Міністерство освіти і науки України
Національна академія наук України
Національний центр
«Мала академія наук України»

МАТЕМАТИКА
ЯК ІНСТРУМЕНТ МИСЛЕННЯ

Навчально-методичний посібник

Київ
2024

Міністерство освіти і науки України
Національна академія наук України
Національний центр
«Мала академія наук України»

МАТЕМАТИКА
ЯК ІНСТРУМЕНТ МИСЛЕННЯ

Навчально-методичний посібник

Київ
Національний центр
«Мала академія наук України»
2024

УДК 51
М34

Укладачі:
О. О. Бахчеджиоглу – заступниця директора з навчально-виховної роботи, вчителька математики ПЗО «Ліцей “КМДШ” Осокорки», д. філос. у галузі статистики;
Т. Д. Тимошкевич – методист лабораторії математичних наук НЦ «Мала академія наук України», канд. фіз.-мат. наук

Рецензенти:
О. О. Безущак – деканеса механіко-математичного факультету, професорка кафедри алгебри і комп’ютерної математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, д. фіз.-мат. наук, проф., засл. прац. освіти України;
Ю. С. Мішура – професорка кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, д. фіз.-мат. наук, проф.;
Д. С. Басов – завідувач кафедри математики Науково-дослідницької школи «Базис»

Рекомендовано для використання в освітньому процесі рішенням науково-методичної ради Національного центру «Мала академія наук України» (протокол № 3 від 26.06.2024)

М34 **Математика** як інструмент мислення : навч.-метод. посібник / уклад.: О. О. Бахчеджиоглу, Т. Д. Тимошкевич. — Київ : Національний центр «Мала академія наук України», 2024. — 124 с.
ISBN 978-617-7945-67-2

У навчально-методичному посібнику представлено матеріали для організації освітньої діяльності, спрямованої на формування у вихованців логічного, критичного і креативного мислення в процесі розв’язування математичних задач. Зміст посібника розроблено відповідно до навчальної програми з позашкільної освіти дослідницько-експериментального напряму, що забезпечує єдність планування й реалізації завдань освітньої діяльності та математичного гуртка.

Навчально-методичний посібник адресовано педагогам, які організовують освітню діяльність математичних гуртків у закладах позашкільної або загальної середньої освіти, забезпечують підготовку учнів 8 класу до участі в олімпіадах із математики. Посібник також може бути використаний для організації роботи над дослідницькими проєктами учнів — членів Малої академії наук України.

УДК 51

ISBN 978-617-7945-67-2

Зміст

Вступ

Математика є основою для розвитку логічного мислення, вміння аргументувати та структурувати свої думки. Учні мають різну мотивацію для вивчення математики: хтось бачить у цьому шлях до майбутньої професії, хтось хоче брати участь в олімпіадах, а хтось просто отримує задоволення від розв'язання складних задач.

Задачі з навчально-методичного посібника було розроблено авторами під час їх педагогічної діяльності з метою розвинення в учнів математичного способу мислення, відпрацювання теоретичного матеріалу, формування критичного та нестандартного мислення. Задачі з посібника розраховані на учнів 8 класу і краще засвоюються за наявності досвіду розв'язування тем математичного гуртка для 7 класу, проте можуть використовуватися і без попередньої підготовки як школярами, так і дорослими будь-якого віку.

Посібник містить основні ідеї та теми, що доступні для розуміння на зазначеному етапі шкільного розвитку. Теми розташовані із дотриманням причинно-наслідкових зв'язків і перемежовуються таким чином, щоб схожі теми не розташовувалися підряд, зберігався ефект новизни, цікавіше було розв'язувати задачі та щоб періодично повертатися до основних складових певної теми і, відповідно, покращувати їх розуміння та опанування.

Кожна тема містить:

- вступ, у якому пояснюється необхідна теорія і розбираються приклади задач з цієї теми;
- 5 задач для опрацювання їх на уроці (бажано розв'язати хоча б перші чотири);

- 3 додаткові задачі, підвищеної складності, які розв'язувати не обов'язково, проте вони потрібні для тих, хто розв'язав 5 задач із попереднього пункту або чекає, коли вчитель перевірить його роботу;
- 5 задач для самостійного розв'язування вдома;
- 10 задач до теми (щоб учителі мали можливість замінити перераховані вище задачі, полегшивши чи ускладнивши тему).

Основна увага приділяється опануванню навичок розв'язування задач і розвитку логічного мислення.

Як користуватися посібником

Розбір домашнього завдання. Усі теми, крім першої, варто почати з обговорення домашнього завдання з минулого заняття, до того ж розв'язання задач варто розбирати разом з учнями усього класу. Можна запитати, хто які задачі розв'язав (хто першу, а хто другу тощо), або ж скласти таблицю, вказавши в ній імена вихованців гуртка ліворуч і номери задач вгорі, і попросити учнів позначити ті задачі, що вони розв'язали. Це дуже зручно робити на онлайн-дошці, але й на звичайній дошці в класі теж не складно. Створення такої таблички не обов'язкове, проте допомагає. Учням важливо показати, які задачі вони розв'язали, і оскільки не всі матимуть можливість розповісти про свою роботу біля дошки, відмітка в таблиці «грітиме їм душу». Також, орієнтуючись на табличку, легше викликати дітей таким чином, щоб більше учнів мали змогу виступити перед класом.

Оцінки краще не ставити, у жодному з форматів. Адже через оцінки діти можуть боятися помилятися і пробувати різні підходи, що сповільнює математичний розвиток. Натомість, обговорюючи хибний хід думок, можна привернути увагу до поширених логічних помилок, а отже, запобігти їм у майбутньому. Звернувши увагу на помилку, діти з більшою ймовірністю не зроблять її знову, а головне —

зрозуміють, чому це неправильно. До того ж пояснення поширених помилок кожному учневі окремо ускладнює освітній процес. Якщо ж без оцінювання обійтись ніяк не виходить, краще це зробити у формі підсумкової роботи наприкінці семестру чи року.

Лекційна і демонстраційна частина. Вступні задачі варто продемонструвати на початку уроку. Однієї або двох задач достатньо, інші потрібні для тих, хто працює з підручником самостійно, без допомоги вчителя.

Задачі на урок. Задач для всього гуртка 5, щоб їх можна було розв'язувати в комфортному для учнів темпі. Під час офлайн-навчання варто спілкуватися з учнями по черзі. Вони можуть підходити до вчителя і тихо пояснювати свій розв'язок, щоб інші не чули, або ж можна для цього вийти з класу. Якщо навчання відбувається онлайн, учні можуть надсилати короткі пояснення щодо розв'язання вчителю або, де це доречно, надсилати на перевірку лише відповідь. Таким чином інші учні не зможуть почути розв'язок або його частину і матимуть змогу самостійно розв'язати задачу. Якщо половина всіх учнів уже розв'язали задачу, то можна попросити когось із них розповісти розв'язок біля дошки і після цього переходити до наступної задачі. Якщо задачу довго не вдається розв'язати або ж її здала мала кількість учнів, то можна дати невеличкі підказки, аби прискорити процес, проте варто намагатися, щоб до останньої частини розв'язку діти дійшли самостійно. Якщо хтось хоче здати задачі, проте вже виникла черга з дітей, то їм можна запропонувати розв'язувати задачі далі, за потреби додаткові, і послухати розв'язки після того, як попередня задача буде розібрана біля дошки, або ж послухати в останню чергу після того, як буде розібрана поточна задача.

Додаткові задачі. Задачі підвищеної складності потрібні для того, щоб диференціювати завдання. Якщо учні класу розв'язали 5 задач уроку і лишається досить часу, то можна запропонувати всім додаткові задачі. Також їх можна розбирати під час аналізу домашнього завдання, якщо деякі задачі не були розв'язані на уроці, проте учні змогли розв'язати їх удома.

Задачі до теми. У кінці кожної теми запропоновано ще 10 задач різної складності, щоб можна було замінити деякі задачі уроку, домашнього завдання або додаткові, спрощуючи або ускладнюючи тему.

Рекомендації щодо зміни порядку тем. Загалом можна змінювати порядок вивчення тем, проте не варто порушувати певну їх послідовність. У дужках зазначено, вивчення яких тем має передувати вивченню певних інших тем:

(Графи (степінь вершини)) Графи (дерева);

(Графи (дерева)) Зв'язність графів; формула Ойлера;

(Основна теорема арифметики) Арифметика остач; рівняння в цілих числах: розклад на множники;

(Арифметика остач) Інваріанти; Рівняння в цілих числах: остачі; НСД і НСК; мала теорема Ферма;

(Інваріанти) Розфарбування; дискретна неперервність;

(Правило добутку) Розміщення, перестановки, сполучення;

(Розміщення, перестановки, сполучення) Принцип Діріхле; формула включень-виключень;

(Математична індукція) Орієнтовні графи; трикутник Паскаля та біном Ньютона;

(Орієнтовні графи) Зациклювання; обхід графів; ігри, виграшні позиції;

(Відповідність) Кулі та перегородки;

(Системи числення) Кількість інформації.

1

ГРАФИ (СТЕПІНЬ ВЕРШИНИ)

З'єднані дорогами міста, пов'язані соціальними стосунками люди, вершини багатогранника з його ребрами. Що в них усіх спільного? Усі вони мають множину об'єктів, між якими існують зв'язки. Такі конструкції називають графами і вивчають незалежно від природи об'єктів і зв'язків між ними.

Лекційна частина

Означення 1. Вважається, що граф задано, якщо задано множину його вершин і про будь-яку пару різних вершин відомо, пов'язані вони ребром чи не пов'язані. На малюнку вершини зображуються точками, а ребра — відрізками чи кривими.

Означення 2. Степенем вершини є кількість ребер, що виходить з неї.

Приклад 1. На рисунку 1 наведено три зображення одного і того самого графа. На одному із зображень вершини пронумеровані. Пронумеруйте відповідні вершини на інших зображеннях графа так, щоб однаково пронумеровані вершини були однаково з'єднані.

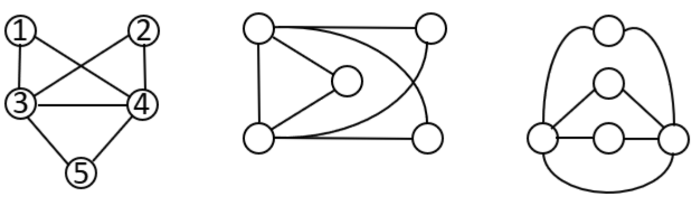


Рис. 1

Розв'язання.

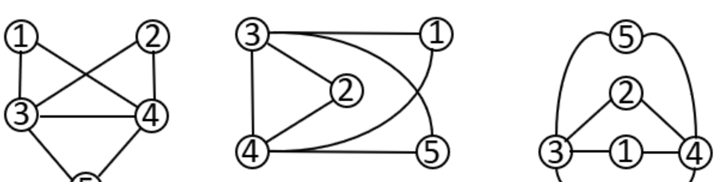


Рис. 2

У графах важливе не розташування вершин, а визначені зв'язки між ними, тобто які вершини з якими з'єднані, а з якими не з'єднані. На рисунку 2 зображений варіант розв'язку, проте він не єдиний.

Означення 3. Графи називаються ізоморфними, якщо їх вершини можна пронумерувати так, щоб однаково пронумеровані вершини обох графів були однаково з'єднані.

Приклад 2. (Лема про рукостискання.) У графі сума степенів усіх вершин дорівнює подвоєній кількості всіх ребер.

Розв'язання. *Сума степенів вершин дорівнює сумі кількості ребер, що виходять з усіх вершин. Оскільки кожне ребро з'єднує рівно дві вершини, то кожне ребро ми рахуватимемо двічі, як те, що виходить із першої вершини, та як те, що виходить із другої. Тому, якщо поділити суму степенів усіх вершин на 2, то отримаємо кількість усіх ребер.*

Приклад 3. Під час гри в шахи у Сашка виникло таке розташування коней у клітинах квадрата 3 × 3: у верхніх кутах двоє чорних коней, а в нижніх білі (рис. 3). Чи можливо розмістити коней одного кольору в протилежних клітинах дошки (рис. 4), рухаючи їх за правилами гри в шахи?

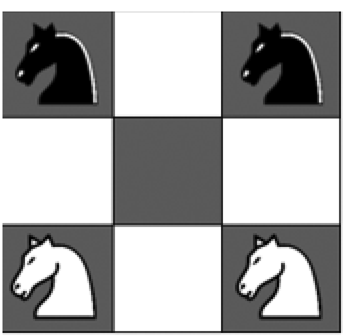


Рис. 3

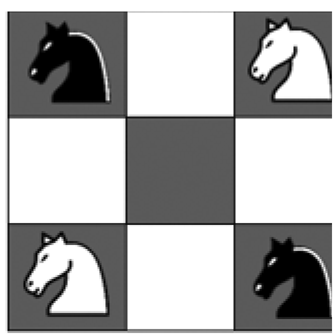


Рис. 4

Розв'язання. *Занумеруємо поля, як показано на рисунку 5.*

Намалюємо граф, що складається з 9 вершин, з номерами від 1 до 9. Дві вершини з'єднаємо між собою, якщо за один хід кінь може перейти з клітини з одним номером в клітину з іншим. Отримаємо графи, зображені на рисунках 6 і 7, що відповідають рисункам 1 і 2 відповідно:

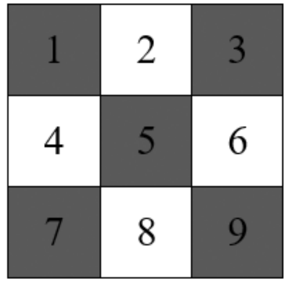


Рис. 5

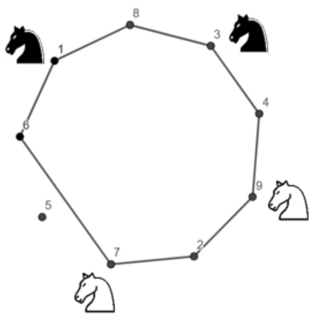


Рис. 6

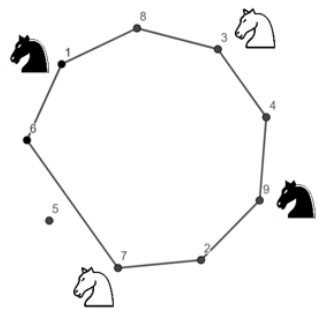
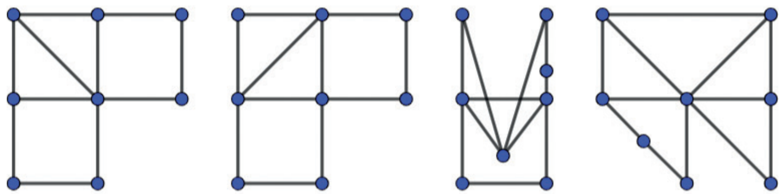


Рис. 7

Ми можемо рухати коней лише по колу. Оскільки на одну клітинку не можна ставити двох коней, ми не можемо змінити послідовність, у якій вони знаходяться. На рисунку 1 вони стоять у порядку: 1 — чорний, 3 — чорний, 9 — білий, 7 — білий. Якщо довільно переставляти коней вершинами графа, порядок їх розташування завжди зберігається: чорний-чорний-білий-білий. Отже, розмістити коней так, як зображено на рисунку 4 (чорний-білий-чорний-білий), з положення, зображеного на рисунку 3, неможливо.

Задачі

1. Чи можуть степені вершин у графі бути рівними:
   а) 8, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 2;
   б) 7, 7, 6, 5, 4, 2, 2, 1;
   в) 6, 6, 6, 5, 5, 3, 2, 2?
2. Чи є серед намальованих на рисунку 8 графів ізоморфні?



а) б) в) г)

Рис. 8

3. Чи можна намалювати 15 кіл так, щоб кожне дотикалося рівно до п'яти інших кіл?
4. Дмитро стверджує, що може розкласти на підлозі 13 олівців (можливо, різних за довжиною) так, що кожен олівець дотикається рівно до п'яти інших. Чи не помиляється Дмитро?
5. Чи правильно, що два графи з наступними степенями вершин — ізоморфні, якщо:
   а) в обох графах степені вершин 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9;
   б) в обох графах степені вершин 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3?

Додаткові задачі

1. Кожен інститут з'єднаний доріжками з десятьма іншими, і з будь-якого інституту можна дістатися будь-якого іншого. Після дощу однією з цих доріжок неможливо пересуватися через великі калюжі. Доведіть, що і тепер із кожного інституту можна дістатися будь-якого іншого.

2. Компанія із семи людей збирається грати в настільні ігри. Відомо, що будь-які шість із них можуть сісти по колу так, що кожні дві сусідні людини будуть знайомі. Доведіть, що і всі сім людей можуть сісти по колу так, щоб кожні два сусіди виявилися знайомими.

3. Чи можна розташувати числа 21, 22, 23, ... , 30 по колу так, щоб будь-які два сусідні числа відрізнялися на 3, 4 або 5?

Задачі для самостійного розв'язування

1. Малюючи країну мрії, в якій є за́мки та стежки між ними, Михайлик малював стежки так, аби з кожного за́мку виходило три стежки. Чи може в країні мрії Михайлика бути 2020 стежок?

2. Чи існує багатогранник, у якому одна грань є трикутником, а всі решта — чотирикутники або шестикутники?

3. Кожні два з 11 наукових закладів з'єднані дорогами. Чи можна кожну з цих доріг пофарбувати в один із 10 кольорів так, щоб від кожного закладу брали початок 10 доріг різного кольору?

4. В одному з відділів наукового інституту працює 28 співробітників. Щодня п'ять із них зустрічаються з директором у його кабінеті для обговорення питань. Чи може так статися, що в певний момент часу кожен співробітник бував із кожним іншим співробітником в кабінеті директора лише один раз?

5. Чи може в компанії з восьми людей кількість друзів у кожної особи бути рівною: 6, 6, 6, 6, 5, 3, 2, 2 відповідно? (Вважаємо дружбу взаємною.)

Задачі до теми

1. Павук плете дивну павутину, у якій 100 вузлів. Будь-які два вузли з'єднані між собою. Скільки ниток виготовив павук, щоб створити павутину?

2. Доведіть, що кількість каланів, які будь-коли жили на землі і непарну кількість разів трималися за лапки з іншим каланом, — парна.

3. У трьох вершинах правильного п'ятикутника знаходиться по одній фішці. Дозволяється їх пересувати на вільну вершину по діагоналі. Чи можна такими діями зробити так, щоб розташування однієї з фішок не змінилося, а дві інші помінялися місцями? [4, с. 32].

4. Під час гри в шахи у Насті виникло питання: чи може кінь, побувавши на всіх клітинках певної фігури і не виходячи за межі цієї фігури, повернутися на ту клітинку, де стояв на початку? Чи можливо це, якщо фігура має форму дошки 4 × 4, з якої вирізані всі кутові клітинки?

5. Уявляючи себе архітектором і граючи з конструктором-наметом, що складається із стрижнів, скріплених спеціальними кружечками, Павло захотів створити багатогранник, що був би складений за допомогою рівно семи стрижнів. Доведіть, що саме із такою кількістю стрижнів побудувати багатогранник не вийде.

6. Кожен із семи хлопчиків має серед інших не менше трьох братів. Доведіть, що всі семеро — брати [1, с. 177].

7. У страховій компанії кожен чоловік дружить із п'ятьма чоловіками і десятьма жінками, а кожна жінка — з дев'ятьма чоловіками і шістьма жінками. Кого в цій компанії більше — чоловіків чи жінок?

8. Кожна деталь конструктора — фігура, схожа на літеру П, що складається з трьох одиничних відрізків. Чи можна з деталей цього конструктора спаяти повний каркас куба 2 × 2 × 2, розбитого на кубики 1 × 1 × 1? Каркас має 27 точок, що з'єднані одиничними відрізками. Будь-які дві сусідні точки мають бути з'єднані одним відрізком.

9. Чи може існувати компанія зі 100 людей, кожен з яких здійснив відповідно 1, 1, 2, 2, ..., 50, 50 рукостискань з іншими учасниками компанії?

10. Після вечірньої гри в шахи Тетянці наснився сон, в якому всі шахові фігури перетворилися на коней. Маючи повну шахову дошку 5×5 коней, Тетянка зацікавилась, а скільки ж максимально їх можна розставити на дошці так, щоб кожен із них міг бити рівно двох інших. Допоможіть Тетянці знайти відповідь на це запитання.

2 ПОДІЛЬНІСТЬ ТА ОСНОВНА ТЕОРЕМА АРИФМЕТИКИ

Просте число — натуральне число, що має лише два натуральні дільники. Тобто лише два числа, що ділять його націло. За їх допомогою ми можемо побудувати будь-яке натуральне число.

Основна теорема арифметики стверджує, що будь-яке натуральне число, крім 1, однозначно розкладається в добуток простих чисел, що дає можливість перевірки подільності чисел.

Лекційна частина

Означення 1. Число a ділиться на число b націло, або число b націло ділить число a, якщо існує таке ціле число q, що

$$a = bq.$$

Число b називається дільником числа a, ділене a буде кратним числу b, а число q часткою від ділення a на b.

Позначення:

$a \vdots b$ — a ділиться на b націло, або число a кратне числу b.

$b \mid a$ — b ділить a, або b — дільник a.

Основна теорема арифметики

Кожне натуральне число $n > 1$ можна подати як:

$$n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k,$$

де $p_1, \ldots, p_k$ — прості числа. Зауважимо, що таке зображення єдине, якщо не враховувати порядок розташування множників.

Доведення. Поділимо доведення на дві частини: існування розкладання та його єдиність.

Існування розкладання. *Використаємо метод від супротивного. Припустімо, що існують натуральні числа, які не можна розкласти на прості множники. Оскільки розглядаються натуральні числа, то ми можемо взяти найменше таке число, назвемо його n. Число n має бути складеним,* *адже воно більше за 1, і воно не може бути простим, бо інакше подавалося б у вигляді самого себе. Оскільки число n складене, то воно є добутком двох натуральних чисел. Нехай $n = ab$, де обидва числа a та b є натуральними числами, меншими за n. Оскільки числа a та b менші за n, а n найменше число, що не розкладається у вигляді добутку простих чисел, то обидва числа a та b розкладаються у вигляді добутку простих чисел. Але тоді n теж є добутком простих чисел. Суперечність виникла через неправильне припущення. Отже, усі натуральні числа можна розкласти у вигляді добутку простих чисел.*

Єдиність розкладання. *Для доведення єдиності розкладання використаємо лему, доведення якої буде наведене в темі «НСД і НСК».*

Лема Евкліда. *Якщо добуток чисел ab ділиться націло на просте число p, тоді a або b ділитися націло на p.*

Від супротивного: припустімо, що існує не єдине розкладання, тоді число $n = p_1 \cdot ... \cdot p_k = q_1 \cdot ... \cdot q_m$, де числа p_1, ..., p_k, q_1, ..., q_m — прості. Розглянемо рівність $p_1 \cdot ... \cdot p_k = q_1 \cdot ... \cdot q_m$. Добуток $q_1 \cdot ... \cdot q_m$ ділиться націло на p_1, отже, якесь із чисел $q_1 \cdot ... \cdot q_m$ ділиться націло на p_1. Нехай цим числом є число q_l. Оскільки q_l — просте, то $q_l = p_1$. Тоді скоротимо ці множники в лівій і правій частинах рівності. Аналогічно добуток, що залишився в правій частині рівності, ділиться на p_2. А значить, у правій частині рівності знайдеться множник, що дорівнює p_2, скорочуємо їх, і так далі. Оскільки кількість множників в обох частинах рівності скінченна, то за скінченну кількість таких кроків у якійсь зі сторін залишиться число 1. Тоді й з іншої сторони також має залишитись 1, бо 1 не може бути рівне добутку простих чисел. Отже, кількість простих чисел в обох частинах рівності збігається, і кожному числу p_i можна поставити у взаємно однозначну відповідність рівне йому число q_j. Тому числа $q_1 \cdot ... \cdot q_m$ це перестановка чисел $p_1 \cdot ... \cdot p_k$. Суперечність. Отже, таке зображення існує і єдине.

Приклад 1. Чи завжди правильні наведені нижче твердження?

1. Якщо a ділиться націло на 3, то a^2 ділиться націло на 9.
2. Якщо a ділиться націло на 24 і a ділиться націло на 15, то a ділиться націло на 360.
3. Якщо a^2 ділиться націло на 3, то a ділиться націло на 3.
4. Якщо a^2 ділиться націло на 8, то a ділиться націло на 4.
5. Якщо a^2 ділиться націло на 8, то a ділиться націло на 8.

Розв'язання.

1. Так. Оскільки a ділиться націло на 3, то $a = 3k$, для якогось цілого k. Тоді $a^2 = 9k^2$, і за визначенням отримаємо, що a^2 ділиться націло на 9.

2. Ні. Наприклад, $a = 120$, воно ділиться націло на 24 і на 15, але не ділиться націло на 360.

3. Так. Припустімо, що в розкладі числа a на прості множники немає числа 3, тоді в розкладі числа $a \cdot a$ його також немає. Суперечність, отже a ділиться націло на 3.

4. Так. Припустімо, що в розкладі числа a на прості множники число 2 зустрічається максимум один раз. Тоді в розкладі $a \cdot a$ число 2 зустрічається максимум 2 рази. Але якщо a^2 ділиться націло на 8, то в розкладі a^2 на прості множники число 2 має зустрічатися тричі. Суперечність, отже в розкладі числа a множник 2 зустрічається не менш ніж 2 рази, отже число a ділиться на 4.

5. Ні. Для $a = 4$ число a^2 ділиться націло на 8, проте a не ділиться націло на 8.

Приклад 2. Для цілих чисел m і n виконується, що $46m = 59n$. Доведіть, що $m + n$ — складене число.

Розв'язання. *Оскільки $46m = 59n$, у розкладі на прості множники число $46m$ має містити просте число 59. Оскільки розклад числа 46 не містить просте число 59, тоді його містить число m. Отже, $m = 59k$ для якогось цілого k, тоді*

$46m = 46 \cdot 59k = 59n$. Тому $n = 46k$, тому $a + b = 59k + 46k = 105k$, і це число складене, бо ділиться, наприклад, на 3 *і не дорівнює* 3.

Приклад 3. Нехай $p_1, p_2, \dots, p_k$ — прості числа. Доведіть зазначене нижче.

1. Число $p_1 p_2 \cdot \dots \cdot p_k + 1$ має простий дільник, відмінний від $p_1, p_2, \dots, p_k$.
2. Простих чисел нескінченно багато.

Розв'язання.

1. Припустімо, що число $p_1 p_2 \cdot \dots \cdot p_k + 1$ має простий дільник p_i, для $i \in \{1, \dots, k\}$. Тоді $p_1 p_2 \cdot \dots \cdot p_k + 1 = p_i m$, де m якесь натуральне число. Звідси випливає, що $1 = p_i(m - p_1 p_2 \cdot \dots \cdot p_{i-1} p_{i+1} \cdot \dots \cdot p_k)$. Оскільки 1 не ділиться націло на p_i, отримуємо суперечність. Отже, будь-який простий дільник числа $p_1 p_2 \cdot \dots \cdot p_k + 1$ не дорівнює числам $p_1, p_2, \dots, p_k$.

2. Припустімо, що це не так, тоді простих чисел скінченна кількість. Пронумеруємо їх. Нехай усі прості числа це $p_1, p_2, \dots, p_k$. Розглянемо число $p_1 p_2 \cdot \dots \cdot p_k + 1$. З пункту 1 випливає, що число $p_1 p_2 \cdot \dots \cdot p_k + 1$ має простий дільник, відмінний від $p_1, p_2, \dots, p_k$. А отже, ще є просте число, крім чисел $p_1, p_2, \dots, p_k$. Отримали суперечність, адже ми припускали, що, крім чисел $p_1, p_2, \dots, p_k$, більше простих немає. Тому простих чисел нескінченно багато.

Задачі

1. Фізик розповів колезі, що під час візиту до Європейської організації ядерних досліджень дізнався про відкриття нової елементарної частинки. Той розповів іншому колезі, що в Європейській організації ядерних досліджень відкрили дві елементарні частинки. Передаючи новину далі, звичайні дослідники збільшували кількість частинок удвічі, а талановиті — утричі. Зрештою в телевізійних новинах повідомили про відкриття 432 елементарних частинок. Скільки звичайних і скільки талановитих дослідників збільшили кількість елементарних частинок?

2. Чи можна число 100! зобразити у вигляді добутку двох однакових натуральних чисел, тобто чи є воно точним квадратом?

3. Знайдіть найменше натуральне число k, для якого
$$(k + 1)(k + 2)(k + 3)(k + 4) \vdots 1000.$$

4. Степан і Сашко грали в гру, де обирали собі якісь числа від 1 до 10 так, щоб числа не повторювалися і кожне число потрапило в чиюсь групу. Далі знаходили частку від ділення добутку Степанових чисел на добуток Сашкових чисел. Яке найменше ціле число вони могли отримати?

5. На уроці математики вчитель розклав перед учнями картки із числами від 1 до 100. По одному учні мають підходити до парти і забирати всі картки із числами, які на цей момент не мають серед чисел на картках, що лежать на парті, дільників, крім себе самого. Наприклад, перший учень може забрати тільки картку із числом 1. Картки із якими числами заберуть останніми?

Додаткові задачі

1. Чи може Софія в добутку факторіалів від 1! до 100!, тобто $1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot ... \cdot 100!$, викреслити один із них так, щоб отримане число було точним квадратом?

2. Для натурального числа k виписали всі його дільники в ряд за зростанням, крім 1 і самого числа k. Виявилося, що в цьому ряду прості і складені числа чергуються (зокрема, їх не менше двох). Скільки всього дільників має число k?

3. Яка максимальна кількість нулів може бути наприкінці добутку двох трицифрових чисел, у яких використовуються шість різних цифр?

Задачі для самостійного розв'язування

1. Костя перемножував натуральні числа і отримав 12 672. Які числа перемножив Костя, якщо найбільше з них удвічі більше за найменше?
2. Дано п'ять складених чисел, які не перевищують число 120. Доведіть, що якісь два з цих чисел мають спільний дільник більший за одиницю.
3. Знайдіть найменше складене число, на яке не ділиться націло число 80!.
4. Деяке просте число поділили на 60 і в остачі отримали складене число r. Знайдіть усі можливі значення r.
5. Чи може Світлана написати на дошці по колу 8 різних натуральних чисел так, щоб Андрій, які б два числа, що стоять поруч, не обрав, поділивши більше з них на менше, отримав просте число?

Задачі до теми

1. Науковий співробітник із зарплатою 10 000 гривень прийшов поінформувати директора інституту про свої плани. Якщо директор схвалює наміри працівника, то одразу збільшує його зарплату на 30 %, а якщо не схвалює — одразу зменшує на 30 %. Врешті зарплата наукового співробітника становила 8281 грн. Про скільки своїх задумів він повідомив і скільки з них схвалив директор?
2. Чи може факторіал числа, тобто $k!$, націло ділитися на 10^5, проте не ділитися на 10^6?
3. На дошці написано 14 натуральних чисел (не обов'язково різних). Якщо ці числа збільшити на 1, то їх добуток збільшиться в 2021 раз. Наведіть приклад чисел, що могли бути на дошці.

4. Знайдіть найменше натуральне k, для якого число 2021! не ділиться націло на $38k$.

5. Чи існує таке натуральне число, що, перемноживши всі його натуральні дільники, отримаємо число, яке закінчується рівно 2021 нулем?

6. Доведіть, що існує таке натуральне k, що числа $k + 1$, $k + 2$, ..., $k + 2021$ — складені.

7. Натуральне число називається дивовижним, якщо найбільший його дільник, що не дорівнює самому числу, на 1 більше, ніж квадрат найменшого дільника, що не дорівнює 1. Знайдіть усі дивовижні числа і доведіть, що інших немає.

8. Додавши три різні найменші дільники загаданого Орисею числа, Максим отримав число 8. На скільки нулів може закінчуватися загадане Орисею число?

9. Розташуйте 10 чисел по колу так, щоб виконувалися дві умови: 1) будь-які два числа, які стоять поруч, мають спільний дільник (відмінний від 1); 2) будь-які два числа, які не стоять поруч, є взаємно простими.

10. Тарас виконує такі дії: спочатку знаходить суми всіх дільників однакової парності (тобто окремо всіх непарних дільників, окремо всіх парних дільників) деякого парного числа. Потім знаходить добуток двох отриманих сум. Чи може цей добуток бути точним квадратом?

3 КОМБІНАТОРИКА. ПРАВИЛО ДОБУТКУ І СУМИ

У цій темі розглядаються два основні правила, які використовують для обчислення кількості комбінацій або можливих варіантів комбінацій, наприклад під час підкидання гральних кубиків, купівлі квитків на автобус, прокладання маршрутів по дорогах тощо. Щоб зрозуміти, яке саме правило використовується, потрібно знати, комбінації яких подій ми обчислюємо. Якщо події несумісні (такі, що не можуть відбуватися одночасно), використовується правило суми, тобто для підрахунку ми додаємо кількості комбінацій кожної з подій. Якщо події незалежні (ті, що відбуваються незалежно одна від одної, і ні одна з них не впливає на іншу), використовується правило добутку, тобто потрібно перемножити кількості комбінацій кожної з подій.

Лекційна частина

Правило суми: якщо подія А відбувається у m випадках, а інша подія В, несумісна (не може статися одночасно) з А, відбувається у n випадках, то подія «А або В» відбувається у $m + n$ випадках.

Наприклад. При підкиданні шестигранного кубика із числами на гранях від 1 до 6: подія А — випало парне число, подія В — число 5. Тоді подія А відбувається в трьох випадках: випало або число 2, або число 4, або число 6. А подія В в одному — випало число 5. Тоді подія «А або В» відбувається у чотирьох (3 + 1) випадках: випало або число 2, або число 4, або число 6, або число 5. Звернімо увагу, що події А та В є несумісними.

Правило добутку: якщо подія А відбувається у m випадках, а для кожного з цих випадків подія В відбувається у n випадках, то подія (А; В) відбувається в mn випадках. Це правило можна застосовувати до незалежних подій А та В, коли настання однієї з них не впливає на настання іншої. Наприклад, якщо ми розглянемо кидок двох гральних кубиків, де подія А означає випадання парного числа на першому кубику, а подія В — випадання 6 очок на другому, то події A і B будуть незалежними. Поява будь-якої кількості очок на першому кубику не впливає на подію B, і навпаки. Оскільки подія A відбувається в трьох випадках (випадає число 2, 4 або 6), а подія B — в одному (випадає число 6), то подія «на першому кубику випало парне число, а на другому — 6» відбувається у трьох випадках. Важливо зауважити, що незалежність подій A та B не залежить від результату кидка на кожному з кубиків.

Приклад 1. Є три міста A, B, C та дороги між ними, як зображено на рисунку 9. Скільки всього різних шляхів з A до C, якщо повертатися в місто, у якому вже були, не можемо?

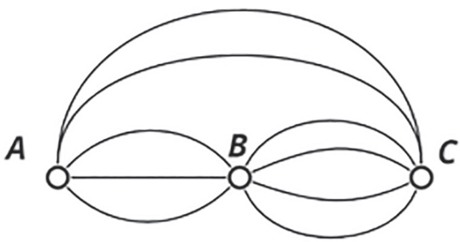


Рис. 9

Розв'язання. *Якщо ми йдемо з* A *до* C *не через місто* B, *тобто двома верхніми дорогами, то матимемо* 2 *варіанти. Якщо будемо йти через* B, *то в нас є* 3 *варіанти, щоб дійти із* A *до* B, *а для кожного з цих трьох варіантів є* 4 *варіанти, як іти з* B *до* C. *Подія обрати дорогу з* A *до* B *і подія обрати дорогу з* B *в* C *є незалежними, оскільки вибір, якою дорогою йти з* B *в* C, *не залежить від того, якою дорогою ми прийшли до міста* B. *Тому ми перемножуємо кількості способів дійти з* A *в* B *та з* B *в* C. *Тоді всього варіантів, як пройти з* A *до* C *через* B, *буде* 4 · 3 = 12. *А от події, як іти з* A *до* C *через* B *і йти з* A *до* C *не через* B, *є несумісними, бо ми не можемо йти одночасно і через* B, *і не через* B. *Тому ці кількості варіантів треба додати. Отримаємо, що загальна кількість шляхів дорівнює* 2 + 12 = 14.

Приклад 2. Соломія знайшла кулю передбачень, яка відповідає «так» або «ні». Вона хоче дізнатися відповіді на три запитання. Скільки різних послідовностей із трьох відповідей вона може отримати?

Розв'язання. *На перше запитання можна отримати дві відповіді — «так» або «ні». Як і на друге й третє. Для кожного варіанта відповіді на перше запитання є два варіанти відповіді на друге. Якщо на перше запитання випадає відповідь «так», то на друге — «так» або «ні». Якщо на перше запитання випадає відповідь «ні», то на друге — «так» або «ні». Тобто подія — відповідь на перше запитання і подія — відповідь на друге запитання є незалежними. Тому кількість різних послідовностей відповідей для перших двох запитань дорівнює* $2 \cdot 2 = 4$*. Для кожного з цих чотирьох варіантів є два варіанти результату відповіді на третє запитання, і ці події знову незалежні. Загальна кількість варіантів дорівнює* $4 \cdot 2 = 8$*.*

Підрахунок кількості комбінацій, які випадають у кулі передбачень, і кількості шляхів між містами (як у попередній задачі) є аналогічними задачами. Це можна побачити на рисунку 10, де зображено послідовність результатів відповідей «так», «ні», «ні», що є аналогією з дорогами між містами.

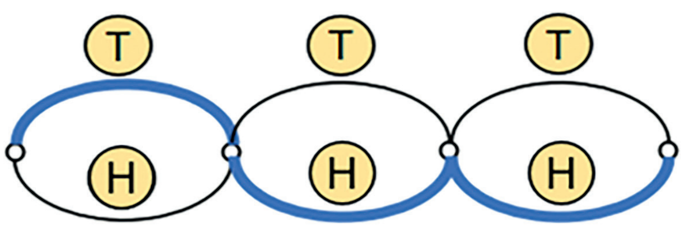


Рис. 10

Приклад 3. Якщо автобусні квитки мають шестизначні номери, від 000000 до 999999:

1. Скільки всього різних номерів?

2. Скільки номерів, усі цифри яких непарні?
3. Скільки номерів, усі цифри яких різні?
4. Скільки номерів, у яких є хоч одна непарна цифра?

Розв'язання.

1. У квитках усього 6 цифр. Для вибору першої цифри маємо 10 *варіантів (від* 0 *до* 9*), для вибору другої теж* 10 *і так далі. Ці варіанти треба перемножити: незалежно від того, скільки ми вже вибрали цифр і які саме, для кожного випадку маємо* 10 *варіантів, що вибирати далі. Тобто для кожного варіанта першої цифри в нас є* 10 *варіантів вибору другої і т. д. Отже, відповідь* $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^6 = 1\,000\,000$.

2. Для вибору першої цифри в нас є 5 *варіантів* (1, 3, 5, 7, 9), *для вибору другої теж* 5 *і так далі. Ми маємо перемножити ці варіанти, бо вони не залежать один від одного. Отже, відповідь* $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^6$.

3. Для вибору першої цифри в нас є 10 *варіантів (від* 0 *до* 9*), для вибору другої вже* 9*, адже всі цифри різні, тому ми вже не можемо брати цифру, яку поставили на перше місце, для вибору третьої буде* 8 *варіантів, четвертої —* 7*, п'ятої —* 6*, і для вибору шостої цифри є* 5 *варіантів. З тих самих міркувань, що і в попередніх пунктах, ми їх маємо перемножити. Отже, відповідь* $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$.

4. Множина всіх номерів — це номери, у яких є хоч одна непарна цифра, і номери, у яких немає жодної непарної цифри. Якщо немає жодної непарної цифри, то всі цифри мають бути парними. Аналогічно до розв'язку пункту 2 *маємо, що таких номерів* 5^6. *З пункту* 1 *ми знаємо, що всього номерів є* 10^6. *Тому кількість номерів, у яких є хоча б одна непарна цифра, — це кількість усіх номерів відняти кількість номерів, у яких усі цифри парні, бо ці події є несумісними. Тому всього номерів, у яких є хоча б одна непарна цифра, буде* $10^6 - 5^6$.

Задачі

1. Автобусні квитки мають шестизначні номери, від 000000 до 999999. Скільки номерів:
   а) у яких будь-які дві сусідні цифри різні;
   б) усі цифри яких мають однакову парність;
   в) містять цифру 4?

2. Компанія з m людей зайшла до кафе, у якому представлено n видів напоїв (кожного напою вистачить на всіх). Скільки є способів купівлі напоїв компанією (якщо кожен придбав рівно один напій)?

3. Скільки способів є для розташування восьми тур на шахівниці, щоб вони не били одна одну?

4. На крайньому лівому полі смужки 1×30 стоїть Тарасик. За один хід Тарасик може переміститися на будь-яку кількість клітинок праворуч. Скільки способів існує, щоб Тарасик дістався тортика, що стоїть у крайньому правому полі?

5. Скількома способами можна обрати групу учнів класу (група може бути порожньою) для участі в олімпіаді, якщо в класі є n учнів?

Додаткові задачі

1. Владислав і Михайло розв’язують дилему. Владислав стверджує, що серед натуральних чисел від одного до мільйона включно більше таких, що зображуються у вигляді суми точного квадрата і точного куба, а от Михайло вважає, що більше тих, що не зображуються у такому вигляді. Хто з них правий?

2. Скільки способів існує для розставлення чисел 1, 2, ..., 21 у рядок так, щоб кожне число, крім одиниці, було більше як мінімум за одне з чисел, що стоять поряд?

3. На всіх клітинках таблиці 8 × 8 Дмитро написав натуральні числа. Сергій може в довільному квадраті розміром 3 × 3 або 4 × 4 збільшити кожне число на 1. Сергій хоче, виконуючи такі операції, зробити так, щоб числа у всіх клітинках ділились на 2. Чи завжди це вдасться зробити Сергію незалежно від того, які числа написав Дмитро?

Задачі для самостійного розв’язування

1. Скільки є дев’ятицифрових чисел, не всі цифри яких є різними?

2. Є множина K з k елементів. Скільки є можливих варіантів вибрати в K дві підмножини M і N так, щоб множина M містилась у множині N?

3. Джедай, розрізаючи листи металу своїм лазерним мечем, розрізав один із слябів металу на 48 однакових прямокутників. Яку найменшу кількість розрізів він міг зробити, якщо будь-які шматки металу можна перекладати, але не можна згинати, а джедай здатний різати одночасно скільки завгодно шарів металу? (Кожен розріз — пряма лінія від краю до краю шматка.)

4. По колу розставили 2021 точку і з’єднали їх усі попарно між собою. Пряма перетинає отриману фігуру, але не проходить через жодну із початкових точок. Доведіть, що ця пряма перетинає парну кількість відрізків.

5. Скількома способами можна прочитати слово «АКАДЕМІЯ» на рисунку 11, рухаючись вправо або вниз?

А К А Д Е М І Я

К А Д Е М І Я

А Д Е М І Я

Д Е М І Я

Е М І Я

М І Я

І Я

Я

Рис. 11

Задачі до теми

1. Скільки існує десятицифрових чисел, у яких всі цифри різні, але цифри 8 і 7 стоять поруч?

2. Є 4 камені із зазначеною на них вагою і терези з двома шальками без стрілки. Яку найбільшу кількість різних за вагою вантажів можна зважити за допомогою цих каменів, якщо камені можна покласти:

а) тільки на одну шальку терезів;
б) на обидві шальки терезів?

3. Маємо множину M з m елементів. Скільки способів існує для того, щоб вибрати в M дві підмножини так, щоб:

а) одна множина була підмножиною іншої;
б) множини не перетинались?

4. Розглянемо нескінченну дошку, розділену на клітинки зі стороною 1. Через A_k позначимо кількість усіх ламаних, що не перетинаються, проходять по лініям сітки, мають довжину k і починаються у певному фіксованому вузлі сітки. Доведіть, що $A_k \cdot 3^{-k} < 2$ для будь-якого натурального k.

5. Мирослава позначила на колі десять точок. Скільки можна провести незамкнених ламаних, що не мають самоперетинів, мають дев'ять ланок і вершини яких розташовані в позначених Мирославою точках?

6. Скільки способів існує для розставлення на шахівниці 8 × 8 тури і короля так, щоб тура била короля, але король не бив туру? Способи розстановки, що виходять один з одного поворотом дошки, вважаються різними.

7. Скільки є чисел, у записі яких є лише цифри 1, 2, 3, 4 та 5, таких, що кратні 4 і менші за 1000?

8. На рисунку 12 зображено міста та як вони з'єднані дорогами. Використовуючи малюнок, знайдіть, скільки існує різних шляхів із міста A в місто D, що проходять через кожне місто рівно один раз?

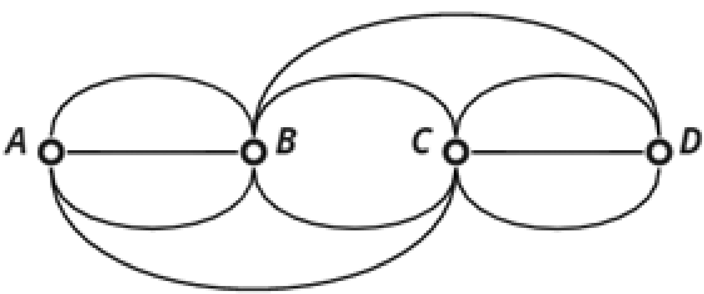


Рис. 12

9. Скільки є чотиризначних чисел, усі цифри яких парні, кожне із чисел ділиться націло на 4 і якщо закреслити останню цифру, то отримане тризначне число не кратне чотирьом?

10. Скільки натуральних дільників, які не є квадратами натуральних чисел, має число $N = 1\underbrace{00\ldots0}_{99}$?

4 ДЕСЯТКОВИЙ ЗАПИС ЧИСЛА. ПОДІЛЬНІСТЬ

У школі вивчається десятковий запис числа, розкладання числа на розрядні доданки, що зручно для прискорення обчислень. У цій темі ми розглянемо задачі, які не зводяться до арифметичних операцій, а потребують доведення, зокрема задачі про подільність чисел, у яких розклад числа на розрядні доданки полегшує розв'язок.

Лекційна частина

Пригадаймо, що запис $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ означає $(n + 1)$ — цифрове число, першою цифрою якого є a_n, другою – a_{n-1}, і так далі, n + 1-ю цифрою є a_0.

$$\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0} = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

Пригадайте та сформулюйте ознаки подільності на 2, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 11, 13.

Приклад 1. Знайдіть трицифрове число, яке:
1. У 15 разів перевищує суму своїх цифр.
2. У 23 рази перевищує суму своїх цифр.

Розв'язання.

1. Нехай трицифрове число, що задовольняє умовам задачі, це $\overline{xyz}$, тоді його сума цифр — це $x + y + z$. З умови маємо таке рівняння: $\overline{xyz} = 15(x + y + z)$. Пригадаймо, що $\overline{xyz} = 100x + 10y + z$. Тоді $100x + 10y + z = 15(x + y + z)$. Звівши подібні доданки, матимемо $85x - 5y = 14z$. Звернімо увагу, що ліва частина рівності ділиться націло на 5, тому і права має ділитися на 5 націло, оскільки 5 і 14 взаємно прості, то z ділиться на 5 націло. Оскільки x, y, z — це цифри, то $z = 0$ або $z = 5$. Якщо $z = 0$, рівняння можна записати у такому вигляді: $85x = 5y$, тобто $17x = y$, тоді y — цифра, яка ділиться на 17. Єдина така цифра — це 0, тоді x теж 0. Маємо суперечність із тим, що дане нам число трицифрове. Отже $z = 5$, рівняння переписується так: $85x - 5y = 70$, скорочуємо $17x - y = 14$. Якщо цифра x буде більша за 1, тоді y буде більше за 10 і, отже, не може бути *цифрою. Маємо єдиний можливий варіант для x, це $x = 1$. Тому отримуємо, що $x = 1$, $y = 3$, $z = 5$. Відповідно, існує єдине число, що задовольняє умові задачі, — це 135.*

2. Нехай трицифрове число, що задовольняє умовам задачі, це $\overline{xyz}$, тоді його сума цифр — це $x + y + z$. Маємо рівняння: $\overline{xyz} = 23(x + y + z)$. Пригадаймо, що $\overline{xyz} = 100x + 10y + z$. Тоді $100x + 10y + z = 23(x + y + z)$. Звівши подібні доданки, матимемо $77x = 13y + 22z$. Помітимо, що $13y = 11(7x - 2z)$, оскільки 11 просте, з леми Евкліда випливає, що цифра y ділитися націло на 11, отже $y = 0$. Переписуємо рівняння $77x = 22z$. Поділивши обидві частини рівності на 11, отримаємо, що $7x = 2z$. Тоді $2z$ ділиться націло на 7, тому $z = 0$ або $z = 7$, але якщо $z = 0$, то $x = 0$, що неможливо. Маємо, що $x = 2$, $y = 0$, $z = 7$. Відповідно, існує єдине число, яке задовольняє умові задачі, — це 207.

Приклад 2. П'ятицифрове число ділиться на 41 націло. Доведіть, що число, записане тими самими цифрами, циклічно зміщеними на один розряд праворуч (тобто цифра розряду сотень стає в розряд десятків, з розряду десятків — в одиниці, з одиниць — у десятки тисяч тощо), також ділиться на 41 націло.

Розв'язання. *Позначимо початкове число за $\overline{abcde}$. Тоді відомо, що $\overline{abcde} \vdots 41$, і потрібно показати, що і $\overline{eabcd} \vdots 41$. Скористаємося рівністю $\overline{eabcd} - 10^4 e = (\overline{abcde} - e) : 10$. Помножимо обидві частини на 10 і перенесемо $10^5 e$ в іншу сторону. Отримаємо $10 \cdot \overline{eabcd} = \overline{abcde} - e + 10^5 e$. Отже, $10 \cdot \overline{eabcd} = \overline{abcde} + 99\,999e$. Оскільки 99 999 ділиться на 41 націло, тоді число $\overline{abcde} + 99\,999e$ буде ділитися на 41 націло. Отже, $10 \cdot \overline{eabcd}$ ділиться на 41 націло, оскільки 10 і 41 взаємно прості числа, то число $\overline{eabcd}$ також ділиться на 41 націло.*

Приклад 3. Відомо, що деяке дев'ятицифрове число після деякої перестановки цифр зменшилося у 8 разів. Знайдіть усі такі числа, в записі яких є всі цифри, крім 0.

Розв'язання. *Назвемо дев'ятицифрове число, у записі якого є всі цифри, крім нуля, хорошим. Розглянемо два найменших хороших числа: найменше* 123 456 789 *і наступне за ним число* 123 456 798. *Якщо збільшити найменше хороше число у* 8 *разів, ми отримаємо число* $8 \cdot 123\,456\,789 = 987\,654\,312$, *яке теж є хорошим. Якщо ж збільшити у* 8 *разів наступне хороше число, що є найменшим хорошим числом з тих, що залишились, то ми отримаємо* $8 \cdot 123\,456\,798 = 987\,654\,384$. *Це вже буде число, більше за найбільше хороше число* 987 654 321. *Тому інші числа не задовольнятимуть умові задачі. Тоді менше з двох шуканих чисел —* 123 456 789, *а більше —* 987 654 312.

Задачі

1. Уважний хлопчик помітив: якщо до двоцифрового номера своєї квартири додати суму його цифр, то отримаєш номер, що записаний тими самими цифрами, але в оберненому порядку. Який номер квартири уважного хлопчика?

2. У прикладі на множення двоцифрових чисел однакові цифри замінили однаковими літерами, а різні — різними. Доведіть, що під час обчислення допущено помилку:
$$\overline{ab} \cdot \overline{cd} = \overline{efef}$$

3. Використовуючи кожну із цифр рівно один раз, складіть найбільше десятицифрове число, що ділиться на 4 націло.

4. Знайдіть усі чотирицифрові числа $\overline{abcd}$ такі, що
$$\overline{abcd} + \overline{abc} + \overline{ab} + a = 2021 \text{ [19, с. 17].}$$

5. Знайдіть найбільше значення, якого може набувати частка після ділення трицифрового числа на суму всіх його цифр.

Додаткові задачі

1. Доведіть, що десятковий запис числа 3^{20} містить не більше 10 цифр.

2. Чи можна знайти чотири послідовні семизначні числа, такі, щоб кожне з них ділилося на добуток його цифр?

3. Один за одним підряд виписали десяткові записи чисел 2^{100} і 5^{100}. Скільки всього цифр виписали?

Задачі для самостійного розв’язування

1. Від чотирицифрового числа відняли суму його цифр. Доведіть, що різниця ділиться на 9.

2. Назвемо натуральне число файним, якщо це число кратне цьому самому числу із викресленою першою цифрою (наприклад, число 125 — файне, адже 125 ⋮ 25 і частка дорівнює 5). Чи існують файні числа, для яких отримана частка дорівнює: а) 2021; б) 2022?

3. Відомо, що при множенні натурального числа на подвоєний добуток його цифр отримали 2022. Знайдіть початкове число.

4. Чи існують такі трицифрові числа, для яких довільне число, що можна отримати будь-якою перестановкою цифр, кратне 7? Знайдіть усі такі числа.

5. Із трьох різних цифр склали всі двоцифрові числа, без повторювання цифр в одному числі. Додавши шість складених двоцифрових чисел, отримали 528. Які три цифри було обрано?

Задачі до теми

1. Поділивши двоцифрове число на суму його цифр, отримали 2. Знайдіть усі такі числа.

2. Знайдіть таке чотирицифрове число $\overline{abcd}$, що $\overline{bc}$ в 5 разів більше за цифру a та в 3 рази більше за цифру d.

3. Дано чотирицифрове число, всі цифри якого різні й відмінні від нуля. У ньому переставили першу і останню цифри, а потім додали отримане число до початкового. Виявилося, що отримана сума ділиться на 91 націло. Доведіть, що початкове число не ділиться на 91 націло.

4. Доведіть, що якщо сума двох цифр x та y кратна семи, то і число $\overline{xyx}$ також кратне семи.

5. Дано непарне шестицифрове число з різних ненульових цифр. Відомо, що воно кратне трицифровим числам, утвореним першими і останніми трьома його цифрами відповідно (без перестановок). Доведіть, що це число ділиться націло на 67.

6. Із чотирьох цифр — 2, 3, 4 та 9 — складають два числа (обмежень щодо кількості використання цифр немає) і знаходять частку отриманих чисел. Чи може знайдена частка дорівнювати 19?

7. Чи може натуральне число, цифри якого стоять у порядку зростання (справа наліво), бути кратним 11?

8. Якщо закреслити крайню зліва цифру в числі, що є степенем двійки, утворюється число, що також є степенем двійки. Знайдіть усі натуральні числа, що задовольняють цій умові.

9. Для яких натуральних n можна знайти такі натуральні числа a та b, що сума цифр кожного з чисел a, b та $a + b$ дорівнює n?

10. На дошці записано таке натуральне число, що не ділиться на 5 націло. Кожну секунду воно змінюється — до нього додається його остання цифра (цифра одиниць). Доведіть, що числа, рівні степені двійки, з'являтимуться на дошці нескінченну кількість разів.

5

ГРАФИ (ДЕРЕВА)

У цій темі ми більш детально познайомимося з поняттям зв'язності простого графа, необхідними супутніми поняттями та конкретним видом зв'язних графів — деревами (рис. 13).

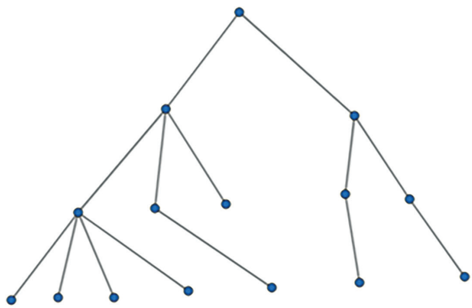


Рис. 13

Лекційна частина

Означення 1. Граф називається зв'язним, якщо між довільною парою вершин цього графа існує шлях.

Означення 2. Компонентою зв'язності графа називається зв'язний підграф, який не з'єднаний з іншими вершинами початкового графа. Зображений на рисунку 14.1 граф має три компоненти зв'язності.

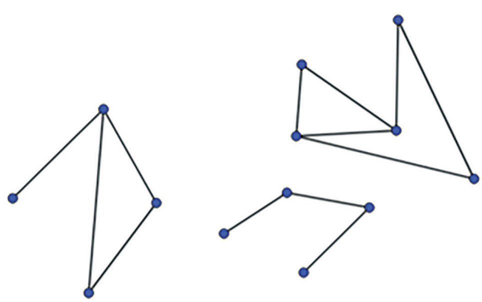


Рис. 14.1

Означення 3. Ребро, після викидання якого кількість компонент зв'язності графа збільшується на 1, називається мостом.

Означення 4. Циклом називається замкнутий шлях по ребрах графа без повторюваних ребер. Простим циклом називається цикл без повторюваних вершин. Зображений на рисунку 14.2 цикл не є простим, адже має повторювану вершину, що виділена червоним кольором. Цикл на рисунку 14.3 є простим.

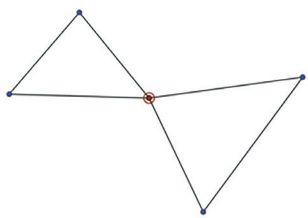


Рис. 14.2

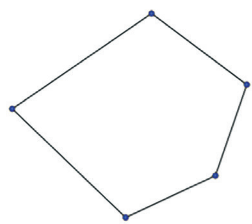


Рис. 14.3

Означення 5. Деревом називається зв'язний граф без циклів.

Означення 6. Вершина називається листом (або висячою), якщо має степінь 1.

Означення 7. Підграф зв'язного графа, що містить усі його вершини та є деревом, називається **кістяковим деревом**. На рисунку 14.4 зображено граф і виділено приклад кістякового дерева в ньому.

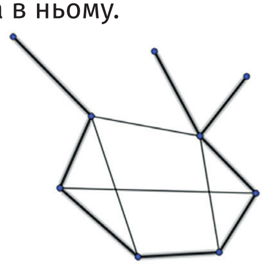


Рис. 14.4

Приклад 1. Доведіть, що будь-яке ребро графа або є мостом, або лежить у якомусь циклі.

Розв'язання. *Розглянемо будь-яке ребро графа, яке не є мостом. Тоді після його викидання кількість компонент зв'язності не змінюється, тобто компонента зв'язності, у якій містилось викинуте ребро, лишається зв'язною. Тому усе ще існує шлях між двома вершинами, що раніше були з'єднані викинутим ребром. Оскільки існує два різні шляхи між цими двома вершинами, то ребро належало циклу. Тому кожне ребро, що не є мостом, лежить у певному циклі.*

Приклад 2. Доведіть, що:

1. Якщо в дереві є вершина степені n, то в ньому є хоча б n листочків (висячих вершин).

Розв'язання. *Розглянемо вершину, степінь якої n, і будемо рухатись по довільному ребру, що з неї виходить. Рухаючися цим ребром, ми дістанемось другої вершини. Якщо з цієї вершини виходить хоча б одне ребро, тоді прямуємо по ньому далі, і так доти, поки є можливість дійти до іншої вершини. Усього вершин скінченна кількість, і ми не можемо повертатися до тієї вершини, де уже були, адже тоді буде цикл. Тому, коли ми прийдемо до вершини, із якої вже не буде виходити жодне ребро, крім того, по якому ми зайшли, ми опинимося у висячій вершині. Усього ребер, що виходять із вершини, яку ми розглядаємо, n, а шляхи по цим ребрам не можуть перетинатися, адже в такому разі буде цикл. Тому кожен із n шляхів веде хоча б до одного листка, а значить, листків хоча б n.*

2. У кожному дереві, у якого є хоча б одне ребро, є хоча б два листочки.

Розв'язання. *Якщо в графі одне ребро і дві вершини, то вони обидві є листочки. Якщо є хоча б два ребра, то,* *оскільки граф зв'язний, є вершина, степінь якої хоча б 2. Тому з пункту 1 випливає, що є хоча б два листочки.*

Приклад 3. Доведіть, що:

1. У довільному дереві з n вершинами рівно $n - 1$ ребро [14, с. 27].

Розв'язання. *Із першої задачі випливає, що кожне ребро в дереві — міст. Тоді з викиданням кожного ребра кількість компонент зв'язності збільшуватиметься на 1. Спочатку маємо 1 компоненту зв'язності, викидатимемо по черзі по одному ребру, поки не викинемо всі ребра. Тоді матимемо n вершин, які є n компонентами зв'язності. Тому ми мали викинути $n - 1$ ребро.*

2. У довільному зв'язному графі кількість ребер не менша за кількість вершин відняти 1.

Розв'язання. *Нехай у графі — n вершин, тоді потрібно довести, що кількість ребер не менша за $n - 1$. Розглянемо кістякове дерево цього графа — це дерево, отже містить в собі $n - 1$ ребро. Оскільки в зв'язному графі не менше ребер, ніж у його кістяковому дереві, то в ньому хоча б $n - 1$ ребро.*

3. Якщо в зв'язному графі n вершин і $n - 1$ ребро, тоді цей граф — дерево [14, с. 27].

Розв'язання. *Розглянемо кістякове дерево цього графа — це дерево, отже містить в собі $n - 1$ ребро. Оскільки в початковому графі $n - 1$ ребро, то він збігається зі своїм кістяковим деревом, а отже є деревом.*

Приклад 4. Чи існує граф, що має два кістякових дерева, які не мають спільних ребер?

Розв'язання. *Так, існує. Наприклад, на рисунку 15 зображено граф, у якому його кістякові дерева пофарбовано в синій і червоний кольори, але вони не мають спільних ребер.*

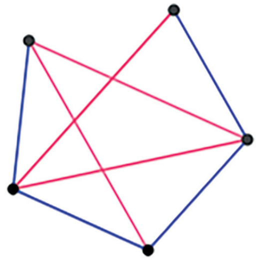


Рис. 15

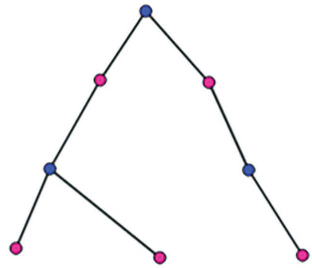


Рис. 16

Приклад 5. Доведіть, що будь-яке дерево є дводольним графом (тобто що всі вершини можна пофарбувати у два кольори так, щоб вершини одного кольору не були з'єднані).

Розв'язання. *Розглянемо довільну вершину довільного дерева. Пофарбуємо її у перший колір і скажемо, що вона розташована на першому рівні. Усі вершини, що з'єднані з нею, пофарбуємо у другий колір і скажемо, що вони розташовані на другому рівні. Усі вершини, що з'єднані з вершинами другого кольору, — знову у перший колір, і скажемо, що вони на третьому рівні, і так далі. Оскільки граф зв'язний, то таким чином ми пофарбуємо усі вершини. Крім того, одна вершина не може бути пофарбована у два кольори, адже тоді до неї було б два різних шляхи з початкової вершини, що на першому рівні, що означало б наявність циклу, а це суперечить тому, що граф — дерево. За такого розфарбування вершини одного кольору не можуть бути з'єднані між собою, адже з'єднані між собою вершини розфарбовуються різними кольорами. А отже, довільне дерево є дводольним графом, як зображено на рисунку 16.*

Задачі

1. Доведіть, що граф, у якому кожні дві вершини з'єднані одним простим шляхом, тобто шляхом без повторення вершин, є деревом [14, с. 27].
2. У містечку є 20 будівель. Кожна будівля з'єднана з іншою стежкою. Яке найбільше число стежок може затопити зливою так, що їх не можна буде використовувати, щоб стежками, які залишаться, можна було з будь-якої будівлі дістатися будь-якої іншої?
3. Дмитро і Андрій розфарбовують ребра куба, Дмитро — синім кольором, а Андрій — жовтим. Чи можуть вони зробити так, щоб ребрами кожного кольору, і жовтими, і синіми, можна було пройти з будь-якої вершини в будь-яку іншу?
4. У країні з кожного міста можна проїхати до будь-якого іншого. Доведіть, що одне із міст можна закрити на карантин, так, щоб із будь-якого з решти міст можна було проїхати до будь-якого іншого.
5. Дерево G має найдовший простий ланцюг, який складається з 10 ребер. Доведіть, що в G знайдеться вершина, з якої можна дійти до будь-якої іншої вершини шляхом не більше ніж із 5 ребер.

Додаткові задачі

1. У країні 40 міст, деякі з них з'єднані авіалініями. Відомо, що від будь-якого міста можна долетіти до будь-якого іншого (можливо, з пересадками). Доведіть, що можна побувати в кожному місті, зробивши не більше:

   а) 78 перельотів;
   б) 76 перельотів.
2. У країні 15 міст, деякі з них з'єднані авіалініями, що належать трьом авіакомпаніям. Відомо, що якщо будь-

яка з авіакомпаній припинить польоти, то можна буде дістатися з кожного міста в будь-яке інше (можливо, з пересадками), користуючись рейсами двох компаній, що працюють. Яка найменша кількість авіаліній може бути в країні? [5].

3. Дано зв'язний граф на $n > 3$ вершинах. Відомо, що при видаленні всіх ребер будь-якого простого циклу цей граф втрачає зв'язність. Яке найбільше число ребер може бути в цьому графі?

Задачі для самостійного розв'язування

1. У графі з кожної вершини виходить три ребра. Чи може в ньому не бути циклів?

2. Існує 7 графів — дерев, кожне містить 6 вершин. Вам необхідно довести, що як мінімум два з цих графів є ізоморфними.

3. Кожна грань кубика розбита на 9 квадратів. Деякі бокові сторони цих квадратів розфарбували в блакитний колір, усього розфарбували 56 сторін. Доведіть, що на поверхні кубика знайдеться замкнута ламана з блакитних відрізків.

4. Веселун Тарас перерізає одну за одною мотузки сітки для великого тенісу, що має вигляд прямокутника 25×40. Яку найбільшу кількість мотузок він може розрізати до того, як сітка розпадеться на шматки?

5. У графі 2021 вершина та 2021 ребро. Скільки може бути мостів у цьому графі? Наведіть усі можливі відповіді і покажіть, що інших бути не може.

Задачі до теми

1. У вченого, який захистив дисертацію на тему сферичного коня у вакуумі, було 4 учні. Серед його наукових нащадків, які досліджували коней ідеальної форми у вакуумі, 50 мали по 5 учнів, а інші померли, не залишивши послідовників. Скільки нащадків було у вченого?

2. Яке найменше число ребер може мати граф на 11 вершинах із трьома компонентами зв'язності?

3. Таблицю 8 × 8 виклали із сірників. Яке найменше число сірників треба прибрати, щоб із будь-якого поля можна було пройти на будь-яке інше, не «перестрибуючи» через сірники?

4. Назвемо *відстанню* між будь-якими двома вершинами графа довжину найменшого простого шляху між ними. А під *віддаленістю* вершини розумітимемо суму відстаней від неї до всіх інших вершин. Доведіть, що якщо в дереві є дві вершини, різниця віддаленостей яких дорівнює 1, то в такому дереві непарне число вершин.

5. Відомо, що в графі всі вершини мають степінь 5. Також граф можна так розфарбувати у три кольори, що по ребрам будь-якого кольору можна дістатися з будь-якої вершини до будь-якої іншої. Скільки може бути вершин у цьому графі?

6. Доведіть, що будь-яке дерево на m^n вершинах або має вершину, степінь якої не менше ніж $m + 1$, або містить шлях довжиною $2n$ вершин.

7. Владислав і Дарія заповнили всю таблицю розміром $a \times a$ числами так, що всі рядки в ній виявилися різними. Доведіть, що можна викреслити з неї один стовпець так, щоб нова таблиця так само не мала однаково заповнених рядків.

8. На шахівниці є кубик, розмір грані якого відповідає розміру клітини. Кожній грані кубика призначений певний колір (чорний або білий), і кубик переміщується по клітинах шахівниці. Чи можливо організувати рух кубика так, щоб він побував на кожній клітині шахівниці лише один раз і щоразу колір грані кубика збігався з кольором клітини, на яку він перекотився?

9. У школі навчається 1000 учнів. Щодня вони розповідають усі теореми, які вони знали з учорашнього дня, усім своїм друзям. Відомо, що будь-яка теорема стає відомою всім учням, якщо її знає хоч один. Доведіть, що можна вибрати 90 учнів так, що якщо їх ознайомити з певною теоремою, то через 10 днів вона стане відома всім.

10. Некваплива тура (ходить тільки на одну клітинку) обійшла всі клітинки шахівниці рівно по одному разу. Доведіть, що деякі три послідовних ходи були в трьох різних напрямках.

6 АРИФМЕТИКА ОСТАЧ

У цій темі ми введемо формально строге визначення остачі числа при діленні цілого числа на інше ціле число і ознайомимось із конгруенціями, зручним способом для роботи з числами і їх остачами.

Лекційна частина

Означення 1. Розділити ціле число a на ціле число $b \neq 0$ з остачею означає зобразити число a у вигляді

$$a = kb + r,$$

де $0 \leq r < |b|$. При цьому k називається часткою, а r — остачею при діленні a на b.

Означення 2. Запис

$$a \equiv b(mod\ m)$$

означає, що числа a і b мають однакові остачі при діленні на m. Читається так: a конгруентне b за модулем m.

Приклад 1. Властивості конгруенцій. Для довільних цілих чисел $a, b, c, d, k, n \neq 0, m \neq 0$ виконується:

1. $a \equiv b(mod\ n) \Leftrightarrow (a - b) \vdots n.$
2. $a \equiv b(mod\ n), c \equiv d(mod\ n) \Rightarrow a \pm c \equiv b \pm d(mod\ n).$
3. $a \equiv b(mod\ n) \Rightarrow ka \equiv kb(mod\ n).$
4. $a \equiv b(mod\ n), c \equiv d(mod\ n) \Rightarrow ac \equiv bd(mod\ n).$
5. $a \equiv b(mod\ n) \Rightarrow a^k \equiv b^k(mod\ n).$
6. $ac \equiv bc(mod\ nc), c \neq 0 \Rightarrow a \equiv b(mod\ n).$
7. $ac \equiv bc(mod\ n)$ *і числа* n, c *взаємно прості* $\Rightarrow a \equiv b(mod\ n).$
8. Якщо конгруенція справедлива за модулем m, тоді вона справедлива й за модулем n, рівним будь-якому натуральному дільнику числа m.

Розв'язання.

1. Поділимо числа a *і* b *на* n *з остачею:* $a = k_1 n + r_1$, $b = k_2 n + r_2$, *де* $0 \leq r_1, r_2 < n$. *Спочатку доведемо, що з рівності остач, тобто* $a \equiv b(mod\ n)$, *випливає, що різниця* $a - b$ *ділиться на* n *націло. Маємо* $a - b = (k_1 n + r_1) - (k_2 n + r_2) = k_1 n - k_2 n = (k_1 - k_2)n$, *оскільки* $r_1 = r_2$, *що і треба було довести.*

В іншу сторону: якщо різниця $(k_1 n + r_1) - (k_2 n + r_2) = (k_1 - k_2)n + (r_1 - r_2)$ ділиться на n, тоді на n ділиться $r_1 - r_2$. Оскільки різниця остач менша за n, тоді, щоб вона ділилась на n, вона має дорівнювати 0.

2. Якщо $a \equiv b(mod\ n)$, $c \equiv d(mod\ n)$, то з пункту 1 ми знаємо, що $(a - b) \vdots n$ і $(c - d) \vdots n$, а тоді і $((a - b) \pm (c - d)) \vdots n$; перегруповуючи доданки, отримаємо $((a \pm c) - (b \pm d)) \vdots n$, що рівносильно $a \pm c \equiv b \pm d(mod\ n)$.

3. Якщо $a \equiv b(mod\ n)$, то з пункту 1 ми знаємо, що $(a - b) \vdots n$, тоді $ak - bk = k(a - b) \vdots n$, що рівносильно до $ka \equiv kb(mod\ n)$.

4. Якщо $a \equiv b(mod\ n)$, $c \equiv d(mod\ n)$, то з пункту 1 ми знаємо, що $(a - b) \vdots n$ і $(c - d) \vdots n$. Ми маємо довести, що $ac \equiv bd(mod\ n)$, тобто що $(ac - bd) \vdots n$. У лівій частині віднімемо і додамо доданок ad, отримаємо $(ac - ad + ad - bd) \vdots n$, винесемо спільні множники і матимемо $(a(c - d) + d(a - b)) \vdots n$, що виконується, оскільки $(a - b) \vdots n$ і $(c - d) \vdots n$.

5. Якщо $a \equiv b(mod\ n)$, то, застосувавши властивість 4 k разів, отримаємо $a^k \equiv b^k(mod\ n)$.

6. Якщо $ac \equiv bc(mod\ nc)$, то з пункту 1 ми знаємо, що $(ac - bc) \vdots nc$, тобто існує таке ціле число k, що $ac - bc = nck$. Тоді $a - b = nk$, тобто $a \equiv b(mod\ n)$.

7. Якщо $ac \equiv bc(mod\ n)$, то з пункту 1 ми знаємо, що $(ac - bc) \vdots n$, тоді $c(a - b) \vdots n$, оскільки n і c не мають спільних дільників, тоді $(a - b) \vdots n$, що рівносильно конгруенції $a \equiv b(mod\ n)$.

8. Нехай $a \equiv b(mod\ m)$, тоді $(a - b) \vdots m$, якщо n — це довільний дільник числа m, то $(a - b) \vdots n$ і, відповідно, $a \equiv b(mod\ n)$.

Приклад 2. Доведіть, що:

1. $8^{2021} - 1$ ділиться на 7 націло.

5. $6^{2021} + 1$ ділиться на 7 націло.

Розв'язання.

1. Оскільки $8 \equiv 1(mod\ 7)$, то з пункту 5 прикладу 1 випливає, що $8^{2021} \equiv 1(mod\ 7)$, що завершує доведення.

2. Оскільки $6 \equiv -1 (mod\ 7)$*, то з пункту 5 прикладу 1 випливає, що* $6^{2021} \equiv -1 (mod\ 7)$*, тобто що* $6^{2021} + 1 \vdots 7$.

Приклад 3. Доведіть за допомогою конгруенцій, що для будь-яких цілих a, b і будь-якого натурального n:

1. Число $a^n - b^n$ *ділиться на* $a - b$.

2. Число $a^{2n-1} + b^{2n-1}$ *ділиться на* $a + b$.

3. Число $a^{2n} - b^{2n}$ *ділиться на* $a + b$.

Розв'язання.

1. Оскільки $a \equiv b (mod\ a - b)$*, то з пункту 5 прикладу 1 випливає, що* $a^n \equiv b^n (mod\ a - b)$*, що завершує доведення.*

2. Оскільки $a \equiv -b (mod\ a + b)$*, то з пункту 5 прикладу 1 випливає, що* $a^{2n-1} \equiv (-b)^{2n-1} (mod\ a + b)$*, тобто* $a^{2n-1} - (-b)^{2n-1} = a^{2n-1} + b^{2n-1}$ *ділиться на* $a + b$.

3. Оскільки $a \equiv -b (mod\ a + b)$*, то з пункту 5 прикладу 1 випливає, що* $a^{2n} \equiv (-b)^{2n} (mod\ a + b)$*, тобто* $a^{2n} - (-b)^{2n} = a^{2n} - b^{2n}$ *ділиться на* $a + b$.

Задачі

1. Доведіть, що число $1000 \cdot 1001 \cdot 1002 \cdot 1003 - 24$ ділиться націло:
а) на 999;
б) на 1004.

2. Відомо, що $a \equiv 3 (mod\ 12)$. Які остачі може давати число a при діленні:
а) на 4;
б) на 24?

3. Доведіть, що $2^{100} \equiv 3^{100}$ за модулями 5, 13, 211.

4. Доведіть, що для довільного $n \in N$ число $37^{n+2} + 16^{n+1} + 23^n$ ділиться націло на 7.

5. Доведіть, що:

а) $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_0} \equiv a_0 + a_1 + \dots + a_n (mod\ 9)$;

б) $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_0} \equiv a_0 - a_1 + \dots + (-1)^n a_n (mod\ 11)$.

Додаткові задачі

1. Доведіть, що для жодного натурального k число $3^k + 5^k$ не є квадратом натурального числа.
2. Відомо, що $a^{100} \equiv 2(mod\ 73)$ і $a^{101} \equiv 69(mod\ 73)$. Знайдіть остачу від ділення числа a на 73.
3. Доведіть, що якщо $a \equiv b(mod\ m)$, то $a^m \equiv b^m(mod\ m^2)$.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Доведіть, що $18^{2020} + 37^{2021}$ ділиться на 19.
2. Відомо, що $a \equiv 3(mod\ 5)$, $a \equiv 2(mod\ 3)$. Які остачі може давати число a при діленні:

   а) на 15;
   б) на 30?
3. Розв'яжіть конгруенцію: $196x \equiv 20(mod\ 172)$.
4. Знайдіть найбільше $n \leq 2021$ таке, що $3^n + 4^n + 5^n$ кратне 10.
5. Доведіть, що за будь-якого натурального n числа $(3^n - 1)^n - 4$ ділиться на $3^n - 4$.

Задачі до теми

1. Знайдіть остачу від ділення:
   а) числа $7778 \cdot 7779 \cdot 7780 \cdot 7781 \cdot 7782 \cdot 7783$ на 7;
   б) числа 9^{100} на 8;
   в) числа 12^{100} на 13;
   г) числа 7^{30} на 48;
   д) числа 3^{99} на 26;
   е) числа 23^{49} на 7;
   ж) числа $10^{12} \cdot 12^{14}$ на 11 і на 13;
   и) числа $9^{2021} + 7^{2020}$ на 10;
   к) числа 13^{555} на 9;
   л) числа $2^{75} + 2^{76} + 2^{77} + 2^{78}$ на 5;
   м) числа $5^{70} + 6^{70}$ на 61;

н) числа $3^{6n} - 2^{6n}$ на 35.

2. Розв'яжіть конгруенцію:
а) $11x \equiv 5(mod\ 7)$;
б) $42x \equiv 33(mod\ 90)$;
в) $x^2 - 5x + 6 \equiv 0(mod\ 35)$;
г) $92x \equiv 8(mod\ 164)$;
д) $x^2 - 7x \equiv 67(mod\ 77)$.

3. Нехай $3x + 7y \equiv 1(mod\ 11)$:
а) доведіть, що $3x + 40y \equiv 1(mod\ 11)$;
б) знайдіть, які значення може набувати остача при діленні $14x - 15y$ на 11;
в) знайдіть, які значення може набувати остача при діленні $6x - 3y$ на 11.

4. Чи ділиться націло:
а) $2 \cdot 4 \cdot ... \cdot 102 + 1 \cdot 3 \cdot ... \cdot 101$ на 103;
б) $2 \cdot 4 \cdot ... \cdot 100 + 1 \cdot 3 \cdot ... \cdot 99$ на 101;
в) $2 \cdot 4 \cdot ... \cdot 104 + 1 \cdot 3 \cdot ... \cdot 103$ на 105?

5. Доведіть, що якщо n, m, k — непарні числа, тоді хоча б одне з чисел $nm - 1$, $mk - 1$, $nk - 1$ ділиться націло на 4.

6. Доведіть, що серед чисел від 1 до 100 кількість таких чисел k, що $k^2 + 1$ ділиться на 101, парна.

7. Доведіть, що якщо p і q — прості числа «близнюки» (тобто $q = p + 2$), тоді $p^q + q^p$ ділиться на $p + q$.

8. Знайдіть, на який найбільший степінь 10 ділиться націло число $1^m + 2^m + 3^m + 4^m$ для натурального m?

9. Дано просте число q, і натуральне число x, таке, що $q \nmid x$. Доведіть, що знайдеться натуральне число y, для якого $xy \equiv 1(mod\ q)$.

10. Теорема Вільсона. Доведіть, що конгруенція $(p - 1)! \equiv -1(mod\ p)$ виконується тоді і тільки тоді, коли p — просте число.

7 РОЗМІЩЕННЯ, ПЕРЕСТАНОВКА, СПОЛУЧЕННЯ

Комбінаторні задачі у своїй більшості розкладаються на маленькі підзадачі. Ми приділимо увагу деяким із цих підзадач, а саме підрахунку таких величин, як кількість розміщень, перестановок і сполучень. Задачі про кількість перестановок і розміщень нам уже траплялися в темі «Правило добутку». Обчислення кількості сполучень, коли порядок елементів у множині не має значення, буде матеріалом для ознайомлення.

Лекційна частина

Означення 1. Перестановки

Перестановка — це впорядкований набір без повторень чисел 1, 2, … , n.

Кількість перестановок визначається за формулою $P_n = n!$

Означення 2. Розміщення

Розміщенням (з n по k) називається упорядкований набір із k різних елементів, вибраних із даної множини, що містить n різних елементів.

Кількість розміщень визначається за формулою

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Означення 3. Сполучення

Сполученням (з n по k) називаєтся набір із k елементів, вибраних із даної множини, що містить n різних елементів.

Кількість розміщень визначається за формулою

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Приклад 1. Скільки способів є для виконання наведених нижче дій?

1. Перестановка: посадити трьох учнів за трьома партами так, щоб кожен сидів за окремою партою.
2. Розміщення: вибрати серед десяти учнів старосту, фізорга, квітникаря.

3. Сполучення: вибрати серед десяти учнів трьох чергових.

Розв'язання.

1. Для першого учня є три варіанти, куди сісти, для другого — два, а для останнього — один. Ці варіанти ми маємо перемножити, адже події незалежні. На кожен варіант для першого учня є два варіанти для другого учня і так далі. Отримаємо $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = P_3$.

2. Старостою може бути обраний будь-хто з-поміж десяти учнів, для фізорга можливі дев'ять варіантів, для квітникаря — вісім варіантів. Оскільки події є незалежними, то всього варіантів буде $10 \cdot 9 \cdot 8 = \frac{10!}{7!} = A_{10}^3$.

3. Чим задача про вибір трьох чергових відрізняється від задачі пункту 2? У пункті 2 варіант, де Олена — староста, Тарас — квітникар, а Атілла — фізорг, відрізняється від варіанта, коли Атілла — квітникар, Олена — фізорг, а Тарас — староста. Коли ж ми вибираємо трьох чергових, порядок слідування не має значення, бо учні виконують однакові обов'язки. Отже, множина варіантів вибору трьох однакових обов'язків розподіляється на деяку кількість множин варіантів, що відрізняються лише зміною обов'язків. Оскільки вибір трьох учнів для виконання різних обов'язків дорівнює A_{10}^3, *а кількість варіантів призначення різних обов'язків трьом учням дорівнює 3!, тоді кількість способів вибрати трьох учнів, що виконують однакові обов'язки, дорівнює* $\frac{A_{10}^3}{3!} = \frac{10!}{7!3!} = C_{10}^3$.

Приклад 2. На площині:

1. Дано n точок. Скільки можна побудувати відрізків з кінцями в цих точках?

2. Дано n прямих загального положення (жодні три прямі не перетинаються в одній точці і жодні дві не паралельні). Скільки утворилось трикутників?

Розв'язання.

1. Кожен відрізок задається його кінцями, тому кількість відрізків дорівнює кількості способів вибрати дві точки, тобто $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ *варіантів.*

2. Кожен трикутник задається трьома прямими, що містять сторони трикутника, і це взаємно однозначна відповідність, адже жодні три прямі не перетинаються в одній точці, тому кількість трикутників дорівнює кількості способів вибрати три прямі $C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$.

Приклад 3. Будемо вважати словом будь-яку скінченну послідовність літер української абетки. З'ясуйте, скільки різних слів можна скласти з усіх літер наведених нижче слів.

1. ВЕКТОР.
2. ЛІНІЯ.
3. ПАРАБОЛА.
4. МАТЕМАТИКА.

Розв'язання.

1. Для першої літери слова є 6 варіантів: В, Е, К, Т, О, Р, для другої вже 5, адже букви не повторюються, і так далі, для шостої є один варіант. Ці варіанти ми маємо перемножити, адже події незалежні. На кожен варіант вибору першої літери є 5 варіантів вибору другої тощо. Отримаємо $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6! = 720$.

2. Вважатимемо спочатку, що літери І — різні, нехай вони будуть $І_1$ *і* $І_2$. *Тоді, аналогічно до попереднього пункту, кількість таких перестановок становить* $5! = 120$. *Проте ми вважали, що літери І — різні, а це не так. Тобто, наприклад, слова* $ЛНІ_1ЯІ_2$ *і* $ЛНІ_2ЯІ_1$ *є однаковими, тому кожне слово ми порахували двічі, адже є стільки варіантів переставити місцями два елементи. Тому загальна кількість варіантів дорівнює* $120 : 2 = 60$.

3. Вважатимемо спочатку, що всі літери А є різними: A_1, A_2, A_3. Отримаємо 8! *варіантів слів. Як і в попередньому пункті, маємо поділити цю кількість на всі варіанти перестановок літер A_1, A_2, A_3. Тому загальна кількість варіантів дорівнює* $\frac{8!}{3!}$.

4. Аналогічно до попередніх пунктів вважатимемо спочатку, що всі літери є різними, тоді кількість слів 10!. *Проте ми вважали, що літери А є різними, літери М є різними і Т так само різні. Кожне слово ми порахували по* 3! *(бо три літери А)* · 2! *(бо дві літери М)* · 2! *(бо дві літери Т) = 24 рази, бо події незалежні. Тому загальна кількість варіантів дорівнює* $\frac{10!}{3!2!2!}$.

Задачі

1. На прямій вибрали 10 точок, а на паралельній їй прямій — 11 точок. Скільки існує:
а) невироджених трикутників із вершинами в цих точках;
б) невироджених чотирикутників із вершинами в цих точках? [13, с. 77].

2. Скільки способів є для вибору з повної колоди (52 карти) 10 карт так, щоб:
а) серед них був лише один туз;
б) серед них був хоча б один туз? [12].

3. Олена стоїть на крайній зліва клітинці таблички 1 × 20, а її улюблений тортик — у крайньому правому полі. За один хід Оленка може переміститися на будь-яку кількість клітинок праворуч. Скільки способів є для того, щоб добратися до улюбленого тортика рівно за 7 ходів?

4. Скільки є прямокутників, утворених за лініями сітки таблиці, що має m горизонталей і n вертикалей?

5. Олена стоїть у лівій нижній точці великого парку, а тортик — у правій верхній точці, як зображено на рисунку 17.

Схему парку зображено на малюнку. На усіх стежках введено односторонній рух: можна йти тільки «праворуч» або «вгору». Скільки є маршрутів, що ведуть Олену до тортика?

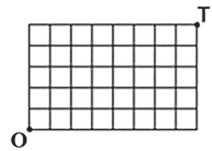


Рис. 17

Додаткові задачі

1. У магазині є 10 смаків морозива, Тарас любить комбінувати попарно смаки. За червень він перепробував 14 попарних комбінацій смаків. Доведіть, що все ще можна знайти три смаки, які Тарас не комбінував попарно.
2. 8 учнів читали 8 книжок. Відомо, що кожну книжку прочитали 5 учнів. Чи правда, що знайдуться такі 2 учні, що кожну книжку прочитав хоча б один із них?
3. У науковому інституті 200 співробітників. Кожні два з них або дружать, або ворогують, причому кожний дружить рівно із шістьма іншими. Кожні три співробітники утворюють свою дослідницьку групу. Знайдіть загальне число дослідницьких груп, у яких всі троє науковців попарно дружать або всі троє попарно ворогують.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Марія та Владислава — сестри-близнючки. Марія має 5 футболок, а Влада — 7. Скільки способів є для обміну трьох футболок Марії на три футболки Влади?
2. Скільки способів є для об'єднання 12 учнів у дві команди з рівною кількістю учасників?
3. В Котиколяндії всі номери телефонів складаються з шести цифр (кожну цифру можна використовувати скільки завгодно разів). Обчисліть кількість телефонних номерів, що мають рівно п'ять однакових цифр.

4. Розташуйте на площині 7 точок таким чином, щоб при розгляді їх як вершин трикутників утворилося рівно 32 трикутники. Поясніть, чому утворюється саме 32 трикутники.

5. Скільки існує п'ятизначних чисел, у записі яких кожна наступна цифра більша за попередню? [10, с. 27].

Задачі до теми

1. Скільки способів є для запису в ряд:
   а) 2 одиниць і n нулів;
   б) m одиниць і n нулів?

2. Скількома способами можна розбити 10 людей на пари?

3. У школі навчається 6 одинадцятикласників, 15 десятикласників та 40 дев'ятикласників. Скільки способів є для створення команди, що складається з одинадцятикласника, трьох десятикласників і 20 дев'ятикласників?

4. По колу розставили k точок ($k > 3$), усі точки з'єднали між собою відрізками. Скільки точок перетину відрізків утвориться, не рахуючи початкові k, якщо відомо, що жодні три відрізки не проходять через одну точку?

5. Колода містить 52 карти (від двійки до туза). У грі покер є такі комбінації з п'яти карт:
   каре — чотири карти одного достоїнства;
   фул-хаус — комбінація з трьох карт одного достоїнства і двох карт іншого достоїнства;
   флеш — усі п'ять карт однієї масті;
   стрит — п'ять карт поспіль за старшинством (якщо після старшої карти йде туз, наступною за старшинством буде двійка, тобто стріт може виглядати так: 3, 2, туз, король, дама).
   Потрібно підрахувати, скільки комбінацій кожного виду існує серед перелічених вище, і впорядкувати їх за кількістю в порядку спадання.

6. На вступному іспиті десятьом абітурієнтам було запропоновано декілька математичних задач. Відомо, що будь-які п'ять осіб розв'язали разом всі задачі (тобто кожну задачу розв'язав хоч один із п'яти учнів), а будь-які чотири — ні. За якої мінімальної кількості задач це могло статись?

7. У вагоні потяга з кожної сторони від проходу має сидіти по чотири особи. Скільки способів є для вибору розташування пасажирів у цьому вагоні, якщо є 31 кандидат, причому десять осіб хочуть сидіти з лівої сторони, дванадцять — із правої, а дев'ятьом байдуже, де сидіти?

8. Виявилося, що при множенні деяких 48 натуральних чисел результатом є число, що кратне десяти різним простим числам. Доведіть, що серед цих чисел знайдуться 4 числа, добуток яких є повним квадратом.

9. Маємо 20 тваринок — 10 котів і 10 собак. Доведіть, що кількість способів створити групу, у якій була б однакова кількість котів і собак, дорівнює C_{20}^{10}.

10. Є нескінченна в усі боки сітка, що складається із квадратів зі стороною 1. Доведіть, що кількість маршрутів мурахи, що повзе по сітці вздовж ліній, почавши і закінчивши свій шлях у певному вузлі сітки, дорівнює $(C_{2n}^{n})^2$ для шляху довжини $2n$.

8 ПРИНЦИП ДІРІХЛЕ

Нехай у нас є n предметів і k ящиків. Можна сказати, що в середньому на кожний ящик припадає по $\frac{n}{k}$ предметів. Якщо ми покладемо ці предмети в ящики, то в якомусь ящику предметів буде не менше, ніж це середнє значення $\frac{n}{k}$, а в якомусь не більше. Цю ідею називають принципом «кроликів і кліток», «голубів і ящиків» або принципом Діріхле.

Приклад 1. У кожній клітинці таблиці 3 × 3 записано число 1, 2 або 3. Чи можуть суми чисел у всіх рядках, стовпчиках і великих діагоналях бути різними?

Розв'язання. *Розглянемо, які суми ми можемо отримати. Найменша можлива сума це* 1 + 1 + 1 = 3, *найбільша —* 3 + 3 + 3 = 9. *Тому ми можемо отримати суми від 3 до 9, це 7 чисел. Порахуймо скільки є рядків, стовпчиків і діагоналей:* 3 *рядки* + 3 *стовпчики* + 2 *діагоналі. Тобто в нас є* 8 *рядків, стовпчиків і діагоналей, і лише* 7 *різних сум. За принципом Діріхле якась сума повториться мінімум два рази.*

Приклад 2. Доведіть, що серед 6 осіб завжди знайдуться або три попарно знайомі людини, або три попарно незнайомі [окремий випадок теореми Ремзі].

Розв'язання. *Розглянемо граф на шести вершинах, де кожна вершина відповідає одній особі. З'єднаємо дві вершини червоним ребром, якщо особи знайомі між собою, і синім, якщо не знайомі. Нам треба довести, що знайдеться червоний трикутник або синій трикутник. Кожна вершина з'єднана з кожною, і, відповідно, степінь кожної вершини дорівнює* 5. *Тоді, за принципом Діріхле, з однієї вершини виходитимуть хоча б три ребра одного кольору (рис. 18). Не обмежуючи загальності, вважатимемо, що це ребра червоного кольору. Тоді, якщо якісь дві вершини, до яких проведені ці ребра, будуть з'єднані ребром червоного кольору, то знайдеться червоний трикутник, що означає, що буде три попарно знайомі людини (рис. 19). Якщо ж жодні з цих трьох вершин не з'єднані* *червоним ребром, то, відповідно, вони з'єднані синіми ребрами. Отже, матимемо синій трикутник, що відповідає трьом попарно незнайомим (рис. 20).*

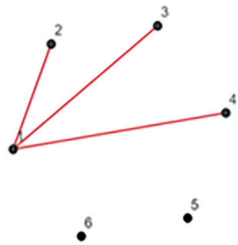


Рис. 18

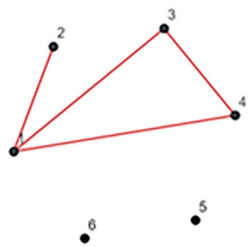


Рис. 19

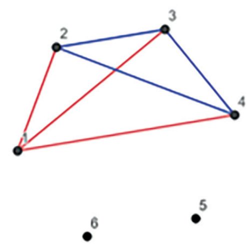


Рис. 20

Приклад 3. Чи правда, що серед будь-яких $k + 1$ цілого числа завжди знайдуться два числа, різниця яких кратна k?

Розв'язання. *Так, правда. Під час ділення на k числа можуть мати k різних остач, від 0 до $k - 1$. Оскільки маємо $k + 1$ число, а остач k, то за принципом Діріхле знайдуться два числа з однаковою остачею під час ділення на k. Тоді різниця цих двох чисел ділитиметься націло на k.*

Задачі

1. Двадцять друзів домовилися про спільне проведення часу. Побачившись, вони вітаються рукостисканнями. Доведіть, що в кожен момент часу деякі двоє зробили рівну кількість рукостискань, за умови:
а) кожен комусь потиснув руку;
б) можливо, що є люди, які нікому не потискали руку.

2. На площині проведено 12 прямих. Доведіть, що якісь дві з них утворюють кут не більш ніж 15 градусів [18, с. 28].

3. Після закінчення дитячого турніру із сумо треба відвезти всіх 36 борців до їх дому. Якщо загальна маса пасажирів більша за 600 кг, тоді таксі замовляється за підвищеним тарифом. Вага борців відповідно 98 кг, 99 кг, 100 кг, … , 133 кг (послідовні числа). Чи можна перевезти всіх борців у семи таксі, щоб не платити підвищений тариф?

4. На квадратній частинці городу зі стороною 1 метр розкидали 51 зернятко. Чи правда, що існують три зернятка, які можна накрити квадратом зі стороною 20 см?

5. Доведіть, що з будь-яких 52 цілих чисел завжди можна вибрати два числа, сума або різниця яких ділиться на 100 [16, с. 28].

Додаткові задачі

1. Серед 9 людей, завжди знайдуться або 4 попарно знайомі людини, або 3 попарно незнайомі людини [окремий випадок теореми Ремзі].

2. Дошка 6 × 6 заповнена кісточками доміно 1 × 2. Доведіть, що можна провести горизонтальний або вертикальний розріз дошки, що не перетинає жодної з кісточок. Вважаємо, що якщо лінія розрізу проходить по стороні кісточки, то вона її не перетинає.

3. Доведіть, що при виборі $k + 1$ числа із чисел від 1 до $2k$ можна обрати два числа, одне з яких кратне іншому.

Задачі для самостійного розв'язування

1. У світі проживає 8 мільярдів людей. Вважатимемо, що на голові людини не може бути більше 500 000 волосин. Доведіть, що в кожен момент часу можна знайти двох осіб:
а) кількість волосся на голові в яких однакова;
б) з однаковою кількістю волосся на голові, у яких дні народження в один день.

2. Є 101 метеоролог, кожен із яких досліджує конкретну хмару. Доведіть, що серед них знайдуться або 11 метеорологів, які досліджують одну хмару, або 11 метеорологів, які вивчають різні хмари.

3. Відомо, що в школі, у якій навчається 2021 учень, серед будь-яких трьох учнів є двоє взаємно підписаних одне на одного у соціальних мережах. Доведіть, що є учень, у якого не менше 1010 взаємних підписників у соціальних мережах.

4. Чи правда, що в будь-якому одинадцятикутнику можна вибрати 2 діагоналі, кут між якими менший ніж 5 градусів?

5. Олеся обирає 7 натуральних чисел. Доведіть, що серед них є такі 3 числа, що їх сума кратна трьом.

Задачі до теми

1. Фізики-експериментатори лазером пропалили 15 дірок у паркеті розміром 4 × 4. Чи завжди їм вдасться вирізати шматок паркету розміром 1 × 1, що не містить дірок усередині? (Дірки вважаються точковими.)

2. На співбесіду прийшли 65 кандидатів на посади у школі. Для перевірки їх академічних знань кожному запропоновано 3 тестових роботи. За кожну роботу можна отримати 2, 3, 4 або 5 тестових балів. Чи знайдуться два кандидати, які отримали однакові бали з усіх робіт?

3. Доведіть, що можна вибрати два таких степені трійки, різниця яких кратна 2021.

4. Чи можна обрати 5 різних натуральних чисел, так, щоб сума будь-яких трьох із них була простим числом?

5. Сто учнів сидять за круглим столом у вершинах правильного стокутника, обговорюючи майбутнє освіти, до того ж більше половини з них вчилися дистанційно. Доведіть, що якісь два учні, що вчилися дистанційно, сидять один навпроти одного.

6. У ряд виписано k натуральних чисел. Доведіть, що можна обрати не менше одного числа, що йдуть підряд,

серед початкових k, так щоб їх сума (або саме це число, якщо воно одне), була кратна k.

7. Чи правда, що існує число, в записі якого використовується лише цифра 1 і яке кратне 2019?

8. Сума 47 чисел дорівнює 2021. Доведіть, що з цих чисел можна вибрати 7 із сумою не менше за 301.

9. У селі є 22 коти та 11 собак. Правильним розміщенням тварин у дворі називається таке розташування їх у ряд, що жодні два коти не знаходяться поруч. Усіх тварин поділили на шість непорожніх груп. Доведіть, що існує група тварин, яку можна правильно розмістити у дворі.

10. В одній клітинці правильного шестикутника зі стороною 1 виникло 7 маленьких дірочок. Доведіть, що якісь дві дірочки розташовані на відстані не більше 1.

9 МАТЕМАТИЧНА ІНДУКЦІЯ

Рис. 21

Можливо, ви коли-небудь бачили, як плитки доміно вибудовують у ланцюжок так, щоб кожна плитка могла штовхнути наступну (рис. 21). Штовхнувши першу, ми змушуємо падати всю конструкцію.

Ідея зрозуміла і має застосування в математиці, даючи змогу зводити задачу до доведення всього двох тверджень: найпростішого, із якого все починається, та переходу по ланцюжку до наступного, як у ситуації з плитками доміно, що падають. Падіння першої в математиці називають «базою індукції», а те, що кожна інша має зачепити наступну, — «індукційним переходом». Хоча ідея проста, є різні способи використання ідеї математичної індукції на практиці, адже це не завжди перехід від одного твердження до наступного.

Приклад 1. Доведіть тотожність: $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ [11, с. 250].

Розв'язання.

• *База індукції. Якщо $n = 1$, то* $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$.

• *Припущення індукції. Припустимо, що для $n = k$ твердження виконується, тобто* $1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$.

• *Індукційний перехід. Доведемо, що твердження виконується для $n = k + 1$. Розглянемо* $1 + 2 + \cdots + k + (k+1)$, *із припущення індукції випливає, що це дорівнює* $\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

Отримали, що $1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$. *Тобто індукційний перехід доведено. Оскільки ми показали, що твердження виконується для $n = 1$ і що з того, що воно виконується для $n = k$, воно виконується для $n = k + 1$, ми довели його для всіх натуральних значень n.*

Приклад 2. Доведіть, що $4^k - 3k - 1$ ділиться націло на 9 для будь-якого натурального k.

Розв'язання.

• *База індукції. Якщо* $k = 1$, *то* $4^k - 3k - 1 = 4 - 3 - 1 = 0 \vdots 9$.

• *Припущення індукції. Припустимо, що для* $k = m$ *твердження виконується, тобто що* $4^m - 3m - 1 \vdots 9$.

• *Індукційний перехід: Доведемо, що твердження виконується для* $k = m + 1$. *Із припущення індукції випливає, що* $4(4^m - 3m - 1) \vdots 9$, *тобто що* $4^{m+1} - 12m - 4 \vdots 9$. *Перепишемо цю властивість у вигляді* $4^{m+1} - 3(m + 1) - 1 - 9m \vdots 9$ *і помітимо, що* $9m \vdots 9$, *отже* $4^{m+1} - 3(m + 1) - 1 \vdots 9$, *що завершує наше доведення.*

Приклад 3. (Гра «Ханойська вежа».) Є піраміда з n кільцями зростаючих розмірів і ще два порожніх стрижні такої самої висоти. Дозволяється перекладати верхнє кільце з одного стрижня на інший, але забороняється класти більше кільце на менше. Доведіть, що:

1. Можна перекласти всі кільця з першого стрижня на один із порожніх стрижнів.
2. Це можна зробити за $2^n - 1$ перекладання.

Розв'язання. *Доведемо одразу обидва пункти, що можна перекласти всі кільця з першого стрижня на один із порожніх стрижнів за* $2^n - 1$ *перекладання.*

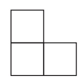
• *База індукції. Якщо* $n = 1$, *то за одне перекладання ми перекладаємо кільце на інший стрижень.*

• *Припущення індукції. Припустимо, що для* $n = k$ *твердження виконується, тобто можна перекласти всі кільця з першого стрижня на один із порожніх стрижнів за* $2^k - 1$ *перекладання, за умови, що забороняється класти* більше кільце на менше.

• *Індукційний перехід. Доведемо, що твердження виконується для* $n = k + 1$. *Спочатку скористаємося припущенням індукції, щоб перекласти* k *перших кілець з першого стрижня на один із порожніх. Звернемо увагу на те, що ми можемо це зробити, адже на першому стрижні залишиться тільки найбільше кільце, яке ми поки що не чіпатимемо. Отже, не виникне суперечності з умовою, що не можна на менше кільце класти більше. Матимемо, що на першому стрижневі залишилося одне найбільше кільце і ще* *на одному стрижні розташовано k кілець. Ми використали $2^k - 1$ перекладання. Тепер перекладемо кільце з першого стрижня на єдиний порожній, це ще + 1 перекладання. І знову з припущення індукції ми знаємо, що можемо перекласти k кілець на інший стрижень, на якому одне найбільше кільце, за $2^k - 1$ перекладання, і оскільки в нас знову лише найбільше кільце там, то на нього ми можемо класти будь-яке інше. Тому ми зможемо перекласти $k + 1$ кільце на інший стрижень. Підрахуймо, скільки для цього знадобилося перекладань:* $2^k - 1 + 1 + 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1$. *Індукційний перехід доведено.*

Задачі

1. Доведіть тотожність: $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ [11, с. 246].
2. У Павла є шахівниця без однієї клітини. Доведіть, що де б не бракувало клітини, таку шахівницю можна розрізати на куточки з трьох клітин.



3. Є ділянка у формі квадрата. Доведіть, що її можна розділити на N менших квадратних ділянок, якщо $N \geq 6$.
4. Площина поділена на області кількома прямими [11, с. 252]. Доведіть, що ці області можна розфарбувати у два кольори так, щоб будь-які дві сусідні області були розфарбовані в різні кольори. (Сусідні області — це області, які мають спільну ділянку кордону, не одну точку.)
5. Доведіть, що число, складене з 3^k одиниць, кратне 3^k і не кратне 3^{k+1}.

Додаткові задачі

1. На площині дано 100 прямих загального положення. Знайдіть кількість частин, на які вони ділять цю площину [11, с. 255].
2. У майбутньому навколо Сонця побудують космічний маршрут, на якому буде розташовано 10 станцій із пальним, і організують за цим маршрутом сонячний круїз.

Сумарно на станціях пального вистачатиме для того, щоб зробити повне коло цим маршрутом. Доведіть, що точно можна знайти місце на маршруті, починаючи з якого можна зробити навколосонячну мандрівку.

3. Чи можна намалювати на площині кілька точок так, щоб на відстані 1 від кожної намальованої точки знаходилося не менше 10 інших точок?

Задачі для самостійного розв'язування

1. Доведіть тотожність:

$1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2=\frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$ [11, с. 253].

2. Є ділянка у формі правильного трикутника. Доведіть, що її можна розділити на 2021 меншу ділянку у формі правильних, але не обов'язково рівних трикутників.
3. Доведіть, що одиницю можна представити у вигляді суми 100 дробів, чисельники яких рівні 1, а знаменники — попарно різні натуральні числа.
4. Знайдіть суму найбільших непарних дільників кожного цілого числа від $k+1$ до $2k$ включно.
5. На площині дано 100 кіл, що попарно перетинаються у двох точках і ніякі три не перетинаються в одній точці. Знайдіть кількість частин, на які вони ділять всю площину.

Задачі до теми

1. Доведіть нерівність для натуральних чисел $n: 2^n > n$ [11, с. 251].
2. Доведіть нерівність для натуральних значень

$a>1: \frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}+\cdots+\frac{1}{2a}>\frac{13}{24}$ [11, с. 255].

3. Доведіть, що для будь-якого натурального n існує таке натуральне число N, що дорівнює сумі якихось n своїх різних дільників.

4. На сходах зі скінченною кількістю сходинок намальовані стрілочки. На одній сходинці стоїть людина. Вона йде сходами в той бік, куди вказує стрілочка, після чого стрілочка на попередній сходинці змінює напрямок на протилежний. Доведіть, що колись людина зійде зі сходів.
5. До чату друзів належить n людей ($n > 3$), у кожного з яких відбулася подія, відома лише йому. За одну переписку у приватних повідомленнях двоє розповідають одне одному про всі події, які сталися із ними, і ті, про які вони дізналися від інших. Доведіть, що за $2n - 4$ переписки всі учасники чату зможуть дізнатися про всі події.
6. Город має форму опуклого багатокутника, навколо городу побудовано паркан і ззовні його вже пофарбовано. Усередині городу побудовано ще декілька парканів, що відповідають діагоналям багатокутника. Кожен із цих парканів пофарбований з одного боку. Доведіть, хоча б одна з обмежених парканами ділянок, на які розбитий початковий город, має повністю пофарбований іззовні паркан.
7. Чи правда, що для довільного натурального n можна вибрати n таких натуральних чисел, що жодне з них не є точним квадратом і жодна з їх сум не буде точним квадратом?
8. Є граф на n вершинах без ребер. Потрібно провести деякі ребра в графі так, щоб жодні три вершини не мали однакового степеня. Доведіть, що це можна зробити для довільного натурального n.
9. На дошці $3 \times k$ (3 рядки, k стовпчиків) стоять жовті, блакитні та червоні фігурки, однакова кількість кожного кольору. Доведіть, що, переставляючи фігурки в рядках, можна зробити так, що в кожному стовпчику будуть фігурки всіх трьох кольорів.
10. З аркуша в клітинку, що має форму квадрата $m \times m$, вирізано $m - 1$ клітинку. Доведіть, що перестановкою стовпчиків і рядків можна розташувати вирізані клітинки нижче головної діагоналі квадрата.

10 ІНВАРІАНТИ

У цій темі ми будемо шукати такі об’єкти, які залишаються незмінними під час різних перетворень або процесів. Це може бути сума чисел, їх різниця або остача від ділення на певне число тощо. Такі об’єкти називаються інваріантами, і ми будемо користуватися ними під час доведення або пошуку потрібних відповідей.

Приклад 1. У школі навчається 1000 учнів. Учитель фізкультури вишикував їх у ряд за зростом. Дозволено міняти місцями двох осіб, які стоять через одного. Чи можна за допомогою таких операцій переставити всіх школярів у зворотному порядку?

Розв’язання. *Оскільки ми можемо міняти місцями лише учнів, які стоять через одного, то ми можемо міняти місцями лише учнів, що стоять на місцях однакової парності. Тоді ми не зможемо їх переставити у зворотному порядку, адже той, хто стоїть, наприклад, на першому (тобто непарному) місці, не зможе стояти на останньому 1000-му (тобто парному) місці.*

У цій задачі інваріантом є парність місць, на яких перебувають учні.

Приклад 2. Катруся написала в зошиті числа від 1 до 10 включно. Петрик може обрати будь-які два числа і збільшити їх на 1. Чи може Петрик такою дією зробити всі десять чисел рівними?

Розв’язання.

Обчислимо суму всіх чисел: $1 + 2 + \cdots + 10 = \frac{11 \cdot 10}{2} = 55.$ *Якщо ми додаємо по одиниці до будь-яких двох чисел, то сума змінюється на 2 і, відповідно, залишається непарною. Якщо всі числа будуть однакові, то сума всіх чисел ділитиметься на 10, а тому й на 2, і має бути парною. Отже, оскільки в нас сума завжди лишається непарною, то ми не зможемо зробити всі числа рівними.*

Інваріантом у цій задачі є непарність суми всіх чисел.

Приклад 3. Хулігани Олена й Тарас розірвали шкільний плакат «Будь слухняним!», причому Олена рвала кожен шматок на 4 частини, а Тарас — на 10. Намагаючись зібрати розірване докупи, знайшли 2021 уривок. Доведіть, що знайшли не всі уривки.

Розв'язання. *Проаналізуємо, як збільшується кількість шматків плаката після розривання. Якщо Олена розриває один шматок, то додається 4 нових, але більше немає того, який вона розривала, тобто загальна кількість шматків збільшується на 3. Якщо ж Тарас розриває один шматок, то кількість уривків збільшується на 9. Оскільки кожного разу додається або 3, або 9, то остача від ділення на 3 загальної кількості шматків не змінюється. Спочатку була остача 1, бо був лише один шматок, тоді і загальна кількість шматків у кінці має давати остачу 1 від ділення на 3. Проте число 2021 дає остачу 2 при діленні на 3. Тому не всі шматки знайшлися.*

Інваріантом у цій задачі є остача від ділення загальної кількості шматочків плаката на 3.

Задачі

1. Програма працює таким чином: із трьох чисел $x, y, z,$ що їй вводять, вона миттєво видає такі три числа: $x + y - z$, $y + z - x$, $z + x - y$. На початку є набір чисел 2019, 2020, 2021. Чи може через деякий час вийти набір чисел 2020, 2021, 2022?

2. Учитель фізкультури вишикував у ряд 24 учні. З них 23 стоять до нього обличчям, а один дивиться у протилежний бік. Дозволяється одночасно повертати будь-яких чотирьох школярів. Чи можна, повторюючи такі дії, поставити всіх школярів обличчям до вчителя фізкультури?

3. Учитель написав на дошці всі натуральні числа від 1 до 60. Раз на хвилину хтось із учнів підходить до дошки, витирає якісь два написаних на ній числа і записує найменший простий дільник їх суми. Через 59 хвилин на дошці залишилося одне число. Яким може бути це число?

4. У країні фізиків грошовою одиницею є амперметр, а в країні біологів грошові одиниці — колбочки. У країні фізиків колбочку обмінюють на 6 амперметрів, а в країні біологів амперметр обмінюють на 6 колбочок. Фінансистка Олена має амперметр і може їздити з однієї країни в іншу і міняти гроші в обох країнах. Доведіть, що кількість амперметрів у неї ніколи не зрівняється з кількістю колбочок.

5. Співробітники інституту біології спілкуються між собою мовою, алфавіт якої складається всього з двох літер: Б та І. Мова має такі властивості: якщо із слова викинути літери БІ, що стоять поруч, то значення слова не зміниться. Також значення не зміниться, якщо додавати буквосполучення ІБ або ББІІ у будь-яке місце в слові. Чи можна стверджувати, що слова БІІ і ІББ мають однакове значення?

Додаткові задачі

1. Аби зробити браслети для друзів, Дарина купила намистини. Її молодша сестра Вероніка розклала їх на три групи: у першій — 51 намистина, у другій — 49 намистин, у третій — 5 намистин, після чого почала ними гратися, дотримуючись такого правила: можна об'єднувати будь-які групи в одну, а також розділяти групу з парною кількістю намистин на дві рівні. Чи можна отримати 105 групок по одній намистині в кожній?

2. Є три програми. Перша програма, отримавши картку з парою чисел (a, b), видає картку $(a + 1, b + 1)$ і повертає початкову картку. Друга програма, отримавши картку з числами (a, b), які діляться на 2 націло, видає нову картку $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ і також повертає попередню. Третя програма, маючи дві картки з парами чисел (a, b) і (b, c), видає нову картку з парою чисел (a, c) та повертає дві попередні. Чи можна за допомогою цих програм, маючи картку з парою чисел (5, 27), отримати картку з парою чисел (1, 2020)?

3. Поле квадратної форми поділено на 100 однакових ділянок, 9 із яких заросли бур'яном. За рік бур'ян поширюється лише на ті ділянки, у яких не менше двох сусідніх (тобто тих, що мають спільну сторону) ділянок уже заросли бур'яном. Доведіть, що поле ніколи не покриється бур'яном повністю [2, с. 95].

Задачі для самостійного розв'язування

1. Руслана загадала число 80. Кожні 20 секунд вона множить або ділить число на 2 чи множить або ділить на 5. Результат Руслана записує в нотатки замість початкового числа. Доведіть, що записане в нотатках за 20 хвилин число не дорівнюватиме 250.

2. На шахівниці можна змінити на протилежний (білий на чорний, чорний на білий) колір усіх клітинок довільного прямокутника розміром 2 × 4 (його можна обертати). Чи може на дошці залишитися лише одна чорна клітинка?

3. У звичайній паперовій книзі всі сторінки пронумеровані по порядку. Кирило знайшов важливу для себе інформацію на 15 сторінках і позначив їх стікерами. Чи може сума 30 чисел, що є номерами сторінок (з двох сторін) на цих аркушах, бути рівною 2023? Перший аркуш у книзі має сторінки 1 і 2.

4. Співробітники інституту фізики спілкуються між собою мовою, алфавіт якої складається всього з трьох літер: Ф, І, З. Ця мова має такі властивості: якщо зі слова викинути літери З, І, Ф, що стоять поруч (у будь-якому порядку, наприклад можна прибрати ІЗФ), то значення слова не зміниться. Значення слова не зміниться після розміщення в будь-якому місці слова буквосполучення ФФІ або ЗЗІЗІЗ. Чи можна стверджувати, що слова ФІФІ і ЗІФФ мають однаковий сенс?

5. На десяти тополях сидять десять метеорологів, на кожній тополі — по метеорологу. Усі вони вивчають погоду. Тополі ростуть в ряд з інтервалами 5 метрів. Якщо якийсь метеоролог перестрибує з однієї тополі на іншу, то один з інших обов'язково перелітає на стільки ж метрів, але у зворотному напрямку. Чи можуть усі метеорологи зібратися на одній тополі?

Задачі до теми

1. Чи можна діями «помножити на 7» та «додати 6» отримати з одиниці число 2021?

2. У телефоні записано числа від 1 до 2021. Чи можна дією «витерти будь-які два числа і замість них записати їх різницю» зробити так, щоб усі числа були нулями?

3. На столі лежить 61 коробка з тортами. Коробки складені купами. Олена може за один раз із будь-якої купи, що містить більше однієї коробки, з'їсти один торт, а потім довільну купу поділити на дві купки (не обов'язково рівні). Чи можна через кілька ходів залишити на столі тільки купи, що складаються з трьох коробок із тортами?

4. Сарана стрибає прямо вздовж стежки лісу. Спочатку вона стрибнула на 1 см, потім на 3 см в тому самому або ж у протилежному напрямку, після цього на 5 см у тому самому або протилежному напрямку і так далі. Чи могло статися так, що вона опиниться в стартовій точці після свого 2021-го стрибка?

5. У Котигорошка є дві чарівні булави. Першою він може відбити Змію 21 голову. Другою булавою — 8 голів, але у Змія відростає 2017 голів. Чи може Котигорошко відбити всі голови Змію, у якого спочатку було 100 голів?

6. Проводячи хімічні досліди, учителька помітила, що в пробірці є бактерії трьох типів. При чому, поєднавши дві довільні бактерії різних типів, отримаємо бактерію третього типу. Після того, як таке поєднання виконали кілька разів, у пробірці залишилася одна бактерія. Якого типу остання бактерія, якщо відомо, що бактерій першого типу було 20, другого — 21, а третього — 22?

7. У центр кожної клітинки таблиці 8 × 8 поклали одну монету (всі монети однакові). Монети переклали так, що вони всі знову лежать у центрах клітинок і попарні відстані між ними не зменшилися. Доведіть, що насправді попарні відстані не змінилися.

8. У трикутнику із кутами 140°, 20°, 20° проводять одну бісектрису, що розділяє його на два трикутники, в одному із них також проводять бісектрису і так далі. Чи може після кількох таких дій утворитися трикутник, подібний до початкового?

9. На планшеті написано числа від 1 до 20. Програма видаляє будь-які два числа n і m і замість них записує число $nm + n + m$. Яке число може залишитися на планшеті після 19 таких дій?

10. На нескінченному папері у клітинку позначено шість клітинок (рис. 22). На деяких клітинках розташовані фішки. Їх розташування дозволяється міняти наступним чином: якщо обидві клітини, сусідня згори і сусідня праворуч від цієї фішки, вільні, то можна помістити

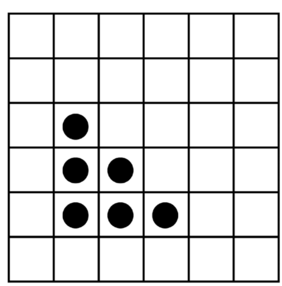


Рис. 22

в ці клітинки одну фішку, але прибравши попередню. Мета полягає в тому, щоб звільнити всі шість позначених клітинок за деяку кількість таких переміщень. Чи можна досягти цієї мети, якщо:

а) спочатку є 6 фішок і вони стоять на позначених клітинках;

б) спочатку є тільки одна фішка і вона стоїть у нижній лівій позначеній клітинці?

11 ОРІЄНТОВАНІ ГРАФИ

Звичайна модель графа представляла собою вершини (точки), з'єднані відрізками або лініями, що ілюструють, наприклад, міста та дороги між ними. Тепер розглядатимемо орієнтовані графи, вершини яких з'єднані між собою спрямованими стрілками. Такий граф може ілюструвати турнір без нічиїх, де вершини — це команди, а стрілка від команди A до команди B означає, що A виграла матч у B.

Лекційна частина

Означення. **Орієнтованим графом** (або **орграфом**) називається граф, у якому кожне ребро має напрямок. Направлене ребро називається **дугою**, а вершини, які воно з'єднує, називаються **початком** і **кінцем** дуги.

Приклад 1. Кажуть, у Нереальностані з кожного міста виходить 2 дороги з одностороннім рухом і в кожне місто входить 3 дороги. Брешуть, мабуть?

Розв'язання. *Так, брешуть. Нехай усього в Нереальностані є n міст, тоді всього із міст виходить $2n$ доріг, а всього входить $3n$. Оскільки кожна дорога, що виходить з одного міста, має увійти в інше, то цих доріг має бути однакова кількість. Проте для натуральних n $2n \neq 3n$.*

Приклад 2. У Розумностані після Великої дорожньої реформи деякі міста з'єднані між собою дорогами так, що, покинувши місто, у нього не можна більше повернутися.

1. Доведіть, що є місто, з якого не виходить жодна дорога.
2. Доведіть, що є місто, у яке не входить жодна дорога.

Розв'язання.

1. Припустимо, що це не так, і з кожного міста виходить дорога. Тоді розглянемо будь-яке місто і почнемо рухатися. З кожного міста рухатимемося по будь-якій із доріг, що з нього виходять. Оскільки міст скінченна кількість і з кожного виходить дорога, то колись ми маємо повернутися в місто, у якому були раніше, що *суперечить умові, бо, покинувши місто, у нього не можна більше повернутися. Отже, наше припущення було неправильним. Має існувати місто, з якого не виходять дороги.*

2. Спрямуємо всі дороги в протилежному напрямку та зведемо задачу до попередньої.

Приклад 3. У країні з кожного міста можна проїхати до будь-якого іншого. Доведіть, що на дорогах цієї країни можна ввести односторонній рух так, що з деякого міста можна буде доїхати до будь-якого іншого.

Розв'язання. *Зобразимо це місто у вигляді графа, де міста — це вершини, а дороги між ними — ребра, відповідно односторонній рух — стрілки на ребрах. «Підвісимо» граф за довільну вершину, тобто перемалюємо граф так, щоб ця вершина була зверху, нижче намалюємо всі вершини, що пов'язані з обраною через одне ребро, назвемо це першим рівнем. Нижче, на другому рівні, — всі вершини, від яких найменша відстань до обраної вершини становить 2 ребра, і так далі. Тобто на n-му рівні будуть усі вершини, шляху найменшої довжини від яких до обраної вершини становить n ребер (рис. 23).*

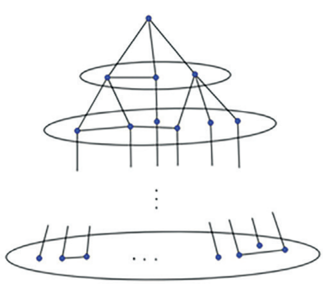


Рис. 23

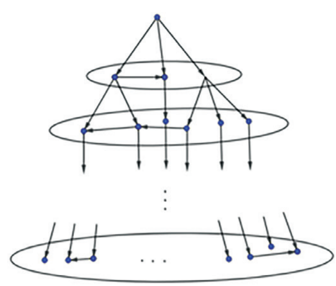


Рис. 24

Тепер розставимо стрілки згори донизу. Стрілки виходять з одного рівня до наступного за ним (рис. 24). На тих ребрах, що знаходяться всередині рівнів, стрілки можна спрямовувати довільним чином.

Отриманий орієнтований граф задовольнятиме умові задачі, адже з верхньої вершини можна дійти до будь-якої іншої.

Задачі

1. В академічно недоброчесному класі по колу посадили учнів. Відомо, що кожен учень або сам списав у сусіда або дав списати сусіду. Доведіть, що кількість учнів, що дали списати обом сусідам, дорівнює кількості учнів, що списали у двох сусідів.

2. В орієнтованому графі на 101 вершині усі ребра зі стрілками. Назвемо одну конкретну з вершин головною. Деякі вершини (також головна) з'єднані ребрами. Із кожної неголовної вершини виходить 20 ребер, а входить у неї 21 ребро. Доведіть, що в головну вершину не існує шляху з жодної іншої вершини.

3. Імператор фізиків призначив нового міністра шляхів сполучення, стративши попереднього через те, що той не згоден із загальною теорією відносності. Тепер кожне місто з'єднане з кожним торгівельною дорогою з односторонім рухом. Доведіть, що в Імперії Фізиків існує (не обов'язково замкнений) Загальний Тракт Відноснорівний, що проходить через усі міста лише один раз.

4. У країні Балансіанії після проведення дорожньої реформи з кожного міста виходить стільки само доріг, скільки в нього входить, і з кожного міста можна дістатися будь-якого іншого. Доведіть, що можна об'їхати всі міста, проїжджаючи кожною дорогою лише один раз.

5. 20 команд учнів брали участь у турнірі «Керлінг на траві» в одне коло. (Це безкомпромісна гра — у ній не буває нічиїх.) Дві команди здобули рівно по 8 перемог. Доведіть, що є такі команди A, B, C, що A виграла у B, B виграла у C, а C — у A.

Додаткові задачі

1. Вийшовши після робочого дня надвір, кожен співробітник наукового інституту спростував думку одного іншого співробітника. Доведіть, що з усіх співробітників можна сформувати три науково-дослідницькі групи так, що члени однієї групи не спростовували думки одне одного.

2. У країні кожні два міста з'єднані дорогою з одностороннім рухом. Доведіть, що існує місто, з якого можна проїхати в будь-яке інше місто не більш ніж двома дорогами [1, с. 180].

3. Неуважний математик забув тризначний код від свого замка. Замок відкривається, якщо три цифри коду набрані підряд (навіть якщо до цього були набрані інші цифри). Математик набирає одну цифру в секунду. Доведіть, що математик зможе відкрити замок за 1002 секунди.

Задачі для самостійного розв'язування

1. У кожній вершині правильного 2021-кутника записано натуральне число. Для будь-яких двох сусідніх чисел виконується закономірність, що одне число кратне іншому. Чи завжди можна знайти два таких несусідніх числа, що одне ділиться націло на інше?

2. У науковому інституті 21 співробітник. Першого вересня один зі співробітників дізнався, що директор інституту відпочивав влітку на Балі, та повідомив про це всім своїм друзям в інституті. Другого вересня ті повідомили новину всім своїм друзям в інституті, і так далі. Чи може так статися, що:
а) 16 вересня ще не всі співробітники інституту знатимуть про відпочинок директора на Балі, а 19 вересня вже всі;
б) 24 вересня ще не всі знатимуть, а 27 вересня вже всі?

3. В обговоренні заходів у школі взяли участь 7 учнів із самоврядування. Кожен із них у своєму виступі не погодився рівно із k з решти 6 учнів. За якого

найменшого k можна стверджувати, що знайдуться два учні, які не погодилися один з одним?

4. У болото випустили 40 піраній. Піранья рибожерка, якщо вона з'їла трьох інших піраній. З'їдена піранья все одно вважається рибожеркою. Якою може бути найбільша кількість піраній-рибожерок?

5. Декілька команд зіграли між собою турнір із флорболу. Скажемо, що команда N взяла верх над командою M, якщо або N виграла у M, або якщо існує така команда K, що N виграла у K, а K виграла у M (може виявитися, що одночасно N взяла верх над M і M взяла верх над N). Доведіть, що є команда, яка взяла верх над усіма іншими.

Задачі до теми

1. У ліфті будинку є 2 кнопки: «+16» і «–19» (перша піднімає ліфт на 16 поверхів, друга опускає на 19). Чи можна проїхати з будь-якого поверху на будь-який поверх за допомогою такого ліфта, якщо:
а) будинок має 32 поверхи;
б) будинок має 36 поверхів?

2. У повному орієнтованому графі 101 вершина, з кожної виходить рівно по 50 стрілок. Доведіть, що з кожної вершини можна дістатися будь-якої іншої не більш ніж двома стрілками.

3. Десять учнів надсилали повідомлення одне одному протягом вечора. Кожен надіслав повідомлення п'ятьом іншим. Яке найбільше число школярів могло не отримати жодного повідомлення?

4. Між деякими парами міст проведений один залізничний шлях:
а) доведіть, що можна ввести односторонній рух таким чином, щоб пасажир, сівши в потяг у будь-якому місті, вже не міг до нього повернутися;

б) знайдіть кількість способів зробити це, якщо кожне місто пов'язане з кожним.

5. У місті деякі пари дослідницьких центрів з'єднані дорогами з одностороннім рухом (між будь-якими двома центрами є не більше однієї дороги). Скажемо, що дослідницький центр X доступний для центра Y, якщо з Y можна доїхати в X, можливо через інші дослідницькі центри. Відомо, що для будь-яких двох центрів N і M існує дослідницький центр K, для якого N і M доступні. Доведіть, що існує дослідницький центр, для якого доступні всі центри міста. (Вважається, що центр доступний для самого себе.)

6. Є 100 міст в одному штаті. Кожне з'єднане з кожним дорогою з одностороннім рухом. Доведіть, що ви можете змінити (або взагалі нічого не міняти) напрямок руху на одній дорозі так, щоб із будь-якого міста можна було дістатися до будь-якого іншого.

7. У парку атракціонів є один фонтан і k атракціонів. Кожен атракціон позначений на рисунку 25 синьою вершиною, а фонтан — жовтою, і атракціони з'єднані з фонтаном і двома іншими атракціонами дорогами, як зображено на рисунку. Для зручності називатимемо фонтан і всі атракціони загальним словом — об'єкт. На кожній із $2k$ доріг запроваджено односторонній рух так, що на кожен об'єкт у парку можна в'їхати і з кожного — виїхати. Доведіть, що з кожного об'єкта цього парку можна, не порушуючи правил, доїхати до будь-якого з інших.

Рис. 25

8. В Імперії Фізиків із кожного міста в будь-яке інше можна дістатися транзитом не більш ніж через одне місто. Одна з доріг була закрита на ремонт так, що з кожного

міста можна дістатися в будь-яке інше. Доведіть, що для будь-яких двох міст це можна зробити, проїхавши не більше двох інших міст.

9. 12 учнів зіграли турнір із настільного тенісу в одне коло. Потім кожен із них написав 12 списків. У першому тільки він, у $(n + 1)$-му — ті, хто був в n-му і ті, у кого вони виграли. Виявилося, що в кожного учня 12-й список відрізняється від 11-го. Скільки ігор було зіграно внічию?

10. На Марсі побудували 101 місто, і кожні два міста з'єднані дорогою з одностороннім рухом. Із кожного міста виходить рівно 50 доріг, і в кожне місто входить рівно 50 доріг. Деякі 68 міст та всі дороги між ними накрили скляним куполом. Доведіть, що з кожного міста під куполом можна дістатися до будь-якого іншого міста, не залишаючи межі купола.

12 НСД і НСК

У цій темі детально ознайомимося з поняттям найбільшого спільного дільника (НСД) і найменшого спільного кратного (НСК) натуральних чисел, що допомагають розв'язувати задачі на подільність; буде доведена лема Евкліда, якою ми користувались для доведення основної теореми арифметики.

Лекційна частина

Означення 1. Найбільший спільний дільник натуральних чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ — це найбільше натуральне число, на яке одночасно діляться всі ці числа. Воно позначається НСД$(a_1, a_2, ..., a_n)$ або $(a_1, a_2, ..., a_n)$.

Означення 2. Будемо називати натуральні числа $a_1, a_2, ..., a_n$ взаємно простими, якщо їх максимальний спільний дільник, тобто $(a_1, a_2, ..., a_n)$, дорівнює 1.

Зауважимо, що за такої умови не обов'язково всі ці числа попарно взаємно прості. Наприклад, числа 6, 10, 15 не мають усі разом спільного дільника більшого за 1, але кожні два числа не взаємно прості.

Означення 3. Найменше спільне кратне натуральних чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ — це найменше натуральне число, яке одночасно ділиться на кожне число $a_1, a_2, ..., a_n$. Воно позначається НСК$[a_1, a_2, ..., a_n]$ або просто $[a_1, a_2, ..., a_n]$.

Приклад 1.

1. Знайдіть (18, 24) і [18, 24].
2. Маючи канонічний розклад чисел a і b, знайдіть значення (a, b) і $[a, b]$.
3. Доведіть, що для будь-яких натуральних чисел a і b правильна рівність

$$\text{НСД}(a, b) \cdot \text{НСК}[a, b] = ab.$$

Розв'язання.

1. Визначимо всі натуральні дільники числа 18: 1, 2, 3, 6, 9, 18. *Число* 6 *є дільником для числа* 24, *а числа* 9 *і* 18 *ні,* *значить,* (18, 24) = 6. *Можна було знайти НСД іншим способом, представивши числа у канонічному розкладі на прості множники* $18 = 2 \cdot 3^2$, $24 = 2^3 \cdot 3$.

Тепер розглянемо три найменші натуральні числа, що діляться на 24: 24, 48, 72. *Оскільки* 24 і 48 *не діляться на* 18, *а число* 72 *ділиться, тоді* [18, 24] = 72.

2. *Нехай* $p_1, p_2, \dots, p_k$ — *усі прості числа, які є в розкладі на прості множники чисел* a, b. *Перепишемо ці числа у такому вигляді:* $a = p_1^{t_1} \cdot p_2^{t_2} \cdot \dots \cdot p_k^{t_k}, b = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \dots \cdot p_k^{r_k}$, *де* $t_1, t_2, \dots, t_k, r_1, r_2, \dots, r_k$ — *степені, з якими входять відповідні прості числа у розклад числа на прості множники. Зауважимо, що ці числа можуть бути ненатуральні, як у звичайному канонічному розкладі на прості множники, бо деякі степені можуть дорівнювати нулю (наприклад,* p_1 *може бути дільником числа* a, *але не бути дільником числа* b, *тоді* $r_1 = 0$*). Звідси випливає, що просте число* p_i *входить у розклад числа НСД*(a, b) *зі степенем* $min(t_i, r_i)$ *(меншим із чисел* t_i, r_i*), бо така кількість* p_i *є в кожному з чисел* a *та* b, *а більше взяти не можна, бо в одному з чисел це максимальна степінь входження і воно вже не ділиться на* $p_1^{min(t_1,r_1)+1}$. *Тоді* $\text{НСД}(a, b) = p_1^{min(t_1,r_1)} \times$ $\times\ p_2^{min(t_2,r_2)} \cdot \dots \cdot p_k^{min(t_k,r_k)}$. *З аналогічних міркувань просте число* p_i *входить у розклад числа НСК*$[a, b]$ *зі степенем* $max(t_i, r_i)$ *(більшим із чисел* t_i, r_i*), бо такої кількості достатньо для подільності на* $p_i^{t_i}$ *та* $p_i^{r_i}$, *а менше взяти не можна, інакше НСК*$[a, b]$ *не буде ділитись на одне з чисел* a *чи* b, *у якому степінь* p_i *максимальна. Отже*

$$\text{НСК}(a, b) = p_1^{max(t_1,r_1)} \cdot p_2^{max(t_2,r_2)} \cdot \dots \cdot p_k^{max(t_k,r_k)}.$$

3. *Розглянемо розклад чисел* a, b *з пункту* 2, *вирази для* НСД і НСК, і *перепишемо рівність* НСД$(a, b) \cdot$ НСК$[a, b] = ab$, *яку нам треба довести:*

$$p_1^{min(t_1,r_1)} \cdot p_2^{min(t_2,r_2)} \cdot \ldots \cdot p_k^{min(t_k,r_k)} \times$$
$$\times\, p_1^{max(t_1,r_1)} \cdot p_2^{max(t_2,r_2)} \cdot \ldots \cdot p_k^{max(t_k,r_k)} =$$
$$= p_1^{t_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{t_k} \cdot p_1^{r_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{r_k}.$$

Нам достатньо довести, що $p_i^{min(t_i,r_i)} \cdot p_i^{max(t_i,r_i)} = p_i^{t_i} \cdot p_i^{r_i}$. *Це очевидно випливає з того, що* $min(t_i, r_i) + max(t_i, r_i) = t_i + r_i$, *бо це суми двох однакових чисел.*

Приклад 2. Алгоритм Евкліда. Доведіть, що НСД(a, b) = НСД$(a, a - b)$ для будь-яких цілих a і b.

Розв'язання. *Позначимо* НСД$(a, b) = d$ *і* НСД$(a, a - b) = m$. *Оскільки a та b діляться на d, тоді різниця чисел $a - b$ також ділиться на d. Значить, d є спільним дільником для a і $a - b$ і не перевищує найбільший спільний дільник m. З іншого боку, число b є різницею чисел a та $a - b$, які діляться на m. Отже, на m діляться і b, і a, тобто є їх спільним дільником, а значить, не перевищує їх найбільший спільний дільник d. Звідси випливає, що числа $d = m$, що і треба було довести.*

Приклад 3. Найменше натуральне число вигляду $ax + by$, де x, y — цілі числа, дорівнює найбільшому спільному дільнику чисел a, b.

Розв'язання. *Назвемо число хорошим, якщо воно натуральне і зображується у вигляді $ax + by$. Нехай x_1, y_1 — такі цілі числа, що $ax_1 + by_1$* — найменше хороше. *Поділимо число a на $ax_1 + by_1$ з остачею: $a = k(ax_1 + by_1) + r$, де* $0 \le r < ax_1 + by_1$.

Зазначимо, що число $r = a(1 - kx_1) + b(-ky_1)$ теж буде хорошим, якщо воно натуральне, але це неможливо, тому що воно менше за найменше хороше число. Отже, r може бути тільки нулем, і число a націло ділиться на $ax_1 + by_1$. Аналогічно доводиться, що b також ділиться на *це число. Звідси випливає, що $ax_1 + by_1$ — спільний дільник чисел a, b і не може бути більшим за НСД(a, b). З іншого боку, a і b діляться націло на НСД(a, b), тоді $ax_1 + by_1$ має ділитися націло на НСД(a, b), тому значення виразу $ax_1 + by_1$ не менше за НСД(a, b). Значить, $ax_1 + by_1$ = НСД(a, b).*

Приклад 4. Лема Евкліда (яку ми постійно використовуємо, але досі не довели). Якщо добуток чисел ab ділиться націло на просте число p, тоді або a, або b ділиться націло на p.

Розв'язання. *Якщо $a \vdots p$, то твердження доведено. Нехай a не ділиться націло на p. Тоді, оскільки p — просте, то a і p є взаємно простими числами. Отже, із прикладу 3 ми знаємо, що існують такі цілі числа x, y, що $ax + py$ = НСД(a, p) = 1. Тоді домножимо обидві частини рівності на b. Отримаємо, що $abx + pyb = b$. Маємо, що $abx \vdots p$, оскільки $ab \vdots p$, також $pyb \vdots p$, тому і сума $axb + pyb \vdots p$. Отже, ліва частина рівності ділиться націло на p, а тому і права частина рівності ділиться націло на p, тобто $b \vdots p$.*

Задачі

1. Математик, біолог і фізик йдуть коридорами наукового інституту та обговорюють, як врятувати світ. Довжина кроку математика — 75 см, біолога — 60 см, а фізика — 1 м 05 см. Почавши рух з однієї точки, вони зробили цілу кількість кроків, щоб опинитися поруч. Яку найменшу відстань вони могли пройти?
2. Знайдіть таке найменше натуральне n, що $n + 2$ ділиться на 2, $n + 3$ ділиться на 3, ..., $n + 10$ ділиться на 10.
3. Чи існують 6 таких послідовних натуральних чисел n, $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$, $n + 4$, $n + 5$, що НСК[n, $n + 1$, $n + 2$] > НСК[$n + 3$, $n + 4$, $n + 5$]?
4. Знайдіть усі натуральні значення k, для яких дріб $\frac{42k+2}{30k+1}$ нескоротний.

5. Знайдіть $\text{НСД}(\underbrace{1 \ldots 1}_{m}, \underbrace{1 \ldots 1}_{n})$.

Додаткові задачі

1. Доведіть, що для натуральних чисел a, b і c справедлива нерівність $[a, b]\,[b, c]\,[c, a] \geq [a, b, c]^2$.

2. Група чаклунів відібрала в купця мішок золотих злитків. Кожен злиток коштує цілу кількість грошей. Виявилося, що який би злиток не відкласти, злитки, що залишатимуться, можна поділити поміж чаклунами так, щоб кожен отримав однакову суму в грошах. Доведіть, що якщо відкласти один злиток, то число злитків розділиться на число чаклунів.

3. У кожній вершині тетраедра записали натуральне число так, що всі числа виявилися різними, а на кожному ребрі тетраедра — найбільший спільний дільник двох чисел, записаних на кінцях цього ребра. Доведіть, що сума всіх чисел, записаних у вершинах, не може дорівнювати сумі всіх чисел, записаних на ребрах.

Задачі для самостійного розв'язування

1. В університеті на одному потоці навчається менше 150 студентів. За контрольну роботу з філософії сьома частина студентів отримала «відмінно», п'ята частина — «добре», третина — «задовільно». Решта робіт були оцінені як незадовільні. Скільки робіт було з оцінкою «незадовільно»?

2. Яке найбільше значення може бути в НСД$(30k + 7, 19k + 2)$, якщо k — натуральне число?

3. Знайдіть найменше натуральне число n таке, що: $n \equiv 1\ (mod\ 2)$; $n \equiv 2\ (mod\ 3)$; $n \equiv 3\ (mod\ 4)$; $n \equiv 4\ (mod\ 5)$; $n \equiv 6\ (mod\ 7)$.

4. Знайдіть усі такі пари натуральних чисел a і b, що $[a, b] = (a, b) + 37$.

5. Доведіть, що яким би не було ціле число n, серед чисел $n, n + 1, n + 2, ..., n + 9$ є хоча б одне, яке є взаємно простим з іншими дев'ятьма.

Задачі до теми

1. Бак був повністю заповнений водою. Цю воду порівну перелили в три бідони. Виявилося, що в першому бідоні вода зайняла половину його об'єму, у другому — дві третини, а в третьому бідоні — три чверті. Бак і всі три бідони вміщують по цілому числу літрів. Для якого найменшого об'єму бака можлива така ситуація?

2. Олена рівно опівдні заклеїла число 12 на своєму годиннику наліпкою з улюбленого серіалу і вирішила через певні проміжки часу заклеювати такими наліпками поточну годину:
а) скільки чисел на циферблаті будуть заклеєними, якщо Олена їх заклеюватиме кожну 51 годину?
б) скільки виявиться заклеєних чисел, якщо Олена заклеюватиме їх кожну 605-ту годину?

3. З'ясуйте зазначене нижче:
а) чи може найбільший спільний дільник двох натуральних чисел бути більшим за їх різницю?
б) доведіть, що для двох чисел a і b виконується, що НСД($a + b$, НСК[a, b]) = НСД(a, b);
в) назвемо натуральні числа a і b друзями, якщо їх добуток є точним квадратом; доведіть, що якщо a — друг b, то a — друг НСД(a, b).

4. Чи для будь-яких натуральних чисел виконується рівність:
а) $(27x + 4{,}18x + 3) = 1$;
б) $(18n + 11m, 13n + 8m) = (n, m)$;
в) $(2a + b, a(a + b)) = (a, b)$?

5. Нехай x і y — натуральні числа. Відомо, що $x^2 + y^2$ ділиться націло на xy. Доведіть, що $x = y$.

6. Скільки існує двійок (x, y) натуральних чисел, для яких НСК$[x, y] = 2000$?

7. Знайдіть, на які натуральні числа можна скоротити дріб $\frac{5a+4b}{5b+2a}$ для взаємно простих чисел a і b, якщо відомо, що його можна скоротити.

8. Доведіть, що (mk, nk, nm) ділиться на $(n, m, k)^2$.

9. Знайдіть якісь п’ять натуральних чисел, різниця кожних двох із яких дорівнює найбільшому спільному дільнику цієї пари чисел.

10. У прямокутнику з цілими довжинами сторін a і b провели діагональ. Через яке число вузлів вона проходить?

≥ +

¼ %

13 ПРАВИЛО РІВНОСТІ

÷ ≤

≈ + ?

Кого в країні більше: одружених чоловіків чи заміжніх жінок? Ми не знаємо, скільки їх, але розуміємо, що кількість однакова. У цій темі навчимося встановлювати взаємно однозначні відповідності і порівнювати множини, не підраховуючи кількість елементів у кожній із них.

Лекційна частина

Приклад 1. Яких способів більше: вибрати з 11 учнів трьох чергових чи команду з восьми учнів?

Розв'язання. *Кількості способів вибрати трьох чергових або команду з восьми учнів будуть однаковими, бо якщо ми обираємо якихось трьох учнів, то це те саме, що обрати вісьмох учнів, що не увійшли у трійку. Тому кожному способу вибрати трьох чергових ставиться у відповідність спосіб обрати вісім учнів і навпаки.*

Приклад 2. Михайло стверджує, що в числовому ряді між числами від 1 до 9999 більше тих, у яких сума цифр дорівнює 15, а Тетяна вважає, що більше тих, у яких сума цифр 21. Хто з них правий?

Розв'язання. *Для зручності усі числа від 1 до 9999 будемо записувати, як номери білетів, чотирма цифрами, тобто* 0001, 0002, ..., 9999.

Розіб'ємо всі номери на пари, кожному номеру $\overline{abcd}$ *поставимо у відповідність номер* $\overline{(9-a)(9-b)(9-c)(9-d)}$. *Помітимо, що це взаємно однозначна відповідність, бо якщо повторити процедуру зміни цифр* $9-(9-a)=a$, *ми отримуємо початкові цифри. Якщо таким чином відобразити номер, сума цифр якого* $a+b+c+d=15$, *ми отримаємо номер, сума цифр якого дорівнює* $(9-a)+(9-b)+$ $+(9-c)+(9-d)=36-a+b+c+d=21$. *Тобто в пару до кожного номера із сумою цифр 15 іде номер із сумою цифр 21 і навпаки. Значить, кількість чисел, менших за 10 000, сума цифр яких дорівнює 15, рівна кількості чисел, менших за 10 000, сума цифр яких дорівнює 21.*

Приклад 3. В інституті працюють 100 фізиків і один математик. Назвемо дослідницькою групу, до якої належать двоє чи більше науковців. Якщо в дослідницькій групі є математик, група називається «серйозною», а якщо в дослідницькій групі тільки фізики, то така група називається «веселою». Яких наукових груп більше — «серйозних» чи «веселих»?

Розв'язання. *Поставимо кожній «веселій» групі у відповідність «серйозну» групу згідно з таким правилом: додамо до неї математика. Уже можна зробити висновок, що «серйозних» груп не менше, ніж веселих. Тепер помітимо, що за такої відповідності не всі «серйозні» групи мають пару, а саме групи, в яких один фізик і один математик. Якщо з такої групи забрати математика, залишиться один фізик, і це вже не дослідницька група, бо вона має складатися не менш ніж із двох людей. Отже, «серйозних» груп більше, ніж «веселих». Можна навіть порахувати, на скільки їх більше, адже таких «серйозних» груп, до яких належать 2 особи (один математик і один фізик), рівно 100.*

Задачі

1. На колі позначено 2021 блакитну точку і одну жовту. Чого більше:

а) трикутників із вершинами в блакитних точках чи чотирикутників, у яких одна вершина жовта;

б) багатокутників із вершинами тільки в блакитних точках чи інших багатокутників?

2. Яких чисел більше від 2 до 1000, простих чи складених?

3. Неквапливий король уміє ходити тільки вгору, праворуч і праворуч-вгору. Яких шляхів неквапливого короля більше: з $a1$ в $h8$ чи з $a1$ в $h7$?

4. Яких графів із вісьмома вершинами більше: тих, у яких одинадцять ребер, чи тих, у яких сімнадцять ребер?

5. *Розбиттям* натурального числа називається його розкладання на невпорядковані натуральні складові. Доведіть, що:

   а) кількість розбиттів числа не більше ніж на десять доданків дорівнює кількості його ж розбиттів на складові, що не перевищують десяти;

   б) кількість розбиттів числа рівно на десять доданків дорівнює кількості його ж розбиттів на складові, що не перевищують десяти, серед яких обов'язково є принаймні одна десятка.

Додаткові задачі

1. Що більше: кількість способів розкласти 99 гирьок з вагами 1 г, 2 г, ..., 99 г на дві шальки терезів так, щоб ваги залишилися в рівновазі, чи кількість способів розкласти аналогічно 100 гирьок з вагами 1 г, 2 г, ..., 100 г?

2. У парку розваг при купівлі квитка на ньому вибивається номер від 000000 до 999999. Вважається, що квиток принесе успіх, якщо сума перших трьох його цифр дорівнює сумі останніх трьох цифр. Доведіть, що квитків, які приносять успіх, стільки само, скільки квитків із сумою цифр 27.

3. На прямокутному табло розміром $x \times y$, поділеному на клітинки 1×1, світяться більше $(x-1)(y-1)$ клітинок. Якщо в якомусь квадраті 2×2 не світяться три клітинки, то через деякий час гасне і четверта. Доведіть, що на табло завжди буде світитися хоча б одна клітинка.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Послідовність із п'яти цифр a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 називається «горою», якщо $a_1 < a_2 < a_3 > a_4 > a_5$, і «долиною», якщо $a_1 > a_2 > a_3 < a_4 < a_5$. Чого більше: «гір» чи «долин»?

2. Серед чисел від 2 до 1000 яких більше — простих чи кратних 3?
3. Розглянемо трикутники з натуральними довжинами сторін. Яких трикутників серед них менше — тих, периметр яких дорівнює 1000, чи тих, у яких периметр дорівнює 1003?
4. Доведіть, що сума номерів усіх квитків, що приносять успіх (номер квитка від 000000 до 999999 і сума перших трьох цифр дорівнює сумі останніх трьох), ділиться без остачі на 11.
5. Які грошові одиниці Неверляндії можна розміняти більшим числом способів: 1 нерлю (місцеві купюри) монетами номіналом 1, 2, 3, 5, 10, 15, 20 і 50 нерсів чи 100 нерлів купюрами номіналом 1, 2, 3, 5, 10, 25 і 50 нерлів (1 нерля = 100 нерсів)?

Задачі до теми

1. 47 людей стоять у шерензі. Серед них є Оленка та Тарасик. Яких шеренг більше — тих, де Оленка стоїть попереду Тарасика, чи тих, у яких Тарасик стоїть попереду Оленки?
2. Скільки є способів розставити на шаховій дошці фішки таким чином, щоб на кожній вертикалі і кожній горизонталі стояли рівно сім фішок?
3. Дано числовий ребус: ДВА + ТРИ = П’ЯТЬ (однаковим літерам відповідають однакові цифри, різним — різні). Доведіть, що кількість його розв’язків ділиться на 4.
4. Основна властивість квадратів. Доведіть, що натуральне число є повним квадратом тоді і тільки тоді, коли кількість його натуральних дільників — непарна [7, с. 13].
5. Яких натуральних дільників у 1 000 000 більше — тих, що менші за 1000, чи тих, що більші за 1000?

6. Назар та Дмитро вирішили підраховувати суми цифр шестицифрових чисел. Назар стверджує, що парних чисел із сумою цифр 45 менше, ніж непарних із сумою цифр 47, а Дмитро із ним не погоджується. Хто із хлопців правий?

7. Нехай А — кількість способів виписати числа 1, 2, 3, ..., 2000 у ряд таким чином, що якісь два сусідних числа відрізняються на 1000, а В — кількість усіх способів, що залишилися. Доведіть, що А > В.

8. Доведіть, що за умови довільного натурального n рівняння $x^2 + y^2 = n$ і $x^2 + y^2 = 2n$ мають однакову кількість розв'язків у цілих числах.

9. Олена підрахувала кількість усіх можливих слів, що складаються з m літер, у записі яких можуть використовуватися лише чотири літери — Д, Ж, Е і М, до того ж у кожному слові літер Д і Ж однакова кількість. Тарас підрахував кількість усіх можливих слів, що складаються з $2m$ літер, у записі яких можуть використовуватися тільки дві літери — Д і Ж, причому в кожному слові цих літер однакова кількість. У кого слів вийшло більше? (Слово — довільна послідовність літер.)

10. Послідовність $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ із шести натуральних чисел називається хорошою, якщо задовольняє умовам: $a_1 = 1$, $a_{k+1} \leq a_k + 1$. Яких хороших послідовностей більше — із парною сумою членів чи з непарною?

14 РІВНЯННЯ В ЦІЛИХ ЧИСЛАХ. РОЗКЛАД НА МНОЖНИКИ

У рівняннях, де всі коефіцієнти цілі й необхідно знайти цілі розв'язки, розклад на множники дає можливість скористатись теорією подільності чисел, що дає додаткову інформацію для пошуку варіантів розв'язання.

Приклад 1. Чи існують такі натуральні числа x і y, що:
1. $x^2 - y^2 = 2027$?
2. $x^3 - y^3 = 2027$?
3. $x^3 + y^3 = 3\ 333\ 333$?

Розв'язання.

1. Скористаємось формулою різниці квадратів $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 2027$; $x - y$ та $x + y$ мають бути дільниками простого числа 2027. Оскільки число $x + y$ — це сума натуральних чисел, то воно більше 1 і може дорівнювати тільки числу 2027, відповідно $x - y$ буде 1. Тому маємо, що

$$\begin{cases} x + y = 2027 \\ x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2028 \\ x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1014 \\ y = 1013 \end{cases}$$

Відповідь: $x = 1014$, $y = 1013$.

2. За формулою різниці кубів маємо $x^3 - y^3 = (x - y) \times (x^2 + xy + y^2) = 2027$. Оскільки, 2027 — просте число, а число $x^2 + xy + y^2$ більше 1, тоді воно дорівнює 2027, а число $x - y$, відповідно, 1. Тому маємо, що

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 2027 \\ x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (y+1)^2 + (y+1)y + y^2 = 2027 \\ x = y + 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3y^2 + 3y = 2026 \\ x = y + 1 \end{cases}$$

Із першого рівняння системи випливає, що число 2026 має ділитись на 3, але це не так. Тому розв'язань у натуральних числах немає.

3. За формулою суми кубів маємо $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = 3\ 333\ 333$. Один із отриманих множників має ділиться на 3, бо на 3 ділиться права частина рівності. Також зазначимо, що $x^2 - xy + y^2 = (x + y)^2 - 3xy$, тобто якщо $x + y$ ділиться *на 3, тоді і $x^2 - xy + y^2$ також. В іншу сторону це також працює, бо якщо $(x + y)^2 - 3xy$ ділиться на 3, тоді на 3 ділиться $(x + y)^2$, а значить, і число $x + y$. Отже, ліва частина ділиться не один раз на 3, а двічі. Прийшли до суперечності, адже 3 333 333 ділиться на 3 тільки один раз. Отже, розв'язків немає.*

Приклад 2. Розв'яжіть у цілих числах рівняння.

1. $(3x - 5y)(3x + y) = 7$.
2. $xy + 3x - 5y = -4$.
3. $x^2 + xy = x + 2y + 9$.

Розв'язання.

1. Оскільки 7 — просте число і $3x - 5y$ та $3x + y$ — цілі числа, то вони мають дорівнювати ±1 та ±7. Розглянемо всі чотири можливі варіанти:

$$I.\quad \begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 3x + y = 7 \end{cases}$$

$$II.\quad \begin{cases} 3x - 5y = -1 \\ 3x + y = -7 \end{cases}$$

$$III.\quad \begin{cases} 3x - 5y = 7 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$$

$$IV.\quad \begin{cases} 3x - 5y = -7 \\ 3x + y = -1 \end{cases}$$

Домноживши верхню рівність на –1 і просумувавши рівняння, матимемо:

$$I.\quad \begin{cases} 6y = 6 \\ 3x + y = 7 \end{cases}$$

$$II.\quad \begin{cases} 6y = -6 \\ 3x + y = -7 \end{cases}$$

$$III.\quad \begin{cases} 6y = -6 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$$

$$IV.\quad \begin{cases} 6y = 6 \\ 3x + y = -1 \end{cases}$$

Отримаємо, що

$$I.\quad \begin{cases} y = 1 \\ 3x = 6 \end{cases}$$
$$II.\quad \begin{cases} y = -1 \\ 3x = -6 \end{cases}$$
$$III.\quad \begin{cases} y = -1 \\ 3x = 2 \end{cases}$$
$$IV.\quad \begin{cases} y = 1 \\ 3x = -2 \end{cases}$$

Отже, у першому випадку $x = 2$, $y = 1$;
у другому $x = -2$, $y = -1$.

У третьому та четвертому x *не є цілим числом, що не задовольняє умові задачі.*

2. $xy + 3x - 5y + 4 = x(y + 3) - 5(y + 3) + 19 = (x - 5)(y + 3) + 19$. Тому $(x - 5)(y + 3) = -19$, *відповідно, оскільки 19 — просте число, маємо чотири можливі варіанти:*

$$I.\quad \begin{cases} x - 5 = 1 \\ y + 3 = -19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = -22 \end{cases}$$
$$II.\quad \begin{cases} x - 5 = -1 \\ y + 3 = 19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 16 \end{cases}$$
$$III.\quad \begin{cases} x - 5 = 19 \\ y + 3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 24 \\ y = -4 \end{cases}$$
$$IV.\quad \begin{cases} x - 5 = -19 \\ y + 3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -14 \\ y = -2 \end{cases}$$

3. $x^2 + xy - x - 2y - 9 = x^2 - 2x + xy - 2y + x - 2 - 7 = x(x - 2) + y(x - 2) + (x - 2) - 7 = (x - 2)(x + y + 1) - 7$.

Тому нам потрібно розв'язати в цілих числах рівняння $(x - 2)(x + y + 1) = 7$.

Розглянемо всі чотири можливі варіанти:

$$I.\quad \begin{cases} x-2=1 \\ x+y+1=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases}$$

$$II.\quad \begin{cases} x-2=-1 \\ x+y+1=-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-9 \end{cases}$$

$$III.\quad \begin{cases} x-2=7 \\ x+y+1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=9 \\ y=-9 \end{cases}$$

$$IV.\quad \begin{cases} x-2=-7 \\ x+y+1=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-5 \\ y=3 \end{cases}$$

Приклад 3. Розв’яжіть у натуральних числах рівняння $n^3 + m^3 + 1 = 3nm$.

Розв’язання. *Скористаємось рівністю* $n^3 + m^3 + k^3 - 3nmk = (n + m + k)(n^2 + m^2 + k^2 - nm - nk - mk)$. *Тоді матимемо, що* $n^3 + m^3 + 1 - 3nm = (n + m + 1)(n^2 + m^2 + 1 - nm - n - m) = 0$. *Оскільки* $n + m + 1$ *більше нуля, тоді* $n^2 + m^2 + 1 - nm - n - m = 0$.

Помітимо, що $0 = 2 \cdot 0 = 2\,(n^2 + m^2 + 1 - nm - n - m) = (n^2 - 2nm + m^2) + (n^2 - 2n + 1) + (m^2 - 2m + 1) = (n - m)^2 + (n - 1)^2 + (m - 1)^2$.

Сума квадратів може дорівнювати 0, *тільки якщо кожний із квадратів буде нулем, інакше сума буде додатною. Тоді* $n = m = 1$ *і є єдиним розв’язком.*

Задачі

1. Знайдіть усі пари цілих чисел, для яких виконується рівняння

$$a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1 = 2885.$$

2. Знайдіть усі пари цілих чисел (n, m), що задовольняють рівнянню

$$n^2 = m^2 + 2m + 13.$$

3. Знайдіть усі пари натуральних чисел (a, b), для яких виконується рівність

$$6a^2 b + 2a^2 + 3ab + a - 9b = 2016.$$

4. Розв'яжіть у натуральних числах рівняння

$$2^x + 1 = y^2.$$

5. Розв'яжіть у цілих числах рівняння

$$n^3 + m^3 = 4(n^2m + nm^2 + 1).$$

Додаткові задачі

1. Розв'яжіть у натуральних числах рівняння

$$a^4 + 2b^4 + 1 = 4b^2 a.$$

2. Розв'яжіть у натуральних числах рівняння

$$1 + x + x^2 + x^3 = 2^y.$$

3. Доведіть, що серед попарно взаємно простих чисел $n,$ $m, k, l,$ що задовольняють рівність $nm + kl = nk - 10ml$, можна обрати 3 числа так, що одне дорівнює сумі двох інших.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Для прямокутника, сторони якого є натуральними числами, виконується, що його периметр і площа набувають однакових значень. Знайдіть усі такі прямокутники і доведіть, що інших не існує.

2. Розв'яжіть у цілих числах рівняння

$$n^2 - nm - 2m^2 = 7.$$

3. Знайдіть усі пари натуральних чисел (a, b), для яких виконується рівність

$$a^6 = b^3 + 217.$$

4. Куб складений із 92 кубиків, ребро одного з яких, на відміну від інших, має натуральну довжину, відмінну від 1 (всі інші кубики мають ребро 1). Знайдіть об’єм великого куба.

5. Знайдіть усі пари цілих чисел x, y для яких є правильною рівність

$$x^3 - 6x^2 - xy + 14x + 3y - 14 = 0.$$

Задачі до теми

1. Розв’яжіть у цілих числах рівняння:

а) $nm = n + m + 4$;

б) $6xy - 4x + 9y - 366 = 0$;

в) $2x + 5y = xy - 1$;

г) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{7}$.

2. Розв’яжіть у простих числах рівняння

$$nmk = 7(n + m + k).$$

3. Знайдіть усі пари цілих чисел (n, m), що задовольняють рівнянню

$$n + 3nm + m = 2019 - 3m^2.$$

4. Знайдіть усі пари натуральних чисел (a, b), для яких виконується рівність

$$a^2 + ab = b + 92.$$

5. Доведіть, що рівняння $(n - m)^3 + (m - k)^3 + (k - n)^3 = 30$ не має розв’язків у цілих числах.

6. Знайдіть усі пари цілих чисел (a, b) таких, де $a^4 + 4b^4$ є простим числом.

7. Знайдіть усі прості q, для кожного з яких існують такі натуральні n і m, що $q^n = m^3 + 1$.

8. Чи можна числа 1, 2, 3, ... , 15 об’єднати в групи із двох і тринадцяти чисел відповідно, щоб сума тринадцяти чисел і добуток інших двох чисел були рівними?

9. Розв'яжіть у натуральних числах рівняння $3 \cdot 2^x + 1 = y^2$.

10. Знайдіть усі пари цілих чисел x і y, за яких є правильною рівність $6y^2 - 2x^2 + yx = 3$.

15 ПРИНЦИП КРАЙНЬОГО

Принцип крайнього — це продовження пошуку «вузьких місць» під час розв'язування задач. Назва принципу дає нам вказівку, де в першу чергу потрібно шукати такі місця. Зазвичай у крайніх точках ми маємо більше очевидних властивостей, що робить процес розмірковування легшим.

Приклад 1. У нас є 100 стрижнів, викладених за збільшенням довжини, як зображено на рисунку 26. За яку кількість перевірок можна точно визначити, чи з будь-яких трьох стрижнів можна зробити трикутник?

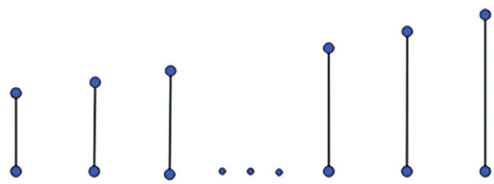


Рис. 26

Розв'язання. *Зрозуміло, що менш ніж за одну перевірку це зробити неможливо. Покажемо, що це можна зробити за одну перевірку. Візьмемо два найкоротші брусочки та один найдовший і перевіримо, чи можна із них скласти трикутник, чи виконується для обраних брусочків нерівність трикутника. Якщо два найменші брусочки разом коротші за найдовший, то трикутник скласти неможливо. Отже, не з будь-яких трьох брусочків можна скласти трикутник. Якщо ж вони виявляться довшими за найдовший брусочок, то тоді будь-які два брусочки будуть у сумі довші за третій. Це означає, що нерівність трикутника виконується для будь-яких трьох брусочків, тому з будь-яких трьох брусочків можна скласти трикутник.*

У задачі «крайніми» є два найкоротші і один найдовший брусочок, вони також і «вузьке місце» цієї задачі.

Приклад 2. Чи можна розсадити 54 учні у 10 класах так, щоб кількість учнів у різних класах була різною і не було класів без учнів?

Розв’язання. *Найменша можлива сума для десяти натуральних чисел — це* $1 + 2 + 3 + \dots + 10 = 10 \cdot 11/2 = 55$. *Тоді дітей у цих класах має бути не менше ніж 55, а в нас всього 54 учні, тобто це неможливо.*

Приклад 3. На клітчастій площині в кожну клітинку вписане натуральне число, причому воно дорівнює середньому арифметичному всіх своїх «сусідів» по стороні. Скільки серед них може бути різних чисел?

Розв’язання. *Оскільки всі числа на дошці натуральні, то серед них є найменше число. Оскільки це число найменше, тоді всі числа, що стоять поруч із ним, не можуть бути менші за нього, але тоді вони не можуть і бути більші за нього, бо тоді їх середнє арифметичне значення не буде йому дорівнювати і буде більше, що суперечить умові задачі. Тому всі числа, що стоять поруч із мінімальним, йому рівні. По сторонам клітинок ми можемо дійти від будь-якої клітинки до будь-якої іншої. Отже, усі числа на дошці будуть рівні.*

Задачі

1. Доведіть, що наведені нижче твердження Олексія неправильні:

а) позначивши кілька точок на прямій, Олексій стверджує, що кожна позначена точка є серединою відрізка, що з’єднує якісь дві позначені точки;

б) Олексій позначив ще кілька точок поза прямою і запевняє, що тепер точно кожна позначена точка є серединою відрізка, що з’єднує якісь дві позначені точки.

2. По колу розставлено не менше двох натуральних чисел так, що кожне з них є дільником одного із сусідніх. Доведіть, що серед цих чисел є два рівних.

3. Причепурившись і одягнувшись якнайкраще, на випускний прийшло 67 дівчат. У деякий час — відстані між дівчатами попарно різні. Кожна з них слідкує за найближчою своєю суперницею. Доведіть, що в цей момент якась дівчина залишилася без споглядання іншою.

4. Чи правда, що в довільному опуклому п'ятикутнику можна вибрати три діагоналі, з яких можна скласти трикутник?

5. Дехто з освітян, що зібрались на фестивалі, приятелюють між собою. Виявилося, що якщо двоє освітян мають на фестивалі однакове число приятелів, то вони не мають спільних приятелів. Доведіть, що можна знайти освітянина, який має лише одного приятеля серед учасників фестивалю.

Додаткові задачі

1. Вирішіть систему рівнянь у натуральних числах

$$\begin{cases} a+b=cd \\ c+d=ab. \end{cases}$$

2. Дано опуклий багатокутник. Із внутрішньої точки опускаються перпендикуляри на всі сторони багатокутника. Доведіть, що основа принаймні одного з перпендикулярів лежатиме на самій стороні, а не на її продовженні.

3. (Теорема Хеллі.) На прямій дана скінченна кількість відрізків, серед яких будь-які два мають спільну точку. Доведіть, що всі ці відрізки мають спільну точку.

Задачі для самостійного розв'язування

1. У археолога є шалькові терези без гир і 8 камінців. Він хоче знати, чи дійсно довільні два камінці завжди важчі за один. Як перевірити це:

   а) за 19 зважувань;
   б) за 13 зважувань?

2. У кожній вершині правильного 45-кутника записане число. Модуль різниці двох сусідніх чисел дорівнює числу, що передує їм за годинниковою стрілкою. Сума всіх чисел дорівнює 1. Якими можуть бути ці числа? (Визначте всі варіанти і доведіть, що інших немає.)

3. Є 21 учений вагою 71 кг, 72 кг, 73 кг, ..., 91 кг. Десять із них — фізики, десять — хіміки і один — математик. Відомо, що загальна вага всіх фізиків на 110 кг більша, ніж загальна вага хіміків. Знайдіть вагу математика. (Знайдіть усі можливі розв'язки і доведіть, що інших немає.)

4. Андрій склав попарно 5 чисел, які загадав Михайло, і отримав такі 10 чисел: 0, 2, 4, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 15. Які числа загадав Михайло?

5. У Єви є статуетка у формі опуклого многогранника. На кожній грані Єва записала число, що дорівнює кількості ребер у цієї грані. Чи можуть усі отримані числа бути різними?

Задачі до теми

1. У школі провели змагання з перетягування каната. Усіх учасників записали за зменшенням сили. Учитель фізкультури замислився: чи будь-які троє перетягнуть будь-яких двох? За яке мінімальне число перетягувань він зможе це дізнатися?

2. На дошці восьмикласниця Мирослава записала натуральні числа від 1 до 100, забувши про якісь 9 чисел. Чи обов'язково серед чисел на дошці можна вибрати 9, сума яких дорівнює 100?

3. На полях дошки 10 × 10 розставлені числа 1, 2, ..., 100. Доведіть, що знайдеться пара сусідніх по стороні клітинок, де числа відрізняються не менше ніж на 6.

4. Дано таблицю $n \times n$, у кожній клітинці якої записане число, однак усі числа різні. У кожному рядку позначили

найменше число, і всі позначені числа виявилися в різних стовпчиках. Потім у кожному стовпчику позначили найменше число. Усі позначені числа опинилися в різних рядках. Доведіть, що обидва рази позначили одні й ті самі числа.

5. Сім фізиків виміряли разом 100 шишок, але кожний поміряв різну кількість. Доведіть, що якісь три фізики поміряли разом не менш ніж 50 шишок.

6. На нескінченній дошці розташовано кілька тур. Чи завжди є тура, що б’є не більш ніж дві інші тури, незалежно від їх розташування?

7. Чи існує тетраедр, кожне ребро якого було б стороною плоского тупого кута?

8. Дано багатокутник, із кожної вершини якого проведені перпендикуляри до сторін, що не містять цю вершину. Доведіть, що знайдеться вершина, хоча б одна з основ перпендикулярів з якої лежатиме на самій стороні, а не на її продовженні.

9. Доведіть, що не можна вибрати 2021 різне натуральне число так, що сума довільних 2020 з них буде не менша за квадрат 2021-го числа.

10. Дано нескінченну послідовність попарно різних натуральних чисел, відмінних від 1. Доведіть, що знайдеться нескінченна кількість чисел, що більші за свій номер у цій послідовності.

Список використаних джерел

1. Апостолова Г. В., Бакал О. П. Логічними стежинками математики. 5–9 класи. Київ : Генеза, 2016. 304 с.
2. Байсалов Дж. У., Мекуш О. Г., Соліч К. В., Федуник-Яремчук О. В. Методи розв'язування олімпіадних задач : навч. посіб. Луцьк : Східноєвроп. нац. ун-т імені Лесі Українки, 2018. 202 с.
3. Бородін О. І. Теорія чисел. Київ : Вища школа, 1970. 274 с.
4. Вороний О. М. Кіровоградські математичні олімпіади школярів 2000–2008 рр. : метод. посіб. Кіровоград : РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2008. 212 с.
5. Збірник конкурсних та олімпіадних задач з математики. / за ред. О. К. Закусило. Київ : Діалектика, 1995. 192 с.
6. Ізюмченко Л. В., Нічишина В. В., Ріжняк Р. Я. Цілі та комплексні числа : методичний посібник для виконання контрольних робіт учнями 10–11 класів. Серія: Навчальні матеріали для учнів заочної фізико-математичної школи. Кіровоград : РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2009. 112 с.
7. Лейфура В. М., Мітельман І. М., Радченко В. М., Ясінський В. А. Математичні олімпіади школярів України: 1991–2000 рр. : навч. метод. посіб. Київ : Техніка, 2003. 542 с.
8. Лейфура В. М., Мітельман І. М., Радченко В. М., Ясінський В. А. Математичні олімпіади школярів України: 2001–2006 рр. Львів : Каменяр, 2008. 348 с.
9. Мартинюк О. М., Попіна С. Ю. Елементи комбінаторики й класичне означення ймовірності. Тернопіль, 2003. 40 с.
10. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків : Гімназія, 2019. 208 с.
11. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Харків : Гімназія, 2017. 416 с.

12. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Рабінович Ю. М., Якір М. С. Збірник задач та контрольних робіт : підруч. для 11 кл. Харків : Гімназія, 2021.
13. Ніколаєва К. В., Койбічук В. В. Дискретний аналіз. Графи та їх застосування в економіці : навч.-метод. посіб. Суми : УАБС НБУ, 2007. 84 с.
14. Сарана О. А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч : навч. посіб. Тернопіль : Богдан, 2011. 400 с.
15. Українські математичні олімпіади : довідник / В. А. Вишенський, О. Г. Ганюшкін, М. В. Карташов та ін. Київ : Вища школа, 1993. 415 с.
16. У світі математики : журнал : українське науково-популярне видання з математики. Київ : Київський університет, 1995.
17. Федак І. В. Готуємося до олімпіади з математики. Ч. І. Кам'янець-Подільський : Абетка, 2006. 111 с.
18. Федак І. В. Івано-Франківські обласні олімпіади з математики 2011–2015 рр. Івано- Франківськ : Голіней, 2015. 64 с.
19. Федак І. В. Методи розв'язування олімпіадних завдань з математики (і не тільки їх). Чернівці : Зелена Буковина, 2002. 340 с.
20. Ядренко М. Й. Принцип Діріхле. Київ : Вища школа, 1986. 48 с. (Бібліотека фізико-математичної школи).
21. Andreescu T., Feng Z. 102 Combinatorial Problems. Springer Science and Business Media New York, 2003. 148 p.
22. Bornsztein P. Cours – Theorie des graphes. URL: https://igor-kortchemski.perso.math.cnrs.fr/olympiades/Cours/Graphes/graphes.pdf (дата звернення: 17.05.2024).
23. Kedlaya K. S., Poonen B., Vakil R. The William Lowell Putnam Mathematical Competition 1985–2000: Problems, Solutions, and Commentary. Vol. 33. American Mathematical Soc., 2020. 351 p.
24. Levin O. Discrete Mathematics: An open introduction. 3rd edition School of Mathematical Science University of Northern Colorado. 2021. 414 p.
25. Teoría de números: para principiantes / R. Luis, B. Jiménez et al. Universidad Nacional de Colombia, Fac. de Ciencias, 2004. 294 p.

Список ілюстрацій

Навчальне видання

Математика
як інструмент мислення

Навчально-методичний посібник

Відповідальна за випуск *А. Грітчина*
Редагування *Т. Рябокінь*
Верстання *І. Кирноз*
Дизайн обкладинки *І. Кирноз*

Формат 84×108/16. Папір офс. 80 г/м^2.
Друк цифровий. Ум. друк. арк. 7,2.
Наклад 300 прим.

Видавництво: Національний центр
«Мала академія наук України»,
Кловський узвіз, буд. 8, м. Київ, 01021

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
ДК № 6999 від 04.12.2019