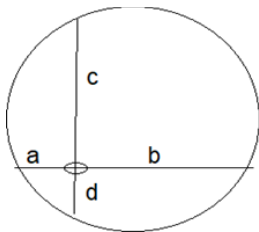
Практичний тур

Загальна кількість балів – 35.

10.1. Обертання Юпітеру: допоможемо юному астроному



Юний астроном побачив на сайті APOD чудову серію світлин Юпітеру, яку Аурельєн Дженін (Франція) отримав 15.01.2024. Він обрав 3 із них, щоб визначити період обертання Великої червоної плями (ВЧП). На трьох зображеннях він виміряв (у міліметрах) положення центру ВЧП відносно країв видимого диска планети за схемою:



	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
1	9	19	19	8
2	14	14	20	9
3	23	5	17	7

Між першою та третьою світлинами минула 1 година 52,5 хвилини.

1. Допоможіть юному астроному обчислити широту та період обертання ВЧП. 2. Чому за обертанням ВЧП не можна визначити період обертання Юпітеру?

Під час розв'язання задачі вважати Юпітер правильною кулею.

Кількість балів – 10.

10.2. Світло та тінь

На фото – Місяць над горою Гривола в Італії. Границі світла й тіні на горі та на Місяці (термінатори) майже співпадають завдяки точно вибраному моменту та положенню фотографа. Гора Гривола розташована у середніх широтах Північної півкулі.

Вважаючи, що термінатор на горі проходить точно вертикально:

- 1) визначте приблизну висоту Сонця над горизонтом у момент зйомки;
- 2) вкажіть, в якій фазі Місяць на зображенні: «молодий» чи «старий»;
- 3) підпишіть місячні моря, видимі на фото;
- 4) оцініть висоту центру диска Місяця над верхівкою гори;
- 5) позначте на фотографії напрямки мінімум трьох сторін горизонту;
- 6) приблизно оцініть, у який день (або дні) року та час доби могла проводитись фотозйомка. Відповідь аргументуйте.



Кількість балів – 10.

10.3. Небесні перегони

Вам надаються екваторіальні координати двох тіл Сонячної системи впродовж місяця на момент 00:00 UTC (див. таблицю).

1. Знайдіть максимально можливі значення висот верхніх кульмінацій для кожного із цих тіл в Києві ($\varphi = 50^\circ$, $\lambda = 2^h 2^m$).
2. Побудуйте траєкторію руху першого тіла по небесній сфері за допомогою координатної сітки із зображенням яскравих зір.
3. У яку дату кутова відстань між тілами буде мінімальна і чому дорівнюватиме?

4. В якому сузір'ї перебуватимуть тіла під час їх мінімального зближення?

5. Яка яскрава зоря найближча до двох об'єктів під час їх мінімального зближення?

6. Вкажіть, які це можуть бути небесні тіла?

Дата	$\alpha_1, (h\ m)$		$\delta_1, (^\circ\ ')$		$\alpha_2, (h\ m)$		$\delta_2, (^\circ\ ')$	
2024-Sep-23	4	21,5	25	43	13	50	-11	11
2024-Sep-24	5	23	27	49	13	54,6	-11	39
2024-Sep-25	6	23,8	28	9	13	59,2	-12	7
2024-Sep-26	7	22,2	26	51	14	3,8	-12	35
2024-Sep-27	8	17,1	24	11	14	8,5	-13	3
2024-Sep-28	9	8,1	20	25	14	13,1	-13	30
2024-Sep-29	9	55,5	15	51	14	17,8	-13	57
2024-Sep-30	10	40,1	10	43	14	22,4	-14	24
2024-Oct-01	11	22,6	5	15	14	27,1	-14	50
2024-Oct-02	12	4,1	0	23	14	31,9	-15	16
2024-Oct-03	12	45,5	-5	59	14	36,6	-15	42
2024-Oct-04	13	27,5	-11	24	14	41,3	-16	7
2024-Oct-05	14	11,2	-16	27	14	46,1	-16	32
2024-Oct-06	14	57,3	-20	57	14	50,9	-16	56
2024-Oct-07	15	46,3	-24	40	14	55,7	-17	20
2024-Oct-08	16	38,6	-27	24	15	0,5	-17	44
2024-Oct-09	17	33,8	-28	53	15	5,3	-18	7
2024-Oct-10	18	31,1	-28	57	15	10,2	-18	30
2024-Oct-11	19	29,3	-27	28	15	15,1	-18	52
2024-Oct-12	20	27	-24	26	15	19,3	-19	14
2024-Oct-13	21	23,4	-19	58	15	24,4	-19	35
2024-Oct-14	22	18,2	-14	16	15	29,7	-19	56
2024-Oct-15	23	11,6	-7	38	15	34,8	-20	16
2024-Oct-16	0	5,2	0	26	15	39,4	-20	36

2024-Oct-17	0	59,3	6	52	15	44,7	-20	55
2024-Oct-18	1	55,4	13	47	15	49,8	-21	14
2024-Oct-19	2	54,2	19	47	15	54,8	-21	32
2024-Oct-20	3	55,9	24	24	15	59,9	-21	50
2024-Oct-21	4	59,3	27	17	16	4,9	-22	7
2024-Oct-22	6	2,9	28	16	16	10	-22	23

Кількість балів – 15.

11 клас

Теоретичний тур

Загальна кількість балів – 50 (за кожну правильну відповідь – 10 балів).

11.1. Комета

Цікава комета, площина орбіти якої співпадає з площиною екліптики, пройде перигелій 21 квітня 2024 року, досягнувши блиску $3^m,3$, та матиме елонгацію 22° . Мінімальна відстань між кометою і Землею становитиме 1,546 а. о. 2 червня 2024 року. Велика піввісь орбіти комети – 17,2045 а. о., ексцентриситет – 0,9546.

Для моменту проходження перигелію кометою оцініть:

- а) відстань від комети до Сонця;
- б) відстань від комети до Землі;
- в) променеву та поперечну компоненти швидкості комети для спостерігача на Землі;
- г) дату наступного проходження перигелію кометою.

11.2. Подвійна зоря

Обидві зорі в подвійній системі є зорями головної послідовності. Промінь зору спостерігача лежить у площині орбіти цієї системи. Її річний паралакс становить $0'',168$. Одна компонента має радіус $1,01 R_\odot$ та температуру фотосфери 6087 К. З кривої блиску з'ясовано, що глибина первинного мінімуму становить $0^m,544$, а вторинного – $0^m,086$. Визначте відстань до цієї зоряної системи, а також радіус і температуру другої компоненти.

11.3. Планетна система TOI-715

Міжнародна група вчених на чолі з Джорджиною Дрансфілд (Georgina Dransfield) з Бірмінгемського університету (Велика Британія) у січні 2024 року опублікувала статтю «*A 1.55 R $\oplus$ habitable-zone planet hosted by TOI-715, an M4 star near the ecliptic South Pole*» в науковому журналі «*A 1.55 Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*».

У ній йдеться про відкриття суперземлі під назвою TOI-715 b, що обертається навколо крихітної червонуватої зорі, яка знаходиться «досить близько» до Сонця – всього за 138,49 світлового року. TOI-715 b за розмірами в півтора раза більша за Землю. Привабливості їй додає те, що вона розташована в зоні, придатній для життя. Разом із цим є припущення про існування другої планети в цій системі – TOI-715 c. Друга планета може бути близькою за розмірами до Землі і перебувати також у зоні, придатній для життя, там, де рідка вода може існувати на поверхні планети.

Припустимо, що ця планета – копія Землі.

1. Якою має бути велика піввісь гіпотетичної планети TOI-715 c, щоб потік випромінювання від зорі на цю планету дорівнював земному?
2. Якою в цьому випадку може бути тривалість року на цій планеті?
3. Оцініть межі зони, придатної для життя, в системі TOI-715 (ефективна температура планети має бути в діапазоні від 0 до 100 °C).

Параметри зорі TOI-715: $M = 0,225 M_{\odot}$, $R = 0,24 R_{\odot}$, $T = 3074 \text{ K}$.
Вважайте, що альbedo та парникові властивості атмосфери планети не залежать від спектрального складу випромінювання зорі й не змінюються під час руху планети.

11.4. Холодні фотони

Сонце робить один оберт навколо центру Галактики за $T = 230$ млн років, а радіус орбіти Сонця дорівнює $R = 27$ тис. св. років.

1. У припущенні, що вся маса Галактики складається з баріонної (видимої) матерії, оцініть середню густину баріонної матерії у Всесвіті. Вважайте, що всі галактики є схожими на Чумацький Шлях, а середня відстань між ними дорівнює $L = 3 \text{ Мпк}$.

2. З дослідження первинного нуклеосинтезу відомо значення баріон-фотонного відношення:

$$\eta = \frac{n_b}{n_\gamma} = 5 \cdot 10^{-10},$$

де n_b , n_γ – середні концентрації баріонів і реліктових фотонів відповідно. Для реліктових фотонів також існує зв'язок між їх концентрацією та температурою

$$n_\gamma = 16\pi \cdot \zeta(3) \left(\frac{k_{\text{BT}}}{hc} \right)^3,$$

де $\zeta(3) \approx 1,2$. Використовуючи ці результати, оцініть сучасну температуру реліктового випромінювання. Використайте припущення, що вся баріонна матерія у Всесвіті складається з гідрогену Н.

11.5. Гравітаційна дисипація

З теорії відомо, що потужність випромінювання енергії гравітаційних хвиль подвійною системою визначається з формули:

$$P = \frac{dE}{dt} = \frac{-32}{5} \frac{G^4 (m_1 m_2)^2 (m_1 + m_2)}{(cr)^5},$$

де r – поточна відстань між тілами, t – час, G – гравітаційна стала, c – швидкість світла, m_1 і m_2 – маси тіл подвійної системи.

1. Знайдіть закон залежності зміни відстані між тілами від часу.

2. Встановіть час, необхідний для злиття компонентів системи, $t_{\text{злиття}}$.

3. Покажіть, що в першому наближенні зменшення відстані між тілами внаслідок дисипації енергії на випромінювання гравітаційних хвиль можна подати формулою:

$$r(t) = r_0 \left(1 - \frac{t}{t_{\text{злиття}}}\right)^{\frac{1}{4}},$$

де r_0 – початкова відстань між компонентами.

Деякі параметри та фізичні сталі

Маса Сонця, $M_{\odot} = 1,989 \cdot 10^{30}$ кг; радіус Сонця, $R_{\odot} = 6,95 \cdot 10^8$ м; ефективна температура Сонця, $T_{\odot} = 5778$ К; велика піввісь орбіти Землі, $a_{\oplus} = 1$ а. о. = 149,6 млн км; ексцентриситет, $e_{\oplus} = 0,0167$.

Стала Планка, $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с; стала Больцмана, $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К; гравітаційна стала, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ м³/(кг с²).

Практичний тур

Загальна кількість балів – 35.

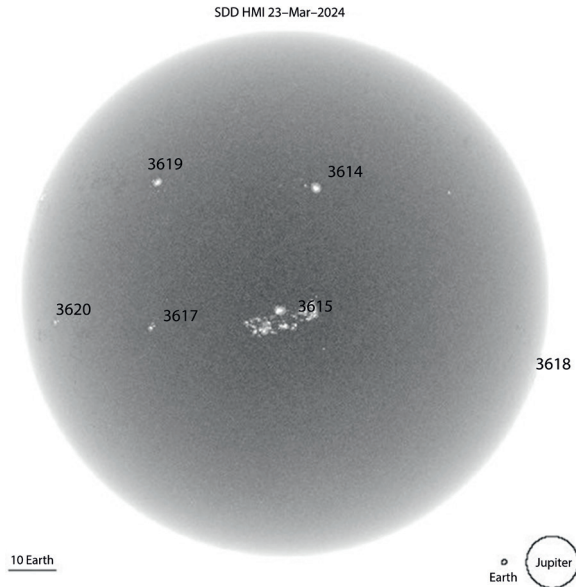
11.1. Негативні білі плями

Дано негатив зображення диска Сонця з плямами (на негативі диск Сонця є темним, а плями, навпаки, білими). Зображення отримані за допомогою космічного апарата SDO, що рухається навколо Землі геосинхронною орбітою.

1. Розрахуйте середнє значення числа Вольфа для 6 зображень ($W = f + 10g$, де W – число Вольфа, f – кількість плям на видимому диску Сонця, g – кількість груп плям на видимому диску Сонця).

2. Розрахуйте лінійний та кутовий розміри найбільшої групи плям. Чи можливо розрізнити її неозброєним, але захищеним оком?

Кількість балів – 10.



11.2. Спектральна плутанина

Астроном, який виявився невпевненим користувачем програм з редагування тексту, перед початком проведення спектральної

класифікації його улюбленої зорі наробив трохи шкоди і переплутав «стандартні» спектри, з якими він мав порівнювати спектр своєї зорі. Спектральні класи у нього вишикувалися в алфавітному порядку, температури зір – у порядку зростання, а зразки спектрів – у зовсім не зрозумілому порядку (див. таблицю нижче).

№	Сп. клас	Температура	Зразок спектра
1	A	3500 K	 1)
2	B	4000 K	 2)
3	F	6000 K	 3)
4	G	7500 K	 4)
5	K	10 000 K	 5)
6	M	20 000 K	 6)
7	O	50 000 K	 7)

Допоможіть нашому астроному відновити таблицю і розставити всі значення на належні місця. Для розташування спектрів у таблиці використовуйте їх порядкові номери, зазначені в першому стовпчику таблиці.

Щоб спростити задачу з відновлення таблиці, вдалося знайти відповідну інформацію: лінії у водневій серії Бальмера мають такі довжини хвиль: $H_{\alpha} = 6563 \text{ \AA}$, $H_{\beta} = 4861 \text{ \AA}$, $H_{\gamma} = 4340 \text{ \AA}$, $H_{\delta} = 4101 \text{ \AA}$. (Співвідношення відстаней між лініями серії є унікальним і не повторюється для жодної іншої серії того самого або іншого хімічного елемента.)

Спектральний клас O характеризується слабкими лініями H серії Бальмера, лініями йонізованого He та потужним ультрафіолетовим континуумом.

Спектральний клас B характеризується лініями H серії Бальмера середньої інтенсивності та лініями нейтрального He.

Спектральний клас A характеризується потужними лініями H серії Бальмера та лініями йонізованих металів.

Спектральний клас F характеризується лініями H серії Бальмера середньої інтенсивності та слабкими лініями йонізованого Ca.

Спектральний клас G характеризується слабкими лініями H серії Бальмера, лініями йонізованого Ca та металів.

Спектральний клас K характеризується лініями йонізованого Ca, Fe, молекул CN та CN. Лінії H серії Бальмера відсутні або ледь помітні.

Спектральний клас M характеризується наявністю молекулярних смуг, зокрема TiO, та лініями нейтральних металів. Лінії H серії Бальмера відсутні.

1. Ідентифікуйте лінії H серії Бальмера хоча б на одному із спектрів і підпишіть їх.

2. Визначте діапазон довжин хвиль, у межах якого отримано спектри (максимальну та мінімальну довжини хвилі на зображенні спектра), вважаючи, що спектр є лінійним (дисперсія не залежить від довжини хвилі).

3. Вважаючи, що всі спектри отримані в однакових умовах і мають однаковий діапазон довжин хвиль, знайдіть і позначте, на яких спектрах присутні такі лінії: CaII ($\lambda_K = 3934 \text{ \AA}$, $\lambda_H = 3968 \text{ \AA}$), CaI ($\lambda = 4227 \text{ \AA}$), NaI ($\lambda_{D1} = 5896 \text{ \AA}$, $\lambda_{D2} = 5890 \text{ \AA}$), CN ($\lambda = 4315 \text{ \AA}$) та молекулярна смуга TiO (λ в околі $6200 \text{ \AA}$).

4. За допомогою отриманих результатів відновіть таблицю і розставте всі значення на належні місця.

Кількість балів – 10.

11.3. Небесні перегони

Вам надаються екваторіальні координати двох тіл Сонячної системи впродовж місяця на момент 00:00 UTC (див. таблицю).

1. Знайдіть максимально можливі значення висот верхніх кульмінацій для кожного із цих тіл в Києві ($\varphi = 50^\circ$, $\lambda = 2^h 2^m$).

2. Побудуйте траєкторію руху тіл небесною сферою за допомогою координатної сітки із зображенням яскравих зір.

3. В яку дату кутова відстань між тілами буде мінімальна і чому дорівнюватиме?

4. В якому сузір'ї перебуватимуть тіла під час їх мінімального зближення?

5. Яка яскрава зоря найближча до двох об'єктів під час їхнього мінімального зближення?

6. Вкажіть, які це можуть бути небесні тіла.

Дата	$\alpha_1, (h\ m)$		$\delta_1, (^{\circ}\ ')$		$\alpha_2, (h\ m)$		$\delta_2, (^{\circ}\ ')$	
2024-Sep-23	4	21,5	25	43	13	50	-11	11
2024-Sep-24	5	23	27	49	13	54,6	-11	39
2024-Sep-25	6	23,8	28	9	13	59,2	-12	7
2024-Sep-26	7	22,2	26	51	14	3,8	-12	35
2024-Sep-27	8	17,1	24	11	14	8,5	-13	3
2024-Sep-28	9	8,1	20	25	14	13,1	-13	30
2024-Sep-29	9	55,5	15	51	14	17,8	-13	57
2024-Sep-30	10	40,1	10	43	14	22,4	-14	24
2024-Oct-01	11	22,6	5	15	14	27,1	-14	50
2024-Oct-02	12	4,1	0	23	14	31,9	-15	16
2024-Oct-03	12	45,5	-5	59	14	36,6	-15	42
2024-Oct-04	13	27,5	-11	24	14	41,3	-16	7
2024-Oct-05	14	11,2	-16	27	14	46,1	-16	32
2024-Oct-06	14	57,3	-20	57	14	50,9	-16	56
2024-Oct-07	15	46,3	-24	40	14	55,7	-17	20
2024-Oct-08	16	38,6	-27	24	15	0,5	-17	44
2024-Oct-09	17	33,8	-28	53	15	5,3	-18	7
2024-Oct-10	18	31,1	-28	57	15	10,2	-18	30
2024-Oct-11	19	29,3	-27	28	15	15,1	-18	52
2024-Oct-12	20	27	-24	26	15	19,3	-19	14
2024-Oct-13	21	23,4	-19	58	15	24,4	-19	35
2024-Oct-14	22	18,2	-14	16	15	29,7	-19	56
2024-Oct-15	23	11,6	-7	38	15	34,8	-20	16
2024-Oct-16	0	5,2	0	26	15	39,4	-20	36
2024-Oct-17	0	59,3	6	52	15	44,7	-20	55
2024-Oct-18	1	55,4	13	47	15	49,8	-21	14

2024-Oct-19	2	54,2	19	47	15	54,8	−21	32
2024-Oct-20	3	55.9	24	24	15	59,9	−21	50
2024-Oct-21	4	59,3	27	17	16	4,9	−22	7
2024-Oct-22	6	2,9	28	16	16	10	−22	23

Кількість балів – 15.

Розв'язання задач

10 клас

Теоретичний тур

10.1. Зоря, планета та космічний корабель

Розв'язання

Нехай R – радіус орбіти, d_1 – відстань між Землею і зорею, d_2 – відстань між кораблем і зорею на момент вимірювання π_2 , M_s – маса зорі, m – маса планети. Тоді:

$$\pi_1 = \frac{R}{d_1}; \pi_2 = \frac{R}{d_2}; \Delta d = d_1 - d_2.$$

Звідси:

$$R = \frac{\pi_1 \pi_2 \Delta d}{\pi_2 - \pi_1};$$

$$V = \frac{2\pi R}{T};$$

$$m \frac{V^2}{R} = G \frac{m M_s}{R^2} \rightarrow M_s = \frac{v^2 R}{G};$$

$$M_s = \frac{4\pi^2 (\pi_1 \pi_2 \Delta d)^3}{GT^2 (\pi_2 - \pi_1)^3}.$$

10.2. Зловити полюс у пастку

Розв'язання

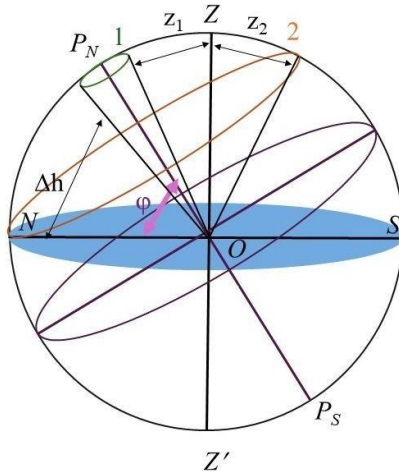
І варіант

Однакові висоти верхніх кульмінацій за різних схилень означають кульмінації по різні боки від зеніту. Припустимо для початку, що ми перебуваємо у Північній півкулі світу. Розглянемо граничний випадок, коли зоря 2 кульмінує на горизонті. Різниця висот нижніх кульмінацій зір 1 і 2 дорівнюватиме сумі зенітних відстаней зір: $\Delta h = z_1 + z_2 = 2(90 - 62) = 56^\circ$. Тоді розмір добового кола зорі 1 доповнює кути Δh та $z_1 = 90 - 62 = 28^\circ$ до 90° (див. рис.). Неважко порахувати, що цей розмір дорівнюватиме 6° та буде тією пасткою, у яку ми маємо помістити полюс світу. Полюс світу буде посередині цього кола, тобто його висота

(яка дорівнює широті) становитиме: $\varphi = \Delta h + \frac{\delta}{2} = 59^\circ$. А схилення зорі 1 при цьому: $\delta_1 = 90 - \frac{\delta}{2} = 87^\circ$. Відповідно, $\delta_2 = \delta_1 - \Delta h = 87 - 56 = 31^\circ$.

Якщо зоря 2 кульмінуватиме вище горизонту, то $\Delta h = \Delta \delta$ залишиться тим самим, а широта може бути дещо більшою, що призведе до зменшення добового кола зорі 1. Другий граничний випадок буде, коли це коло стане нульовим (пастка для полюса максимально стиснеться), тобто коли $\delta_1 = 90^\circ$, $\delta_2 = \delta_1 - \Delta h = 34$. А широта $\varphi = h_1 = 62$.

Таким чином, для Північної півкулі: $\varphi \in [59, 62]$, $\delta_1 \in [87, 90]$, $\delta_2 \in [31, 34]$.



Очевидно, що для Південної півкулі міркування будуть такими самими, але широта та схилення зір будуть від'ємними: $\varphi \in [-62, -59]$, $\delta_1 \in [-90, -87]$, $\delta_2 \in [-34, -31]$.

II варіант (виключно через формули)

Однакові висоти верхніх кульмінацій за різних схилень означають кульмінації по різні боки від зеніту.

Запишемо формули верхніх кульмінацій північніше та південніше зеніту:

$$h_{b1} = 90 - \delta_1 + \varphi = 62, \quad (1)$$

$$h_{b2} = 90 + \delta_2 - \varphi = 62. \quad (2)$$

Склавши ці рівняння, отримаємо умову

$$\delta_1 - \delta_2 = 56, \quad (3)$$

яка обов'язкова для всієї задачі.

Напишемо умову для нижньої кульмінації зорі з меншим схиленням (у цих позначеннях δ_2).

$$h_{n2} = \varphi - 90 + \delta_2 \geq 0. \quad (4)$$

Складаємо нерівність (4) з рівнянням (1), отримуємо:

$$2\varphi - (\delta_1 - \delta_2) \geq 62.$$

Враховуємо умову (3) і отримуємо остаточно:

$$\varphi \geq 59.$$

Відповідно, виражаємо широту за допомогою формули (1), отримуємо умову для δ_1 :

$$\begin{aligned} \varphi = h_{v1} - 90 + \delta_1 &\geq 59, \\ \delta_1 &\geq 87. \end{aligned}$$

Очевидно, що остаточною умовою для δ_1 буде $87 \leq \delta_1 \leq 90$, оскільки схилення більше бути не може.

Тому розглянемо випадок, коли $\delta_1 = 90$. З умови (3) отримуємо:

$$\delta_2 = \delta_1 - 56 = 34.$$

Тоді з формули (1) знаходимо, що широта дорівнює висоті у верхній (та нижній) кульмінації зорі 1, що логічно, бо зоря (гіпотетична) з $\delta_1 = 90$ знаходиться у полюсі світу: $\varphi = h_{v1} = 62$.

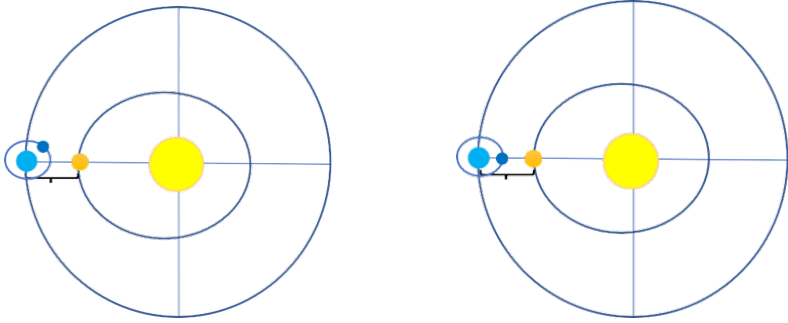
Таким чином, для Північної півкулі: $\varphi \in [59, 62]$, $\delta_1 \in [87, 90]$, $\delta_2 \in [31, 34]$.

Безсумнівно, для Південної півкулі міркування будуть тими самими, але широта та схилення зір будуть від'ємними: $\varphi \in [-62, -59]$, $\delta_1 \in [-90, -87]$, $\delta_2 \in [-34, -31]$.

10.3. Земля і Місяць з Меркурія

Розв'язання

1. Спочатку оцінимо мінімальну можливу відстань між Меркурієм і системою Земля – Місяць (вона схематично зображена на рисунку).



Обидві схеми розташування тіл під час розв'язання приймаються як правильні.

2. Визначимо мінімальну відстань від Землі до Меркурія ($l_{Mr \min} = a_E - Q_{Mr}$):

$$Q_M = a_{Mr}(1 + e_{Mr}) = 0,39(1 + 0,21) = 0,47 \text{ а. о.};$$

$$l_{Mr \min} = a_E - a_{Mr}(1 + e_M) = 1 - 0,47 \approx 0,53 \text{ а. о.}$$

3. Продемонструємо можливість знехтувати максимальною відстанню від Землі до Місяця (d):

$$d = 406\,000 \text{ км} = 0,0027 \text{ а. о.}$$

$$\left(\frac{0,0027 \text{ а. о.}}{0,53 \text{ а. о.}}\right) \cdot 100 \% = 0,51 \% \text{ (відповідно, можна знехтувати).}$$

4. Тепер знайдемо максимальний блиск Місяця з Меркурія (m_{MMr}):

$$m_{MMr} = m_{ME} - 5 \lg\left(\frac{q_M}{l_{Mr \min}}\right);$$

$$m_{MMr} = -12,9 - 5 \lg\left(\frac{363\,100 \text{ км}}{0,53 \text{ а. о.} \cdot 1,5 \cdot 10^8 \text{ км}}\right) = -12,9 + 11,7 = -1,21^m.$$

Також знайдемо максимальний блиск Землі з Меркурія (m_{EMr}):

$$m_{EMr} = m_{EM} - 5 \lg\left(\frac{q_M}{l_{Mr \min}}\right);$$

$$m_{EMr} = -16 - 5 \lg\left(\frac{363\,100 \text{ км}}{0,53 \text{ а. о.} \cdot 1,5 \cdot 10^8 \text{ км}}\right) = -16 + 11,7 = -4,31^m.$$

5. Знайдемо сумарний блиск системи Земля – Місяць з Меркурія:

$$E_{MMr} = 2,512^{1,2} = 3,02;$$

$$E_{EMr} = 2,512^{4,3} = 52,49;$$

$$E_{MMr} + E_{EMr} = 55,51 = 2,512^{-m};$$

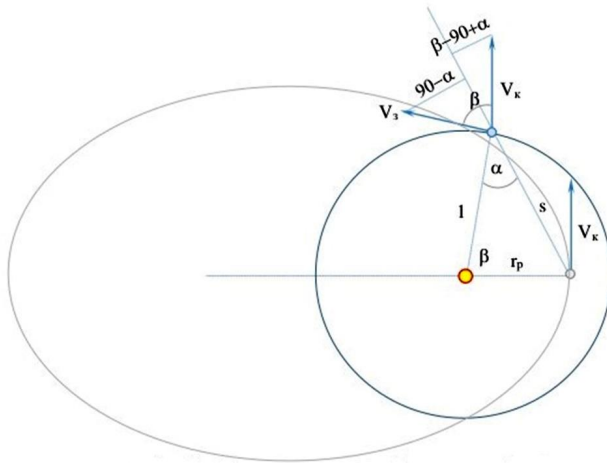
$$m_{\max} = -2,5 \cdot \lg(55,51) = -4,36.$$

10.4. Комета

Розв'язання

а) $r_p = a(1 - c)$, $r_p = 1,546(1 - 0,9546) = 0,7811 \text{ а. о.};$

б)



За теоремою косинусів $r_p^2 = s^2 + 1^2 - 2s \cos \alpha$,

$$s^2 - 2s \cos \alpha + 1^2 - r_p^2 = 0, s^2 - 1,8544s - 0,3899 = 0,$$

$$D = 1,879, \quad s_{1,2} = \frac{1,8544 \pm \sqrt{1,879}}{2}, \quad s_1 = 1,613 \text{ а. о.}$$

$s_2 = 0,242 \text{ а. о.}$ – не відповідає умові мінімальної відстані;

в) швидкість комети у перигелії $V = \sqrt{GM_{\odot} \left(\frac{2}{r_p} - \frac{1}{a} \right)},$

$$V = 47,1 \text{ км/с.}$$

Оскільки Земля в афелії на початку липня, у перигелії – на початку січня, вважаємо, що у квітні відстань від Землі до Сонця 1 а. о. Швидкість Землі:

$$V_3 = \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{1 \text{ а. о.}}} = 29,8 \text{ км/с.}$$

$$\cos \beta = \frac{r_p^2 + 1^2 - s^2}{2r_p} = -0,634, \beta = 129,3^\circ.$$

$$V_k = 47,1 \text{ км/с, } V_3 = 29,8 \text{ км/с.}$$

$$V_{\text{відн}}^2 = v_3^2 + v_k^2 - 2v_3v_k \cos \beta, \quad V_{\text{відн}} = 69,9 \text{ км/с.}$$

$$V_{rk} = V_k \cos(\beta + \alpha - 90) = 22,6 \text{ км/с.}$$

$$V_{r3} = V_3 \cos(90 - \alpha) = 11,2 \text{ км/с, } V_{r \text{ відн}} = V_{rk} - V_{r3} = 11,4 \text{ км/с.}$$

$$V_{tk} = V_k \sin(\beta + \alpha - 90) = 41,3 \text{ км/с,}$$

$$V_{t3} = V_3 \sin(90 - \alpha) = 27,6 \text{ км/с, } V_{t \text{ відн}} = V_{tk} + V_{t3} = 68,9 \text{ км/с.}$$

Наступний перигелій відбудеться орієнтовно 30–31 серпня 2095 року.

$$\begin{aligned} r) T &= a^{3/2}, \quad T = 17,2045^{3/2} = 71,361 \text{ року} = 71 \text{ рік } 132 \text{ доби,} \\ 21 \text{ квітня} + 132 \text{ доби} &= 31 \text{ серпня, } T_{01} = 21.04.2024 + \\ + 71 \text{ рік } 132 \text{ доби} &= 31.08.2095. \end{aligned}$$

10.5. Подвійна зоряна система

Розв'язання

Відстань від зір до центру мас системи:

$$r_1 = \frac{M_2 d}{M_1 + M_2}, \quad (1)$$

$$r_2 = \frac{M_1 d}{M_1 + M_2}. \quad (2)$$

У такому разі кутовий момент системи (момент імпульсу):

$$L = M_1 r_1^2 \omega + M_2 r_2^2 \omega = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} d^2 \omega. \quad (3)$$

Для подвійної системи зір, які рухаються коловими орбітами, відстань між зорями дорівнює великій півосі системи a . Запишемо узагальнений третій закон Кеплера, щоб пов'язати велику піввісь і кутову швидкість обертання системи:

$$\omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{G(M_1 + M_2)}{d^3}. \quad (4)$$

Із співвідношення (4) визначимо кутову швидкість і підставимо у вираз (3):

$$L = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} d^2 \omega = \sqrt{\frac{G(M_1 M_2)^2 d}{M_1 + M_2}}. \quad (5)$$

Розглянемо тепер зміну орбіти через перетікання речовини з однієї зорі до іншої. Очевидно, що при цьому сумарна маса не змінюється:

$$M_1 + M_2 = \text{const.}$$

Це дає змогу пов'язати зміни мас зір: $\Delta M_2 = -\Delta M_1$.

Оскільки в процесі перетікання речовини L не змінюється, то бачимо,

що виконується умова

$$(M_1 M_2)^2 d = \text{const.}$$

Запишемо цей результат для початкового та кінцевого моментів часу:

$$(M_1 M_2)^2 d = (M_1 + \Delta M_1)^2 (M_2 + \Delta M_2)^2 (d - \Delta d). \quad (6)$$

Врахуємо, що зміна відстані є малою ($\Delta d \ll d$), тому зміна маси також буде малою. Розкриємо дужки, залишивши лише доданки, які містять малі величини у першому степені (нехтуємо доданками, що містять ΔM_1^2 , ΔM_2^2 , $\Delta M_1 \Delta d$, $\Delta M_2 \Delta d$), та врахувавши, що $\Delta M_2 = -\Delta M_1$. Після скорочення отримаємо:

$$2d (M_2 - M_1) \Delta M_1 - M_1 M_2 \Delta d = 0. \quad (7)$$

Із (7) знаходимо:

$$\Delta M_1 = \frac{M_1 M_2}{2(M_2 - M_1)} \cdot \frac{\Delta d}{d} = -7,5 \cdot 10^{-4} M_\odot.$$

Тобто маса першої зорі зменшилася. Це означає, що перетікання речовини відбувається від більш масивної зорі до менш масивної. При цьому

$$\Delta M_2 = -\Delta M_1 = 7,5 \cdot 10^{-4} M_\odot.$$

Практичний тур

10.1. Обертання Юпітеру: допоможемо юному астроному

Розв'язання

1. Смуги на зображеннях Юпітеру розміщені таким чином, що показують розташування площини його екватора вздовж променя зору. Це дає змогу визначити широту ВЧП.

Для зображення 2 $a = b$, тому меридіан ВЧП у проєкції є прямою.

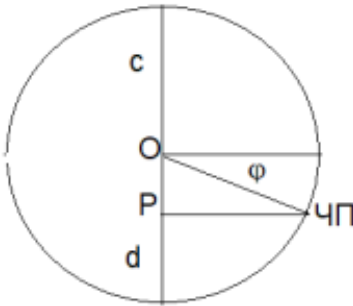


Рис. 1. Визначення широти ВЧП.

Стрілкою показано промінь зору

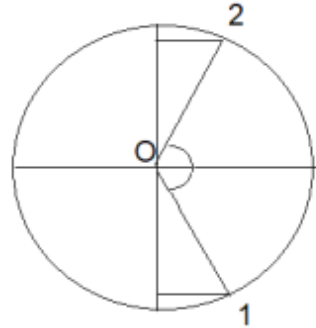


Рис. 2. Визначення кута зміщення ВЧП. Перетин Юпітеру на широті ВЧП

Визначення широти ВЧП. Радіус зображення Юпітеру: $R = \frac{1}{2}(c + d) = 14,5$ мм. З трикутника ОРЧП визначимо кут ЧП, який дорівнює широті ВЧП.

Тобто

$$\varphi = \arcsin((R - d)/R) = 22,3^\circ \approx 22^\circ.$$

2. Визначення періоду обертання ВЧП.

Ми бачимо положення ВЧП на видимому диску у проєкції кулі на картинну площину. Для визначення кута, на який ВЧП змістилася за час спостережень, потрібно розглянути перетин Юпітеру на широті ВЧП.

Радіус перетину відповідає широті ВЧП та дорівнює:

$$R_p = \frac{1}{2}(a_1 + a_3) = \frac{1}{2}(a_3 + a_3) = 14 \text{ мм.}$$

Для 1 кадру кутова відстань ВЧП від центру зображення:

$$\theta_1 = \arcsin((R_p - a_1)/R_p) = 21^\circ$$

$$\theta_3 = \arcsin((R_p - b_3)/R_p) = 40^\circ.$$

За 112,5 хвилини ВЧП змістилася на 61° . Повний оберт вона робить за 11 годин.

Відомо, що ВЧП Юпітеру рухається повільніше, ніж довколишній шар газу, тому період її обертання не вкладається у стандартний закон диференційного обертання планети.

10.2. Світло та тінь

Розв'язання

1. Проводимо термінатор на Місяці. Напрямок на Сонце є перпендикулярним до нього. Визначаємо кут між горизонталлю та напрямком на Сонце (наприклад, за тангенсом $9/130$). Отримуємо кут близько 4 градусів.

2. Фаза – перша чверть. Місяць росте, тобто «молодий».

3. На фото (рис. 1) видно такі моря: Криз (Crisium), Достатку (Fecunditatis), Нектару (Nectaris), Спокою (Tranquillitatis), Ясності (Serenitatis).

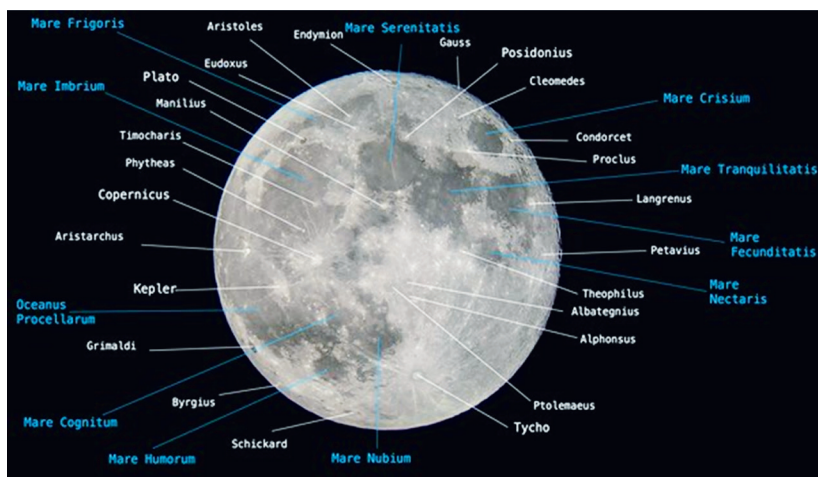


Рис. 1

4. Знаючи, що діаметр Місяця 0,5 градуса, вимірюємо, що центр Місяця перебуває на висоті приблизно 1 градус над верхівкою гори.

5. Виходячи з висоти Сонця, воно може бути на сході або на заході. Але Місяць, що росте, у фазі першої чверті, ми бачимо високо саме на заході Сонця (див. рис. 2, де червона точка – спостерігач, фази Місяця позначено схематично, всі обертання зображено в одній площині. У разі розташування спостерігача у протилежній точці на поверхні Землі, він побачить над головою Місяць, що старіє, і це буде зранку, згідно з обертанням Землі). Тому праворуч – захід, прямо – південь, ліворуч – схід.

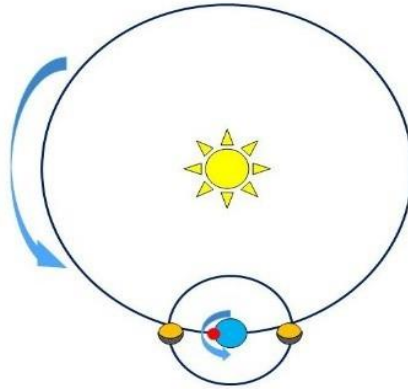


Рис. 2

6. «Молодий» Місяць у фазі першої чверті можна побачити високо над горизонтом (на відміну від Сонця він високо, аж над горою) ввечері, близько 18 години. Це спричинено різницею екліптичної довготи Місяця та Сонця в цій фазі близько 6 годин (див. рис. 2). Сонце при цьому майже сіло (спостерігач – червона крапка на рисунку, напрямок осьового обертання Землі показано синьою стрілкою). А ми знаємо, що Сонце сідає близько 18 години у наближенні до рівнодення дні. *Отже, це вечір близько весняного або осіннього рівнодення.*

Опис фото свідчить про те, що воно було зроблене на початку жовтня, тобто недалеко від осіннього рівнодення:

<https://apod.nasa.gov/apod/ap240122.html>

10.3. Небесні перегони

Розв'язання

1. Тіло 1 має максимальне значення схилення за вказаний період $28^{\circ} 16'$, висота верхньої кульмінації $h = 90 - \varphi + \delta$, тому висота $h = 68^{\circ} 16'$.

Тіло 2 має максимальне значення схилення за вказаний період $-11^{\circ} 11'$, висота верхньої кульмінації $h = 28^{\circ} 49'$.

2. Траєкторія руху тіл по небесній сфері (червоним – тіло 1, зеленим – тіло 2).

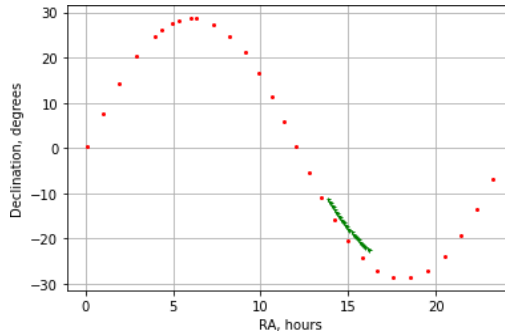


Рис. 1

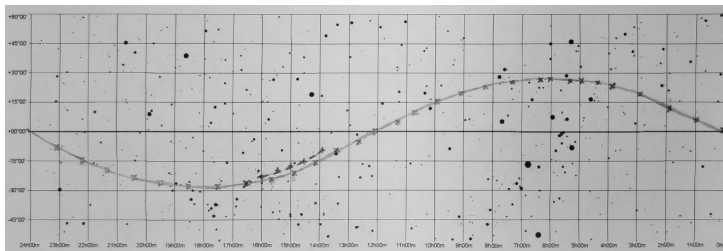


Рис. 2

3. Знайшовши різницю координат на всі дати, бачимо, що мінімальна відстань між тілами буде між датами 5 та 6 жовтня (фактично ввечері 5 жовтня, оскільки дати наведені на 0:00 UTC). Відстань становитиме близько 4° .

Графік залежності різниці положення (кутова відстань у градусах) від дати, починаючи з 23 вересня 2024 року, – на рис. 3.

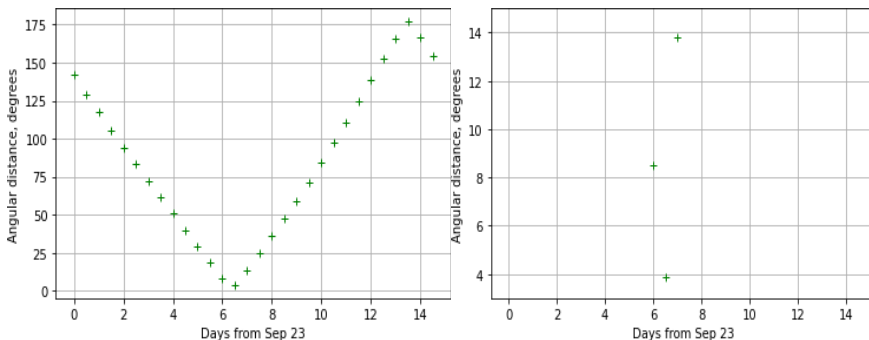


Рис. 3

4. Зближення відбулось у сузір'ї Терезів.

5. Найяскравіша зоря поряд – це альфа Діви (Спіка), також відносно близько альфа Скорпіона (Антарес).

6. Очевидно, що перше тіло – Місяць. Друге, зважаючи на кутову швидкість, – планета земної групи. Оскільки спостереження починаються в день осіннього рівнодення, видно, що тіло 2 на відстані близько 30 градусів від Сонця, тому це не Меркурій. Тіло 2 відносно недалеко від Сонця (30 градусів), Марс поблизу сполучення має не такі високі кутові швидкості, тому тілом 2 може бути лише Венера.

11 клас

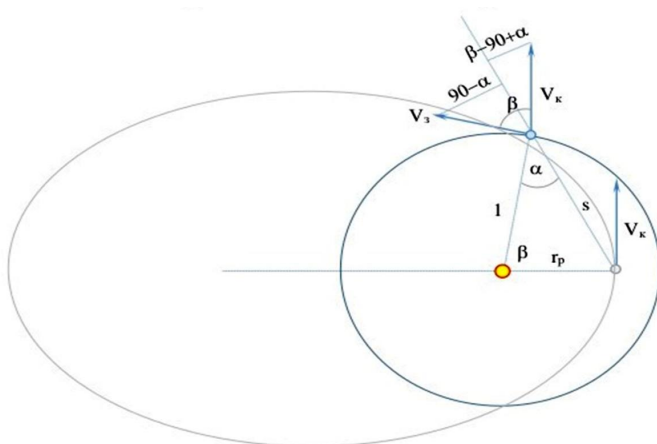
Теоретичний тур

11.1. Комета

Розв'язання

а) $r_p = a(1 - e)$, $r_p = 1,546(1 - 0,9546) = 0,7811 \text{ а. о.}$

б)



За теоремою косинусів $r_p^2 = s^2 + 1^2 - 2s \cos \alpha$, $s^2 - 2s \cos \alpha + 1^2 - r_p^2 = 0$,

$$s^2 - 1,8544s - 0,3899 = 0,$$

$$D = 1,879, \quad s_{1,2} = \frac{1,8544 \pm \sqrt{1,879}}{2}, \quad s_1 = 1,613 \text{ а. о.}$$

$s_2 = 0,242 \text{ а. о.}$ – не відповідає умові мінімальної відстані;

в) швидкість комети у перигелії $V = \sqrt{GM_{\odot} \left(\frac{2}{r_p} - \frac{1}{a} \right)}$,

$$V = 47,1 \text{ км/с.}$$

Оскільки Земля в афелії на початку липня, у перигелії – на початку січня, вважаємо, що у квітні відстань від Землі до Сонця становить 1 а. о.

Швидкість Землі: $V_3 = \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{1 \text{ а. о.}}} = 29,8 \text{ км/с.}$

$$\cos \beta = \frac{r_p^2 + 1^2 - s^2}{2r_p} = -0,634, \quad \beta = 129,3^\circ.$$

$$V_k = 47,1 \text{ км/с, } V_3 = 29,8 \text{ км/с.}$$

$$V_{\text{відн}}^2 = v_3^2 + v_k^2 - 2v_3v_k \cos \beta, V_{\text{відн}} = 69,9 \text{ км/с.}$$

$$V_{rk} = V_k \cos(\beta + \alpha - 90) = 22,6 \text{ км/с.}$$

$$V_{r3} = V_3 \cos(90 - \alpha) = 11,2 \text{ км/с, } V_{r \text{ відн}} = V_{rk} - V_{r3} = 11,4 \text{ км/с.}$$

$$V_{tk} = V_k \sin(\beta + \alpha - 90) = 41,3 \text{ км/с.}$$

$$V_{t3} = V_3 \sin(90 - \alpha) = 27,6 \text{ км/с, } V_{t \text{ відн}} = V_{tk} + V_{t3} = 68,9 \text{ км/с.}$$

Наступний перигелій відбудеться орієнтовно 30–31 серпня 2095 року.

$$\begin{aligned} r) T &= a^{3/2}, T = 17,2045^{3/2} = 71,361 \text{ року} = 71 \text{ рік } 132 \text{ доби,} \\ 21 \text{ квітня} + 132 \text{ доби} &= 31 \text{ серпня, } T_{01} = 21.04.2024 + \\ + 71 \text{ рік } 132 \text{ доби} &= 31.08.2095. \end{aligned}$$

11.2. Подвійна зоря

Розв'язання

$$\text{Відстань до подвійної зорі } r = \frac{1}{\pi} = 5,952 \text{ nk} = 19,4 \text{ св. р.}$$

R_A – радіус більшої компоненти A , T_A – температура її фотосфери, R_B – радіус меншої компоненти B , T_B – її температура.

У максимумі блиску спостерігаємо обидві компоненти, під час первинного мінімуму – проходження меншої компоненти перед більшою, під час вторинного – видно лише більшу компоненту. Тоді з урахуванням законів Погсона, Стефана – Больцмана отримуємо:

$$\frac{E_{\max}}{E_{\min 1}} = \frac{\pi R_A^2 \sigma T_A^4 + \pi R_B^2 \sigma T_B^4}{\pi (R_A^2 - R_B^2) \sigma T_A^4 + \pi R_B^2 \sigma T_B^4} = \frac{R_A^2 T_A^4 + R_B^2 T_B^4}{(R_A^2 - R_B^2) T_A^4 + R_B^2 T_B^4};$$

$$\frac{E_{\max}}{E_{\min 1}} = \frac{1 + \left(\frac{R_B}{R_A}\right)^2 \left(\frac{T_B}{T_A}\right)^4}{1 - \left(\frac{R_B}{R_A}\right)^2 + \left(\frac{R_B}{R_A}\right)^2 \left(\frac{T_B}{T_A}\right)^4} = 2,512^{\Delta m_1} = 2,512^{0,544} = 1,6505;$$

$$\frac{E_{\max}}{E_{\min 2}} = \frac{\pi R_A^2 \sigma T_A^4 + \pi R_B^2 \sigma T_B^4}{\pi R_A^2 \sigma T_A^4} = 1 + \left(\frac{R_B}{R_A}\right)^2 \left(\frac{T_B}{T_A}\right)^4 = 2,512^{0,086} = 1,0824.$$

$$\text{Із цих рівнянь отримуємо, що } \frac{R_B}{R_A} \approx 0,6531; \frac{T_B}{T_A} \approx 0,6629.$$

$$\text{Тоді } R_B = 0,66 R_{\odot}, T_B = 4035 \text{ К.}$$

11.3. Планетна система TOI-715

Розв'язання

1. Для того, щоб тепловий режим на планеті залишався незмінним, таким самим повинен залишатися потік енергії від зорі на відстані l . Цей потік дорівнює:

$$F = \frac{L}{4\pi l^2} = \frac{4\pi\sigma R^2 T^4}{4\pi l^2} = \frac{\sigma R^2 T^4}{l^2}.$$

Для збереження середньої температури повинен зберігатися середній потік, який визначається попередньою формулою шляхом підставлення великої півосі a замість відстані l .

Таким чином, ми маємо:

$$\frac{R_e^2 T_e^4}{a_e^2} = \frac{R^2 T^4}{a^2} \Rightarrow a = a_e \frac{RT^2}{R_e T_e^2} = 0,068 \text{ а. о.}$$

Отже, параметри орбіти цієї планети: $a = 0,068 \text{ а. о.}$, ексцентриситет $e = 0,0167$.

2. Тривалість місцевого року можна знайти з III закону Кеплера, виразивши велику піввісь в астрономічних одиницях, а масу – в масах Сонця:

$$t = \sqrt{\frac{a^3}{M}} = \sqrt{\frac{0,068^3}{0,225}} = 0,037 \text{ року} = 13,5 \text{ доби.}$$

3. Якщо припустити, що зоря випромінює ізотропно і планета перебуває на великій відстані від неї, то потужність, яку поглинає планета, визначається розглядом планети як диска з радіусом r , який перехоплює частину потужності, яка розподіляється по поверхні сфери з радіусом D (відстань від планети до зорі). Розрахунок передбачає, що планета відбиває частину вхідного випромінювання за допомогою параметра, який називається альбедо (a). Альбедо 1 означає, що все випромінювання відбивається, альбедо 0 означає, що все випромінювання поглинається (альбедо для Землі – 0,37). Тоді вираз для поглиненої потужності такий:

$$P_{\text{погл}} = \frac{L\pi r^2(1-a)}{4\pi D^2} = \frac{4\pi R^2\sigma T^4 r^2(1-a)}{4D^2} = \frac{\pi R^2\sigma T^4 r^2(1-a)}{D^2}.$$

Наступне припущення, яке ми можемо зробити, це те, що вся планета має однакову температуру T і що планета випромінює, як чорне тіло. За законом Стефана – Больцмана маємо вираз для потужності, яку випромінює планета:

$$P_{\text{випр}} = 4\pi r^2 \sigma T_{\text{пл}}^4.$$

Шляхом прирівнювання цих двох виразів і їх перегрупування отримуємо вираз для знаходження меж зони, придатної для життя:

$$\frac{\pi R^2 \sigma T^4 r^2 (1 - a)}{D^2} = 4\pi r^2 \sigma T_{\text{пл}}^4 \Rightarrow D = \frac{T^2 R}{2T_{\text{пл}}^2} \sqrt{(1 - a)}.$$

На деякій відстані від зорі температура на поверхні планети дорівнюватиме $T_K = 373$ К (температура кипіння води на Землі за нормальних умов). Саме це значення дає ближню межу D_{min} , де вода може перебувати в рідкому стані. З віддаленням планети від зорі повна світлова енергія, що потрапляє на її поверхню, зменшується, й на деякій відстані від зорі температура поверхні планети буде $T_3 = 273$ К (температура замерзання води на Землі за нормальних умов). Ця відстань дає зовнішню межу D_{max} , до якої вода ще може існувати у рідкому стані.

$$D_{\text{min}} = \frac{T^2 R}{2T_K^2} \sqrt{(1 - a)} = \frac{3074^2 \cdot 0,24 \cdot 6,95 \cdot 10^8}{2 \cdot 373^2} \sqrt{(1 - 0,37)} = 0,03 \text{ а. о.}$$

$$D_{\text{max}} = \frac{T^2 R}{2T_3^2} \sqrt{(1 - a)} = \frac{3074^2 \cdot 0,24 \cdot 6,95 \cdot 10^8}{2 \cdot 273^2} \sqrt{(1 - 0,37)} = 0,056 \text{ а. о.}$$

Під час визначення інтервалу зони, придатної для життя, слід враховувати багато факторів, одним з яких є вплив додаткових парникових газів, таких як CH_4 і H_2 . Наявність таких газів робить цю зону дещо ширшою, ніж та, що передбачається класичним визначенням «habitable zone».

11.4. Холодні фотони

Розв'язання

1. Оцінку для маси Галактики M отримаємо, якщо запишемо рівняння Ньютона для руху Сонця у гравітаційному полі маси M :

$$M_{\odot} \omega^2 R = \frac{G M M_{\odot}}{R^2}.$$

Підставивши $\omega = \frac{2\pi}{T}$, отримуємо формулу для оцінки маси Галактики:

$$M = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2} \approx 1,9 \cdot 10^{41} \text{ кг} = 10^{11} M_{\odot}.$$

Якщо середня відстань між галактиками L , то на одну галактику припадає простір об'ємом L^3 . Тоді середня густина баріонної матерії у припущенні, що всі галактики схожі на Чумацький Шлях і мають однакову масу:

$$\rho_b = \frac{M}{L} \approx 2,4 \cdot 10^{-28} \text{ кг/м}^3.$$

2. Щоб знайти концентрацію реліктових фотонів, обчислимо середню концентрацію баріонів. Для цього вважаємо, що вся баріонна матерія у Всесвіті складається з гідрогену Н. Оскільки маса електрона набагато менша за масу протона, то практично вся маса Всесвіту складається з протонів. Тоді концентрація баріонів:

$$n_b = n_p = \frac{M}{m_p \cdot L^3} = 0,14 \text{ м}^{-3}.$$

З баріон-фотонного відношення знаходимо концентрацію реліктових фотонів:

$$n_\gamma = \frac{n_b}{\eta} = 2,9 \cdot 10^8 \text{ м}^{-3}.$$

Нарешті температура реліктового випромінювання становить:

$$T_{\text{rel}} = \frac{hc}{k_B} \left(\frac{n_\gamma}{16\pi^2 \zeta(3)} \right)^{\frac{1}{3}} = 2,4 \text{ К},$$

що доволі близьке до реального значення $T_{\text{rel}} = 2,725 \text{ К}$, отриманого зі спостережень реліктового фону.

11.5. Гравітаційна дисипація

Розв'язання

1. З теореми віріала випливає, що механічна енергія системи двох гравітаційно пов'язаних мас знаходиться з формули:

$$E_{\text{мех}} = -\frac{Gm_1m_2}{2r}. \quad (1)$$

Запишемо, виходячи з (1), зміну цієї енергії за зміни відстані на dr

$$dE_{\text{мех}} = Gm_1m_2 \frac{dr}{2r^2} = \frac{dE_{\text{мех}}}{dt} dt,$$

звідси:

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= \frac{dE_{\text{мех}}}{dt} \frac{2r^2}{Gm_1m_2} = P \frac{2r^2}{Gm_1m_2} = -\frac{32G^4}{5} \frac{m_1^2m_2^2}{c^5r^5} (m_1 + m_2) \frac{2r^2}{Gm_1m_2} = \\ &= -\frac{64G^3}{5} \frac{m_1m_2}{c^5r^3} (m_1 + m_2).\end{aligned}$$

Отже,

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{64G^3}{5} \frac{m_1m_2}{c^5r^3} (m_1 + m_2). \quad (2)$$

2. Із (2):

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= -\frac{64G^3}{5} \frac{m_1m_2}{c^5r^3} (m_1 + m_2) \rightarrow r^3 dr = \\ &= -\frac{64G^3}{5} \frac{m_1m_2}{c^5} (m_1 + m_2) dt \rightarrow (r^4/4) - (r_0^4/4) = \\ &= -\int_0^t \frac{64G^3}{5} \frac{m_1m_2}{c^5} (m_1 + m_2) dt \rightarrow \\ &\rightarrow r = \left(r_0^4 - \frac{256G^3}{5} \frac{m_1m_2}{c^5} (m_1 + m_2) t \right)^{1/4} \rightarrow \\ &\rightarrow t_{\text{злиття}} = \frac{5}{256 G^3 (m_1 + m_2) m_1 m_2} \frac{r_0^4}{c^5} \\ &t_{\text{злиття}} = \frac{5}{256 G^3 (m_1 + m_2) m_1 m_2} \frac{r_0^4}{c^5}.\end{aligned} \quad (3)$$

3. Виходячи із (3), маємо:

$$\frac{5}{64 G^3 m_1 m_2 (m_1 + m_2)} \frac{c^5}{r_0^4} = \frac{4t_{\text{злиття}}}{r_0^4} \rightarrow \frac{64 G^3 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{5} \frac{r_0^4}{c^5} = \frac{r_0^4}{4t_{\text{злиття}}}.$$

Остання рівність разом з (2)

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{64G^3}{5} \frac{m_1m_2}{c^5r^3} (m_1 + m_2)$$

приводить до рівняння:

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{r_0^4}{4t_{\text{злиття}}r^3}.$$

Звідси після інтегрування маємо:

$$r(t) = r_0 \left(1 - \frac{t}{t_{\text{злиття}}} \right)^{1/4}.$$

Практичний тур

11.1. Негативні білі плями

Розв'язання

1. Визначаємо кількість груп плям та загальну кількість плям.

SDD HMI 23-Mar-2024

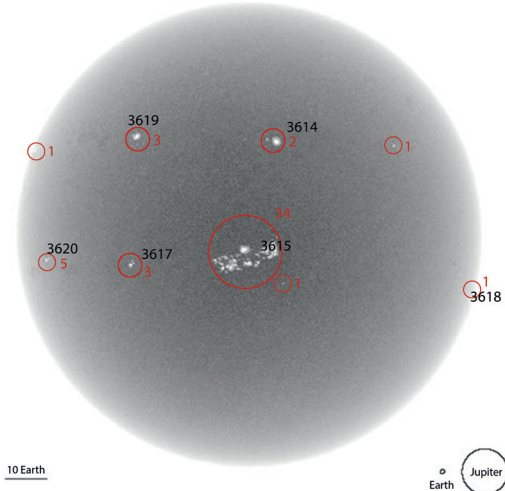


Рис. 1

Зі знімка легко побачити, що кількість груп плям дорівнює 9, а сумарна кількість плям 48. Звідси ми знаходимо число Вольфа:

$$W = f + 10g = 48 + 10 \cdot 9 = 138.$$

2. Для знаходження кутових розмірів найбільшої групи плям вимірюємо розміри зображення Сонця $d_{\odot} = 14,4$ см та найбільші розміри групи плям $l = 2$ см. Знаючи, що приблизні кутові розміри диска Сонця рівні $30'$, ми можемо знайти кутові розміри групи плям:

$$\alpha = \frac{l}{d_{\odot}} 30' = 4,2'.$$

Оскільки роздільна здатність людського ока близька до $1'$, то таку пляму буде видно неозброєним оком.

Знайти лінійні розміри групи плям можна кількома способами:

1) знаючи кутові розміри групи плям і відстань від Землі до Сонця, оцінюємо лінійні розміри:

$$x = 2r_{\oplus} \tan \frac{\alpha}{2} = 183\,000 \text{ км};$$

2) знаючи радіус Сонця, оцінюємо лінійні розміри:

$$x = \frac{l}{d_{\odot}} \cdot 2 \cdot 696\,000 = 193\,000 \text{ км};$$

3) для точного знаходження лінійних розмірів потрібно врахувати, що ми бачимо проєкцію групи плям. Потрібно знайти широти і довготи країв групи. Доцільно вибрати систему координат таким чином, щоб широта країв групи була однаковою.

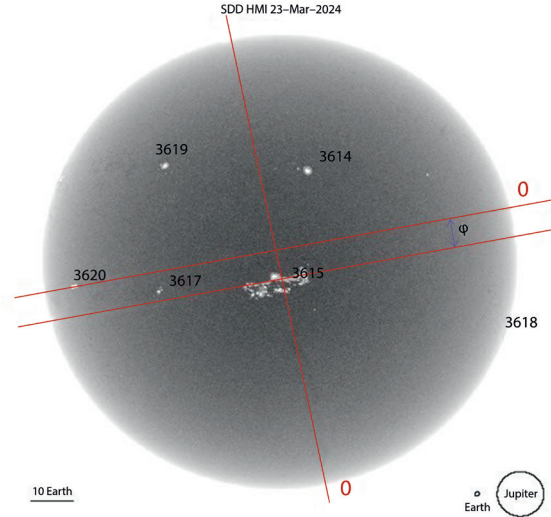


Рис. 2

Знаходимо широту і довготи, а потім знаходимо лінійні розміри:

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{\Delta y}{r_{\odot}}\right) = \arcsin\left(\frac{0,65}{(14,4/2)}\right) = 5,18,$$

$$\lambda_1 = \arcsin\left(\frac{\Delta x_1}{r_{\odot} \cdot \cos \varphi}\right) = -9,63,$$

$$\lambda_2 = \arcsin\left(\frac{\Delta x_2}{r_{\odot} \cdot \cos \varphi}\right) = 7,21,$$

$$x = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{360^\circ} \cdot 2 \cdot \pi \cdot R_{\odot} \cdot \cos \varphi = 204\,000 \text{ км}.$$

11.2. Спектральна плутанина

Розв'язання

1. Серію Бальмера легко побачити на спектрі номер 1 та 7. Першу лінію серії Бальмера, H_{α} ($6562 \text{ \AA}$), легко знайти у правій області спектра

(з червоної сторони). Наступні лінії на спектрі номер 1 та 7 будуть відповідно H β , H γ і так далі.

2. Щоб визначити діапазон довжин хвиль наданого спектра, скористайтесь ототожненими лініями серії Бальмера. Різниця довжин хвиль між сусідніми лініями серії Бальмера H α (6562 Å) і H β (4861 Å) становить 1701 Å. За допомогою лінійки оцінімо масштаб зображення (тобто скільки ангстремів вміщується в міліметрі). Відраховуючи від відомих ліній, отримаємо, що синій край на довжині хвилі 3500 Å, а червоний – на довжині хвилі 7500 Å.

3.

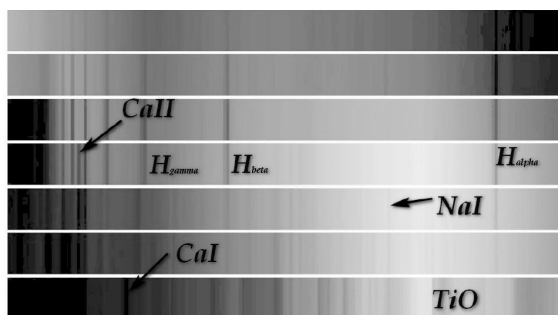


Рис. 1

4. Спектральні класи йдуть у порядку зменшення температур наступним чином: OBAFGKM. Відповідно O – 50 000 K, B – 20 000 K, A – 10 000 K, F – 7500 K, G – 6000 K, K – 4000 K, M – 3500 K.

Зіставляючи спектри з описами для різних спектральних класів, визначаємо відповідність між спектрами та класами: 1 – A, 2 – K, 3 – O, 4 – G, 5 – M, 6 – F, 7 – B.

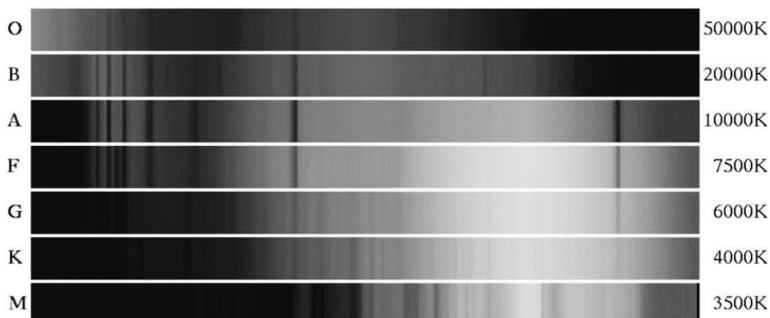


Рис. 2

11.3. Небесні перегони

Розв'язання

1. Тіло 1 має максимальне значення схилення за вказаний період $28^{\circ} 16'$, висота верхньої кульмінації $h = 90 - \varphi + \delta$, тому висота $h = 68^{\circ} 16'$.

Тіло 2 має максимальне значення схилення за вказаний період $-11^{\circ} 11'$, висота верхньої кульмінації $h = 28^{\circ} 49'$.

2. Траєкторія руху тіл по небесній сфері (червоним – тіло 1, зеленим – тіло 2).

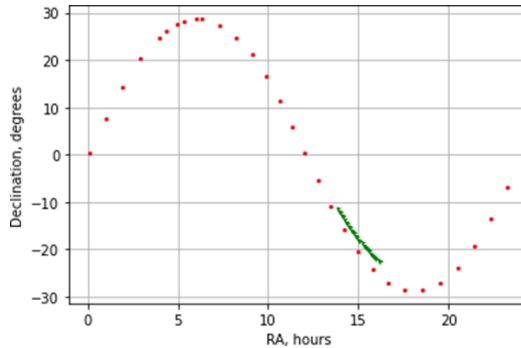


Рис. 1

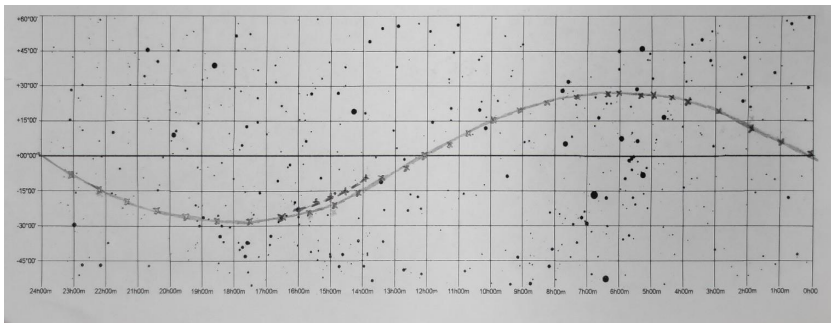


Рис. 2

3. Знайшовши різницю координат на всі дати, бачимо, що мінімальна відстань між тілами буде між датами 5 та 6 жовтня (фактично ввечері 5 жовтня, оскільки дати наведені на 0:00 UTC). Відстань становитиме близько 4° .

Графік залежності різниці положення (кутова відстань у градусах) від дати, починаючи з 23 вересня 2024 року, – на рис. 3.

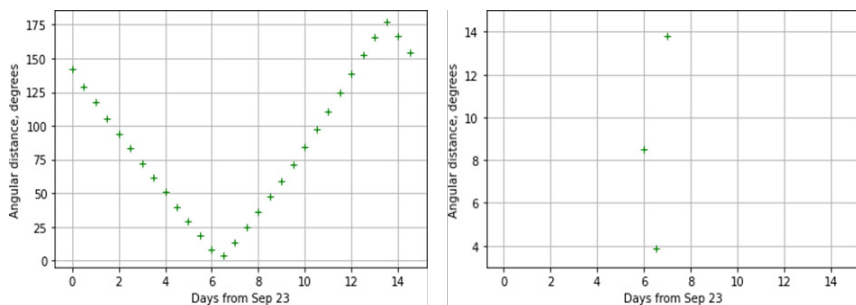


Рис. 3

4. Зближення відбулось у сузір'ї Терезів.

5. Найяскравіша зоря поряд – це альфа Діви (Спіка), також відносно близько альфа Скорпіона (Антарес).

6. Очевидно, що перше тіло – Місяць. Друге, зважаючи на кутову швидкість, – планета земної групи. Оскільки спостереження починаються в день осіннього рівнодення, видно, що тіло 2 на відстані близько 30 градусів від Сонця, тому це не Меркурій. Тіло 2 відносно недалеко від Сонця (30 градусів), Марс поблизу зближення має не такі високі кутові швидкості, тому тілом 2 може бути лише Венера.

Бланк для відповідей до другої частини практичного туру IV етапу XI Всеукраїнської учнівської олімпіади з астрономії

1. Запишіть до таблиці екваторіальні координати, показники кольору (B–V) та спектральні класи для зазначених зір.

Назва	α (J2000,0)	δ (J2000,0)	B–V	Сп. клас	ОС
Алькаїд Alkaid					
Мірфак Mirfak					
Саїф Saiph					
Спіка Spica					
Фомальгаут Fomalhaut					

2. В останньому стовпчику (ОС) позначте символом ГП зорі, що є зорями головної послідовності, символом НГ зорі, що є надгігантами, інші комірки залиште порожніми.

3. У стовпчику «Назва» поставте зірочку (*) поруч із двома зорями, для яких, на вашу думку і відповідно до вашого досвіду, найлегше та найшвидше можна знайти кутову відстань між ними.

4. А тепер знайдіть найлегшим і найшвидшим способом кутову відстань між зорями, які ви самі позначили зірочками.

5. Знайдіть лінійну відстань між зорями (у парсеках), які ви позначили зірочками (*).

Відповіді до другої частини практичного туру IV етапу XI Всеукраїнської учнівської олімпіади з астрономії

Варіант 1

Назва	α (J2000,0)	δ (J2000,0)	B–V	Сп. клас	ОС
Алькаїд Alkaid *	$13^{\text{h}} 46^{\text{m}} 34,03^{\text{s}}$ $206,64^{\circ}$	$+49^{\circ} 18' 38,4''$	–0,09	B3V	ГП
Мірфак Mirfak	$3^{\text{h}} 24^{\text{m}} 17,87^{\text{s}}$ $51,07^{\circ}$	$+49^{\circ} 51' 43,2''$	0,48	F5Ib	НГ
Саїф Saiph	$5^{\text{h}} 47^{\text{m}} 45,02^{\text{s}}$ $86,94^{\circ}$	$-9^{\circ} 40' 21,5''$	–0,15	B0,5Ia	НГ
Спіка Spica *	$13^{\text{h}} 25^{\text{m}} 12,78^{\text{s}}$ $201,30^{\circ}$	$-11^{\circ} 09' 49,0''$	–0,25	B1V	ГП
Фомальгаут Fomalhaut	$22^{\text{h}} 57^{\text{m}} 38,37^{\text{s}}$ $344,41^{\circ}$	$+29^{\circ} 37' 27,2''$	0,13	A4V	ГП

Кутову відстань між зорями можна оцінити як різницю їх схилень, оскільки зорі знаходяться на близьких прямих піднесеннях *: $\delta_1 - \delta_2 = 60,474^{\circ} \approx 60^{\circ}$.

Спочатку знаходимо в програмі відстані до зір Алькаїд і Спіка від Землі:
 $L_A = 103.94$ св.р.
 $L_C = 249.74$ св.р.
 Далі за теоремою косинусів знаходимо відстань між зорями:
 $L_{AC}^2 = L_A^2 + L_C^2 - 2L_A L_C \cos(60,474^{\circ}) = 103.94^2 + 249.74^2 - 2 * 103.94 * 249.74 * \cos(60^{\circ}) \approx 47600 (\text{св.р.})^2$
 $L_{AC} = 218.15$ св.р. $= 218.15 (\text{св.р.}) / 3.26 (\text{св.р.}/\text{пк}) \approx \underline{70 \text{ пк}}$

Варіант 2

Назва	α (J2000,0)	δ (J2000,0)	B–V	Сп. клас	ОС	
Алькаїд Alkaid *	$13^{\text{h}} 46^{\text{m}} 34,03^{\text{s}}$ $206,64^{\circ}$	$+49^{\circ} 18' 38,4''$	–0,09	B3V	ГП	
Мірфак Mirfak *	$3^{\text{h}} 24^{\text{m}} 17,87^{\text{s}}$ $51,07^{\circ}$	$+49^{\circ} 51' 43,2''$	0,48	F5Ib	НГ	
Саїф Saiph	$5^{\text{h}} 47^{\text{m}} 45,02^{\text{s}}$ $86,94^{\circ}$	$-9^{\circ} 40' 21,5''$	–0,15	B0,5Ia	НГ	
Спіка Spica	$13^{\text{h}} 25^{\text{m}} 12,78^{\text{s}}$ $201,30^{\circ}$	$-11^{\circ} 09' 49,0''$	–0,25	B1V	ГП	
Фомальгаут Fomalhaut	$22^{\text{h}} 57^{\text{m}} 38,37^{\text{s}}$ $344,41^{\circ}$	$+29^{\circ} 37' 27,2''$	–0,13	A4V	ГП	

Кутову відстань між зорями можна знайти як різницю їх прямих піднесенень з урахуванням схилення: $(\alpha_1 - \alpha_2)\cos((\delta_1 + \delta_2)/2) \approx 100^\circ$.

Спочатку знаходимо в програмі відстані до зір Алькаїд і Мірфак від Землі:
 $L_A = 103.94$ св.р.
 $L_M = 506.45$ св.р.
 Далі за теоремою косинусів знаходимо відстань між зорями:
 $L_{AM}^2 = L_A^2 + L_M^2 - 2L_AL_M \cos(60.474^\circ) = 103.94^2 + 506.45^2 - 2 * 103.94 * 506.45 * \cos(101^\circ) \approx 269000$ (св.р.)²
 $L_{AM} = 518.37$ св.р. $= 518.37$ (св.р.) / 3.26 (св.р./пк) $\approx \underline{160 \text{ пк}}$.

Варіант 3

Назва	α (J2000,0)	δ (J2000,0)	B-V	Сп. клас	ОС
Алькаїд Alkaid	$13^h 46^m 34.03^s$ $206,64^\circ$	$+49^\circ 18' 38,4''$	-0,09	B3V	ГП
Мірфак Mirfak	$3^h 24^m 17.87^s$ $51,07^\circ$	$+49^\circ 51' 43,2''$	0,48	F5Ib	НГ
Саїф Saiph *	$5^h 47^m 45.02^s$ $86,94^\circ$	$-9^\circ 40' 21,5''$	-0,15	B0,5Ia	НГ
Спіка Spica *	$13^h 25^m 12.78^s$ $201,30^\circ$	$-11^\circ 09' 49,0''$	-0,25	B1V	ГП
Фомальгаут Fomalhaut	$22^h 57^m 38.37^s$ $344,41^\circ$	$+29^\circ 37' 27,2''$	0,13	A4V	ГП

У цьому випадку схилення зір дуже близькі, й косинус їх схилень буде близьким до одиниці, тож ним можна знехтувати:
 $(\alpha_2 - \alpha_1)\cos((\delta_1 + \delta_2)/2) \approx 113^\circ$.

Спочатку знаходимо в програмі відстані до зір Саїф і Спіка від Землі:
 $L_{Ca} = 647.14$ св.р.
 $L_{Cn} = 249.74$ св.р.
 Далі за теоремою косинусів знаходимо відстань між зорями:
 $L_{CC}^2 = L_{Ca}^2 + L_{Cn}^2 - 2L_{Ca}L_{Cn} \cos(60.474^\circ) = 647.14^2 + 249.74^2 - 2 * 647.14 * 249.74 * \cos(113^\circ) \approx 546000$ (св.р.)²
 $L_{CC} = 738.83$ св.р. $= 738.83$ (св.р.) / 3.26 (св.р./пк) $\approx \underline{230 \text{ пк}}$.

Список літератури

Математика

1. Інтерактивні симуляції для природничих наук і математики. URL: <https://phet.colorado.edu/uk/> (дата звернення: 01.06.2024).
2. Контрольні завдання III етапу Всеукраїнського конкурсу-захисту науково-дослідницьких робіт учнів – членів Малої академії наук України у 2018 році. Ч. 1. Київ, 2018. 164 с.
3. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Рабінович Ю. М., Якір М. С. Алгебра. 11 клас : збірник задач і контрольних робіт. Харків : Гімназія, 2011. 96 с. URL: <https://shkola.in.ua/610-algebra-zbirnyk-zadach-11-klas-merzliak.html> (дата звернення: 01.06.2024).
4. Модернізація освіти в цифровому вимірі : монографія / за наук. ред. Н. Морзе, О. Буйницької. Київ : Київ. ун-т ім. Б. Грінченка, 2021. 300 с.
5. Одарченко Н. І., Бондар О. В. Збірник задач зі спецкурсу «Вибрані розділи математики» : навч. посіб. Суми : СумДУ, 2008. 171 с.
6. Олімпіадні задачі: Розв'язання задач II етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2010 : навч. посіб. / Б. Б. Беседін та ін. Вип. 8. Слов'янськ, 2011. 80 с. URL: https://ddpu.edu.ua/fmk/publications/manuals/manual_06.pdf (дата звернення: 01.06.2024).
7. Семеніхіна О., Друшляк М. Принцип когнітивної візуалізації і його використання у навчанні математики. *Фізико-математична освіта*. 2017. Вип. 3. С. 136–140. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/fmo_2017_3_26 (дата звернення: 01.06.2024).
8. Старова О. О. Збірник самостійних та контрольних робіт. Математика. 10 клас. Рівень стандарту. Харків : Вид. група «Основа», 2018. 80 с.

Фізика

1. Білоус С. Ю. Дослідницькі ланцюжки, або Методика динамічного моделювання : навч.-метод. посіб. Київ : Шкільний світ, 2004. 68 с.
2. Віктор П. А. Фізика. Коливання і хвилі. Т. 4. Київ : BookChef, 2022. 416 с.
3. Віктор П. А. Фізика. Молекулярна будова речовини і теплові явища. Т. 2. Київ : BookChef, 2021. 336 с.
4. Віктор П. А. Фізика. Основи електродинаміки. Т. 3. Київ : BookChef, 2021. 496 с.
5. Віктор П. А. Фізика. Основи і механічний рух. Київ : BookChef, 2022. 384 с.
6. Гельфгат І. М., Ненашев І. Ю., Кирик Л. А. Фізика. 10 кл. Запитання, задачі, тести : акад. і профіл. рівні. Харків : Гімназія, 2010. 224 с.

7. Гельфгат І. М. Повний курс шкільної фізики в тестах. Харків : Ранок, 2017. 384 с. (Серія «Енциклопедія тестових завдань»).
8. Гудзь В. В., Репей В. І., Репей Л. М. Конспекти та приклади розв'язування задач з фізики. 9 клас. URL: https://mandrivets.com/wp-content/uploads/2020/08/Konspekty_kontrolni_Fizyka-9-kl-2020.pdf (дата звернення: 01.06.2024).
9. Збірник задач з електродинаміки / М. В. Блажисівська, О. І. Григорчак, Ю. С. Криницький та ін. ; за ред. Ю. С. Криницького та А. А. Ровенчака. Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2015. 112 с.
10. Контрольні завдання III етапу Всеукраїнського конкурсу-захисту науково-дослідницьких робіт учнів – членів Малої академії наук України у 2018 році. Ч. 1. Київ, 2018. 164 с.
11. Математичне моделювання в науково-технічних дослідженнях. Моделювання у середовищі Wolfram Mathematica : навч.-метод. посіб. / уклад.: М. Р. Петрик, І. В. Бойко. Тернопіль : Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, 2017. 108 с.
12. Римкевич А. П. Збірник задач з фізики для 9–11 класів середньої школи. 12-те вид. Харків : ББН, 2002. 208 с. URL: <https://chtivo.org.ua/literature/navchalna/2017-zbirnik-zadach-z-fiziki-dlja-9-11-klasiv-serednoyi-shkoli.html> (дата звернення: 02.06.2024).
13. Старощук В. Цікаві демонстрації з фізики. Ч. 1. Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2002. 104 с.
14. Старощук В. Цікаві демонстрації з фізики. Ч. 2. Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2003. 88 с.
15. Теплицький І. О. Елементи комп'ютерного моделювання : навч. посіб. Кривий Ріг : КДПУ, 2010. 264 с.
16. Фізика. 9 клас. Мій клас. URL: <https://www.miyklas.com.ua/p/fzika/9-klas> (дата звернення: 02.06.2024).
17. Чернецький І. С., Сліпухіна І. А., Поліхун Н. І. Фізика. Прикладні методики інструментальної цифрової дидактики : навч.-метод. посіб. Київ : Національний центр «Мала академія наук України», 2020. 204 с.
18. Щербина Т. Чому? Цікаві питання з фізики. 7–9 клас. Київ : Редакції загальнопедагогічних газет, 2003. 128 с. (Бібліотека «Шкільного світу»).
19. Щербина Т. Чому? Цікаві питання з фізики. 10 клас. Київ : Редакції загальнопедагогічних газет, 2003. 128 с. (Бібліотека «Шкільного світу»).
20. Щербина Т. Чому? Цікаві питання з фізики. 11 клас. Київ : Редакції загальнопедагогічних газет, 2004. 112 с. (Бібліотека «Шкільного світу»).

Астрономія

1. Астрономічний енциклопедичний словник / за заг. ред. І. А. Климишина та А. О. Корсунь. Київ : ГАО НАН України ; Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2003. 548 с. URL: <https://astro.lnu.edu.ua/astro/> (дата звернення: 30.06.2024).
2. Вавилова І. Б., Кудря Ю. М., Василенко А. А., Бабик Ю. В. Позагалактична астрономія. Кн. 2. Галактики: багатохвильові властивості : навч. посіб. Київ : Наукова думка, 2023. 446 с.
3. Відьмаченко А. П., Мороженко О. В. Порівняльна планетологія : навч. посіб. Київ : ТОВ ДІА, 2013. 552 с. URL: https://www.mao.kiev.ua/index.php/ua/pdf-opener?2013_Planetology_KB (дата звернення: 07.06.2024).
4. Віртуальний STEM-центр Малої академії наук України. URL: <https://stemua.science/> (дата звернення: 28.06.2024).
5. Головатий В. В., Мелех Б. Я., Гаврилова Н. В. Фізика світіння газових туманностей : навч. посіб. Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2013. 130 с. URL: http://physics.lnu.edu.ua/wp-content/uploads/Book_5_04_2013.pdf (дата звернення: 01.06.2024).
6. Захожай В. А. Вступ до астрофізики та космогонії : підруч. Харків : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2017. 208 с. URL: https://karazinbook.com/sites/default/files/books/zahozhay_vesproba_2016.pdf (дата звернення: 01.06.2024).
7. Захожай В. А., Захожай О. В. Основи елементарної астрономії : навч. посіб. Харків : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2021. 232 с.
8. Кузьменков С. Г. Збірник задач з теорії ймовірностей для фізиків. Херсон : Видавництво ХДПУ, 2002. 112 с.
9. Кузьменков С. Г. Зорі: астрофізичні задачі з розв'язанням : навч. посіб. Київ : Освіта України, 2010. 206 с.
10. Кузьменков С. Г., Сокол І. В. Сонячна система. Збірник задач : навч. посіб. Київ : Вища школа, 2007. 168 с.
11. Новосядлий Б. С. Структура й еволюція Всесвіту : навч. посіб. Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2019. 159 с. URL: <https://physics.lnu.edu.ua/wp-content/uploads/sev.pdf> (дата звернення: 01.06.2024).

Відомості про авторів

МАТЕМАТИКА

Карлова Олена Олексіївна	професорка кафедри математичного аналізу Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, докторка фізико-математичних наук, професорка;
Номіровський Дмитро Анатолійович	професор кафедри обчислювальної математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, доктор фізико-математичних наук;
Рубльов Богдан Владиславович	професор кафедри обчислювальної математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, доктор фізико-математичних наук, заслужений працівник освіти України

ФІЗИКА

Вільчинський Станіслав Йосипович	завідувач кафедри квантової теорії поля Київського національного університету імені Тараса Шевченка, доктор фізико-математичних наук;
Гельфгат Ілля Маркович	учитель Комунального закладу «Харківський фізико-математичний науковий ліцей № 27 Харківської міської ради»;
Дмитрук Ігор Миколайович	завідувач кафедри експериментальної фізики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, доктор фізико-математичних наук, професор;
Зазубик Діана Віталіївна	студентка фізичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка;
Мінаєв Юрій Миколайович	керівник гуртка Комунального закладу «Запорізький обласний центр науково-технічної творчості учнівської молоді “Грані” Запорізької обласної ради», кандидат фізико-математичних наук, доцент;
Олійник Артем Олександрович	учитель Українського фізико-математичного ліцею Київського національного університету імені Тараса Шевченка, доктор філософії в галузі природничих наук;
Орлянський Олег Юрійович	доцент кафедри теоретичної фізики факультету фізики, електроніки та комп’ютерних систем Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара, кандидат фізико-математичних наук;

Пашко Максим Іванович	методист лабораторії фізико-технічних наук Національного центру «Мала академія наук України», учитель Українського фізико-математичного ліцею Київського національного університету імені Тараса Шевченка, вчитель-методист, заслужений вчитель України, нагороджений орденом «За заслуги» II ступеня;
Проценко Юрій Володимирович	учитель Приватної організації (установи, закладу) «Заклад загальної середньої освіти I–III ступенів: початкова школа, гімназія, ліцей – “Науково- дослідницька школа “Базис”»;
Триліс Олександр Васильович	учитель Приватної організації (установи, закладу) «Заклад загальної середньої освіти I–III ступенів: початкова школа, гімназія, ліцей – “Науково- дослідницька школа “Базис”»

АСТРОНОМІЯ

Базей Олександр Анатолійович	доцент кафедри теоретичної фізики та астрономії Одеського національного університету імені І. І. Мечникова, кандидат фізико-математичних наук;
Василенко Володимир Володимирович	молодший науковий співробітник відділу створення навчально-тематичних систем знань Національного центру «Мала академія наук України»;
Глубенок Світлана Валентинівна	вчителька Криворізького Покровського ліцею Криворізької міської ради Дніпропетровської області, вчителька-методистка;
Кошмак Ігор Олександрович	доцент кафедри астрофізики фізичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка, кандидат фізико-математичних наук;
Кулініч Юрій Анатолійович	науковий співробітник відділу релятивістської астрофізики і космології фізичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка, кандидат фізико-математичних наук;
Марсакова Владислава Ігорівна	завідувачка сектору експериментальної діяльності навчально-наукового структурного підрозділу Комунального закладу «Рішельєвський науковий ліцей» «Центр STEM-освіти Одеської області», вчителька, доцентка кафедри фізики та астрономії факультету математики, фізики та інформаційних технологій

	Одеського національного університету імені І. І. Мечникова, кандидатка фізико-математичних наук, доцентка, заслужений працівник освіти України;
Мелех Богдан Ярославович	завідувач кафедри астрофізики фізичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка, доктор фізико-математичних наук;
Мохун Сергій Володимирович	завідувач кафедри фізики та методики її навчання, доцент Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка, кандидат технічних наук, доцент;
Панько Олена Олексіївна	професорка кафедри фізики та астрономії Одеського національного університету імені І. І. Мечникова, докторка фізико-математичних наук, професорка;
Пономаренко Василь Олександрович	учитель Українського фізико-математичного ліцею Київського національного університету імені Тараса Шевченка, вчитель-методист, кандидат фізико- математичних наук;
Решетник Володимир Миколайович	доцент кафедри астрономії та фізики космосу Київського національного університету імені Тараса Шевченка, кандидат фізико-математичних наук, доцент;
Сімон Андрій Олександрович	асистент кафедри астрономії та фізики космосу Київського національного університету імені Тараса Шевченка, методист лабораторії фізико-технічних наук Національного центру «Мала академія наук України», кандидат фізико-математичних наук;
Стельмах Оксана Миколаївна	доцентка кафедри астрофізики фізичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка, докторка фізико-математичних наук;
Фортуна Назарій Павлович	студент фізичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка;
Шевчук Олександр Григорович	доцент кафедри інформаційних технологій, фізико- математичних та економічних наук Ніжинського державного університету імені Миколи Гоголя, заслужений вчитель України

Навчальне видання

**Завдання IV етапу
Всеукраїнських учнівських олімпіад
з навчальних предметів**

2023/2024 навчальний рік

**МАТЕМАТИКА
ФІЗИКА
АСТРОНОМІЯ**

Практикум

Редагування: *Н. І. Гетьман, О. Б. Степанюк,
З. В. Пономаренко, І. В. Братащук*
Дизайн обкладинки *О. А. Чекановська*

У виданні з навчальною метою
використані матеріали, в тому числі ілюстративні,
що містяться у вільному доступі в мережі Інтернет

Формат 60×84 1/16. Папір офс. 80 г/м².
Друк цифровий. Ум. друк. арк. 9,3.
Наклад 300 прим.

Видавництво: Національний центр «Мала академія наук України»,
Кловський узвіз, буд. 8, м. Київ, 01021
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 6999 від 04.12.2019

