

ГРАЛЬНІ КУБИКИ

І МАТЕМАТИКА

Методичні
рекомендації

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ЦЕНТР «МАЛА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ»

ГРАЛЬНІ КУБИКИ



I МАТЕМАТИКА

Методичні
рекомендації

Київ
Національний центр
«Мала академія наук України»
2025

Укладачі:

К. В. Терлецька — завідувачка лабораторії математичних наук Національного центру «Мала академія наук України», старша наукова співробітниця Інституту проблем математичних машин і систем Національної академії наук України, докторка фізико-математичних наук;

К. О. Антошина — методистка лабораторії математичних наук Національного центру «Мала академія наук України»

*Рекомендовано для використання в освітньому процесі
решенням науково-методичної ради
Національного центру «Мала академія наук України»
(протокол № 3 від 09.09.2025)*

Г75 **Гральні кубики і математика** : методичні рекомендації / уклад.: К. В. Терлецька, К. О. Антошина. — Київ : Національний центр «Мала академія наук України», 2025. — 36 с.
ISBN 978-617-8586-03-4

Методичні рекомендації «Гральні кубики і математика» призначені для ознайомлення учнів, вихованців закладів загальної середньої та позашкільної освіти з використанням гральних кубиків як інструменту розвитку математичного мислення, дослідження закономірностей та імовірностей випадкових подій, аналізу, інтерпретування та представлення даних, математичного моделювання. У виданні зібрано практичні матеріали для проведення занять, а саме: навчальні ігри, фокуси, експерименти й задачі, що розвивають аналітичне мислення, інтуїцію та підвищують інтерес до математики.

Видання адресоване педагогічним працівникам закладів позашкільної освіти, зокрема системи Малої академії наук України, а також усім, хто цікавиться проблемами розвитку математичної грамотності учнів і вихованців, популяризацією математики.

УДК 374.015.31:51

ЗМІСТ

4 Передмова

6 ІСТОРІЯ ГРАЛЬНИХ
КУБИКІВ: ВІД ДАВНИНИ
ДО СУЧАСНОСТІ

9 АЗАРТНІ ІГРИ
І МАТЕМАТИКА

12 ОСНОВИ ГРИ
В КУБИКИ

14 ІГРИ З ГРАЛЬНИМИ
КУБИКАМИ

14 Швидкий множник

15 Більше за всіх

16 Ланцюжок множення

16 Свиня

17 ФОКУСИ
З ГРАЛЬНИМИ
КУБИКАМИ

17 Відгадування числа

18 Відгадування суми
очок на закритих
гранях

19 Відгадування
порядку кубиків

21 ЕКСПЕРИМЕНТ
«РЯД КУБИКІВ»

24 ЗАДАЧІ ДЛЯ
ДОПИТЛИВИХ

26 Приклади
розв'язування задач

29 Задачі для
розв'язання

32 Заключне слово

34 Список
використаних джерел

Передмова

Сучасна освіта потребує впровадження інноваційних практико-орієнтованих підходів до навчання математики, що пов'язано зі зниженням мотивації до її вивчення. У цьому контексті актуальним є використання інструментів, які поєднують ігрову діяльність, експеримент і пізнання. Таким інструментом можуть стати гральні кубики – простий, але універсальний засіб, що століттями слугував не лише для розваг, а й для осмислення математичних закономірностей. Кубики можна ефективно використовувати з метою формування математичної грамотності, розвитку логічного мислення та засвоєння понять комбінаторики, ймовірності, статистики.

На заняттях математичних гуртків у закладах загальної середньої та позашкільної освіти ігри з кубиками розкривають зміст багатьох математичних ідей, фокуси викликають цікавість і розвивають нестандартне мислення, а задачі й експерименти навчають більш глибоко розуміти математичні принципи і закони випадковості.

У виданні представлено:

- короткий історичний огляд гральних кубиків та їхнього застосування у культурах багатьох народів і різних наукових галузях;
- приклади ігор для вихованців, учнів різного шкільного віку;
- математичні фокуси й пояснення до них;
- експеримент, пов'язаний з теорією ймовірностей;
- задачі з поступовим ускладненням;
- тлумачення основних понять, які використовуються для обчислення імовірності події, що може відбутися за певних умов.

У центрі уваги — формування цілісного математичного мислення під час активностей, що поєднують гру, моделювання, дослідження.

Також у виданні наголошено на тому, що звичайні гральні кубики можуть стати ефективним засобом для заохочення до більш глибокого й захопливого вивчення математики в гуртках закладів загальної середньої та позашкільної освіти.

ІСТОРІЯ ГРАЛЬНИХ КУБИКІВ: ВІД ДАВНИНИ ДО СУЧАСНОСТІ



Рис. 1. Гравці в кубики. Мозаїчна панель із Тісдруса (Ель-Джем, Туніс). Римська цивілізація, II ст. н. е.¹

Гральні кубики мають довгу історію, що сягає тисячоліть [3]. Вони з'явилися задовго до виникнення писемності та стали одним із перших засобів розваг, прогнозування майбутнього й навіть навчання.

На сьогодні кубики — це невід'ємний елемент багатьох ігор. Утім, їхнє походження сповнене загадок і цікавих фактів.

Перші гральні кубики не мали форми правильного багатогранника. Вважають, що їхнім прообразом були суглобові кістки парнокопитних тварин. Вони мали чотири грані та були відомі як гомілкові кістки. Їх використовували як для передбачення майбутнього, ворожіння, так і для ігор.

¹ Tunis, Musée National Du Bardo (Archaeological Museum). Photo by DeAgostini/Getty Images.

Найдавніші гральні кубики, яким понад 4500 років, були знайдені на території Ірану під час археологічних розкопок в «Згорілому місті» – археологічній пам'ятці, розташованій у провінції Систан і Белуджистан.

Кубики з кістки, датовані 3100–2400 рр. до н. е., було виявлено в Шотландії, а теракотові кубики, яким близько 4000 років, – в Індії.

У Стародавньому Єгипті більше 5000 років тому була популярна гра «Сенет», у якій для підкидання використовували палички, що виконували роль гральних кубиків. У Месопотамії кубики були частиною настільних ігор, подібних до сучасних нард. Давньоіндійський епос «Махабхарата» описує азартні ігри з використанням кубиків. Греки послуговувалися кубиками в іграх на майстерність. У Римі азартні ігри з кубиками були хоч і забороненими, проте дуже популярними. Римські кубики виготовляли з кістки, бронзи або каменю. Цікавим є той факт, що римляни мали два види кубиків: *tali* з чотирма гранями і *tesserae*, подібні до сучасних шестигранних кубиків. У Китаї кубики були «прабатьками» доміно і гральних карт.

Винахід друку сприяв створенню карт як еволюції кубиків, але останні залишалися популярною настільною грою.

У середньовічній Європі гральні кубики виготовляли з дерева, кістки, металу, деколи навіть із коштовних матеріалів. Використовували їх не лише для розваг, а й для азартних ігор.



Рис. 2. Джузеппе Марія Креспі. Гравці в кості. XVIII ст.²

² Див.: [https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%96_\(%D0%B3%D1%80%D0%B0\)#/media/%D0%A4%D0%B0%D0%B9%D0%BB:Giuseppe_Maria_Crespi_-_Dice_Players_-_WGA05756.jpg](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%96_(%D0%B3%D1%80%D0%B0)#/media/%D0%A4%D0%B0%D0%B9%D0%BB:Giuseppe_Maria_Crespi_-_Dice_Players_-_WGA05756.jpg).

Нині гральні кубики мають переважно шестигранну форму, а числа на їхніх гранях позначені точками. Сума чисел на протилежних гранях завжди дорівнює семи. Такий формат зберігається століттями. Окрім традиційних, популярними є багатогранні кубики.

Гральні кубики як важливий символ випадковості й невизначеності застосовують у багатьох галузях науки. У фізиці вони використовуються для моделювання квантових явищ і випадкових процесів. У біології — для симуляції популяційної динаміки й еволюційних механізмів. В економіці — для оцінювання ризиків, розроблення стратегій прийняття рішень і прогнозування ринкових змін. В інформатиці — для створення алгоритмів генерації випадкових чисел і розроблення криптографічних методів.

Використання гральних кубиків у цих галузях демонструє їхню універсальність, а також глибокий зв'язок із фундаментальними аспектами наукового дослідження.



АЗАРТНІ ІГРИ І МАТЕМАТИКА

Азартні ігри, ставки, лотереї – це сфери, де математика відіграє ключову роль. Розуміння базових принципів ймовірності та статистики допомагає, зокрема, уникати пасток у грі – ситуацій, які можуть здаватися виграшними на перший погляд.

Чому організатори азартних ігор завжди у виграші?

Казино й букмекери завжди виграють, бо використовують математику для збільшення шансів вигравів на свою користь.

Наприклад:

- у рулетці ймовірність виграшу в разі ставки на один номер становить 1 до 37 (або 38, залежно від рулетки), а виплата за виграш зазвичай менша, ніж цей ризик;
- у ставках на спортивні події букмекери коригують коефіцієнти у такий спосіб, щоб у будь-якому разі отримати прибуток.

Це називається *математична перевага казино*, або *House Edge*. Навіть якщо ймовірність виграшу дуже близька до 50 %, наприклад 49 %, цього достатньо, щоб казино отримувало стабільний прибуток.

Закон великих чисел

Відповідно до закону великих чисел навіть такі випадкові процеси, як кидання кубика, під час довготривалих спостережень показують передбачувані закономірності. Саме така властивість лежить в основі стабільності прибутків у ймовірнісних іграх.

Наприклад, ви не можете передбачити результат наступного кидка кубика, проте після 1000 кидків можна з упевненістю сказати, що кожна зі сторін кубика випадатиме приблизно однаковою кількістю разів (близько $1/6$ від усіх кидків). Цей принцип допомагає казино залишатися у виграві. Хоча окремих гравців теж може виграти, але в середньому всі гравці разом програють достатньо, щоб забезпечити прибуток казино.

Стратегії для ставок

Математика також дає змогу розробляти стратегії для ставок. Наприклад, у *ставках на спортивні події* коефіцієнт змінюється з часом і залежно від обставин (загального стану і травм гравців, погодних умов тощо). *Аналіз імовірностей* — відношення кількості сприятливих випадків до загальної кількості можливих випадків — допомагає визначити найкращі ситуації для ставок, а *теорія ігор* — аналізувати стратегічні ситуації, коли результат залежить від вибору кількох гравців. Це може бути корисним не лише у ставках, а й у бізнесі чи політиці.

Лотереї та вибір чисел

У лотереях кожен набір чисел має однакові шанси на виграш, але важливо розуміти такі дві умови:

- 1) *ймовірність виграшу дуже мала*: у лотереї 6 із 49³ шанс виграти джек-пот — приблизно 1 до 14 мільйонів;
- 2) *джек-пот ділиться між переможцями*: якщо кілька людей обрали одні й ті самі числа, приз буде поділений між тими, хто обрав ці числа. Оскільки багато людей вибирають числа, пов'язані з датами (1–31), або популярні послідовності (наприклад: 1, 2, 3, 4, 5, 6), то виграш у разі такої комбінації буде розподілений між великою кількістю гравців. Натомість, якщо випаде менш популярна комбінація, переможці отримають значно більше грошей.

Азартні ігри демонструють важливість розуміння ймовірностей і статистики. Математика допомагає не лише аналізувати можливості, а й приймати більш обґрунтовані рішення в реальному житті. Розуміння закону великих чисел, математичної переваги, теорії ймовірностей дає змогу краще оцінювати ризики й уникати пасток.

³ Перед кожним розіграшем учасники обирають 6 чисел із діапазону від 1 до 49. Під час розіграшу випадковим чином витягують 6 чисел. Якщо хоча б частина обраних чисел збігається з витягнутими — ви виграєте. Чим більший збіг, тим більший виграш. Головний виграш (джек-пот) отримують, якщо правильно вгадані всі 6 чисел. Це найрідкісніший і найвищий виграш.

ОСНОВИ ГРИ В КУБИКИ

Гральний кубик – це багатогранник, кожна грань якого позначена числами, точками або символами (рис. 3). Найбільш поширений різновид кубика – шестигранний, його грані містять від 1 до 6 точок. Кубик кидають для отримання випадкового результату. Після кидання верхня грань кубика у спокої визначає його результат.

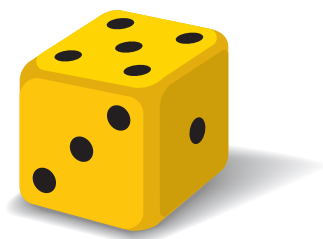


Рис. 3. Гральний кубик

Загальна термінологія гри у кубики:

- *кидок* – кидання одного або кількох кубиків;
- *результат* – число або сума чисел, які випали після кидання;
- *грань* – одна зі сторін кубика, на якій зображене число чи символ;
- *хід* – послідовність дій, під час якої гравець кидає кубики та виконує кроки залежно від результату;
- *відкладання* – невикористання окремих кубиків із вигідними результатами під час повторного кидка інших кубиків.

Знання термінології допомагає розуміти правила гри та її стратегії, робить ігровий досвід кращим.

Техніки кидання кубиків

Те, як кидають кубики, може впливати на результат. Хоча кидання кубиків передбачає випадковість, удосконалення техніки кидання може сприяти більш передбачуваним результатам. Розповімо про найбільш поширені техніки кидання кубиків.

Чашка. Складені у чашку кубики струшують, а потім кидають на рівну поверхню. Цей метод позбавляє гравців будь-якого впливу на результат кидання і часто використовується в казино.

Кидок рукою. Кубики струшують у руці й відпускають легким рухом зап'ястя. Це найбільш поширена техніка в неформальній грі.

Контрольований кидок. Використовують однаковий рух і відпускають кубики з тієї самої висоти кожного разу для досягнення стабільності. Хоча повний контроль над кубиками є спірним, саме стабільність може допомогти мінімізувати небезпечні для гравця результати.

Лоток для кубиків. Використання лотка для кидання допомагає утримувати кубики в межах ігрового поля та забезпечує стабільну поверхню для кидання — зменшує можливість їх скокування зі столу.

Описані нижче ігри проводяться зі звичайними, «чесними» гральними кубиками, де кожне число від 1 до 6 має однакову ймовірність випадіння в результаті кидка.

ІГРИ З ГРАЛЬНИМИ КУБИКАМИ

Гральні кубики — один із найпростіших, але водночас захопливих засобів візуалізації математичних понять. Кубики поєднують у собі випадковість і стратегію, формують логічне мислення, навчають швидких обчислень і розвивають інтуїцію. Ігри з кубиками можуть бути використані в освітньому процесі, оскільки допомагають учням, вихованцям опанувувати арифметичні дії, поняття теорії ймовірностей та комбінаторики. Прості правила роблять такі ігри зрозумілими для дітей різного шкільного віку, а завдяки елементу випадковості кожна гра стає унікальною.

У цьому розділі зібрано ігри для дітей молодшого шкільного віку [2]. Пропоновані активності допоможуть не лише розвивати математичні навички гравців у практичній діяльності, а й створити атмосферу зацікавленості на занятті.

Швидкий множник

Мета: розвивати навички множення.

Матеріали: 2–6 кубиків, ручка й папір для підрахунку балів.

Правила гри

1. Гравці по черзі кидають два кубики.
2. Гравець множить числа, які випали, і записує результат.
3. Перемагає той, хто набрав найбільшу суму балів після 10 ігор.

Ускладнити гру можна такою умовою: потрібно виявити і записати всі варіанти множення для числа, яке випало.

Зауваження. Якщо використовується кілька кубиків (наприклад, від 3 до 6), гравці можуть вибирати пари чисел для множення.

Більше за всіх

Мета: розвивати навички множення.

Матеріали: один кубик, ручка й папір для підрахунку балів.

Правила гри

1. Гравці по черзі кидають кубик.
2. Гравець множить отримане число на будь-який ще не використаний множник від 1 до 6 і записує результат.
3. Кожен множник можна використати лише один раз за гру.
4. Після шести ігор гравці підраховують суму набраних балів.
5. Перемагає той, у кого найбільша сума балів.

Гра	Кількість очок	Множник					
		1	2	3	4	5	6
1							
2							
3							
4							
5							
6							

Ланцюжок множення

Мета: розвивати навички множення.

Матеріали: 2–10 кубиків.

Правила гри

1. Гравці по черзі кидають кубики та множать числа, які випали.
2. Кожен наступний гравець має продовжити обчислення, використовуючи останній результат для множення на число, що випало наступним. Наприклад: $2 \times 3 = 6$, а потім $6 \times 4 = 24$.
3. Якщо хтось із гравців робить помилку, то гра починається заново.

Ускладнити гру можна через встановлення часових обмежень.

Свиня

Мета: розвивати стратегічне мислення; формувати навички оцінювання ризиків і ймовірностей.

Матеріали: 1 кубик, ручка й папір для підрахунку балів.

Правила гри

1. Під час свого ходу гравець кидає кубик стільки разів, скільки захоче.
2. Кожен кидок, результатом якого не є 1, додає очки до поточного результату за хід.
3. Хід завершується, якщо випадає 1, і всі отримані за цей хід очки втрачаються.
4. Гравець може в будь-який момент зупинитися і додати свій поточний результат за хід до загального рахунку.
5. Виграє той, хто першим досягне результату в 100 очок.

ФОКУСИ З ГРАЛЬНИМИ КУБИКАМИ

Гральні кубики — це засіб не лише для ігор, а й для демонстрації цікавих математичних закономірностей. Завдяки особливостям їхньої будови можна створювати ефектні фокуси, які на перший погляд здаються магічними, але насправді базуються на чітких математичних принципах.

Фокуси з кубиками забезпечують розвиток логічного мислення, уваги до деталей, а також умінь і навичок швидкого обчислення.

Під час занять гуртка, майстер-класів, інтелектуальних шоу фокуси можна використовувати як гачок для зацікавлення темою.

Пропоновані нижче сценарії орієнтовані на учнів, вихованців 10–14 років і мають на меті розвивати логічне мислення та навички пошуку закономірностей. Для розкриття математичної сутності кожен фокус супроводжується поясненням.

Відгадування числа

Перебіг фокуса

1. Той, хто показує фокус, відвертається, а хтось із дітей кидає на стіл три кубики.
2. За результатами кидання потрібно:
 - підрахувати суму очок, що випали на верхніх гранях кубиків;

- підняти який-небудь один кубик і додати число очок на його нижній грані до отриманої суми;
 - кинути той самий кубик знову;
 - додати кількість очок його верхньої грані до раніше отриманої суми.
3. Той, хто показує фокус, повертається до інших і звертає їхню увагу на те, що не знає, який із кубиків кидали повторно. Потім бере кубики в руку, трясє їх для таємничості й називає ту суму, яка була отримана учнями.

Секрет фокуса. Перш ніж узяти кубики в руку, потрібно підрахувати загальну суму всіх очок, що випали на верхніх гранях, і додати 7. Отримана сума і буде тією, яка має бути «відгадана».

Математичне обґрунтування фокуса. Шукана сума складається з кількості очок на верхніх гранях усіх кубиків у їхньому останньому положенні та суми очок на якій-небудь парі протилежних граней одного кубика. Сума очок на протилежних гранях грального кубика завжди дорівнює 7.

Рефлексія. Спільне обговорення «секрету» такого фокуса.

Відгадування суми очок на закритих гранях

Перебіг фокуса

1. Учні складають три гральні кубики стовпчиком.
2. Той, хто показує фокус, визначає суму очок на гранях, якими кубики прилягають один до одного, і на найнижчій грані. Кількість точок на верхній грані кубика, що розташований вгорі, відразу допоможе визначити таку суму. Наприклад, коли кубики стоять так, як на рис. 4, шукана сума дорівнює 17.

Секрет фокуса. Потрібно від 21 відняти число точок, які видно на верхній грані стовпчика.

Математичне обґрунтування фокуса. Оскільки сума очок на протилежних гранях грального кубика дорівнює 7, отже, сума очок на протилежних гранях трьох кубиків дорівнюватиме 21. Але до суми, яку треба знайти за умовою фокуса, не належить число на верхній грані. Віднімо його від 21 й отримаємо шукану суму.

Рефлексія. Спільне обговорення такої видозміни фокуса: угадування цієї ж суми, але без використання числа, що випало на верхній грані, лише чисел двох суміжних бокових граней.

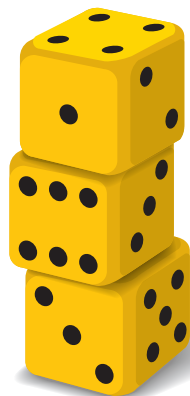


Рис. 4. Стовпчик із трьох кубиків

Відгадування порядку кубиків

Перебіг фокуса

1. Той, хто показує фокус, відвертається, а хтось інший кидає на стіл три кубики.
2. За результатами кидання потрібно:
 - записати трицифрове число в цьому ж порядку із цифр, що випали на верхніх гранях кубиків;
 - дописати до нього число, утворене цифрами з нижніх граней відповідних кубиків;
 - поділити знайдене число на 111 і повідомити результат тому, хто показує фокус.
3. Той, хто показує фокус, дуже швидко визначає перші три цифри такого шестицифрового числа і каже, у якому порядку було розкладено кубики.

Секрет фокуса. Від числа, яке називають учні, потрібно відняти 7, потім отримане число поділити на 9. Результат і є шуканим розміщенням кубиків.

Якщо кубики розміщені так, як зображено на рис. 5, це буде 254. Допишемо три цифри, які відповідають очкам на нижніх гранях відповідних кубиків, і отримаємо результат – 254 523. Потім $254\ 523 : 111 = 2293$. Це число учні повідомляють тому, хто показує фокус.

Отже, $2293 - 7 = 2286$. І справді, $2286 : 9 = 254$.

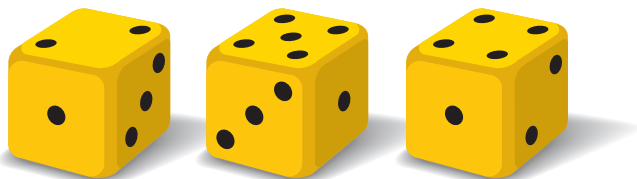


Рис. 5. Верхні грані кубиків утворюють число 254

Математичне обґрунтування фокуса. З огляду на те, що сума очок на верхній і нижній гранях кожного грального кубика завжди дорівнює 7, дописані три цифри послідовно доповнюватимуть до 7 цифри початкового числа. Якщо трицифрове число, записане спочатку, позначити буквою A , то дописане трицифрове число буде $777 - A$, а усе шестицифрове:

$$1000A + (777 - A) = 999A + 777 = 111 \cdot (9A + 7).$$

Отже, воно ділиться на 111, і в результаті отримуємо $9A + 7$. Це число називають учні. Віднявши від нього 7 і поділивши на 9, отримуємо початкове число A .

ЕКСПЕРИМЕНТ «РЯД КУБИКІВ»

Цей експеримент розроблений у Музеї математики Гіссену. Він демонструє властивості випадкових чисел і закони ймовірності за допомогою простих гральних кубиків, а також дає змогу зрозуміти, як випадковість впливає на перебіг процесів.

Для цього експерименту потрібно покласти один за одним 40 гральних кубиків, щоб утворити довгий ряд.

Експеримент складається з двох етапів.

1. Подорож рядом кубиків

1. Почніть із першого кубика. Назвіть число, яке він показує, наприклад 1. Відрахуйте стільки кубиків, розташованих далі, скільки вказано на грані кубика, тобто зупиніться на другому кубіку.
2. Знову назвіть число на кубіку, де зупинилися, порахуйте відповідну кількість кубиків уперед і зупиніться.
3. Продовжуйте рухатися рядом кубиків у такий спосіб, намагаючись досягти кінця ряду.

Однак, найімовірніше, ви зупинитесь не на останньому кубіку. Наприклад, якщо ви опинилися на передостанньому кубіку, який показує число 4, то потрібно ще чотири кубики, але залишилося тільки два. У такому разі приберіть останні чотири кубики, щоб завершити перший етап.

2. Подорож із перезапуском

1. Киньте перший кубик із ряду. Наприклад, він покаже 4.
2. Перейдіть до наступного кубика, у цьому випадку четвертого, і назвіть число на ньому.
3. Продовжуйте рухатися відповідно до цифр на кубиках, поки не дійдете кінця ряду.
4. Зверніть увагу на те, що на відміну від першого на другому етапі ви якимось чином завжди опиняєтеся на останньому кубикі.

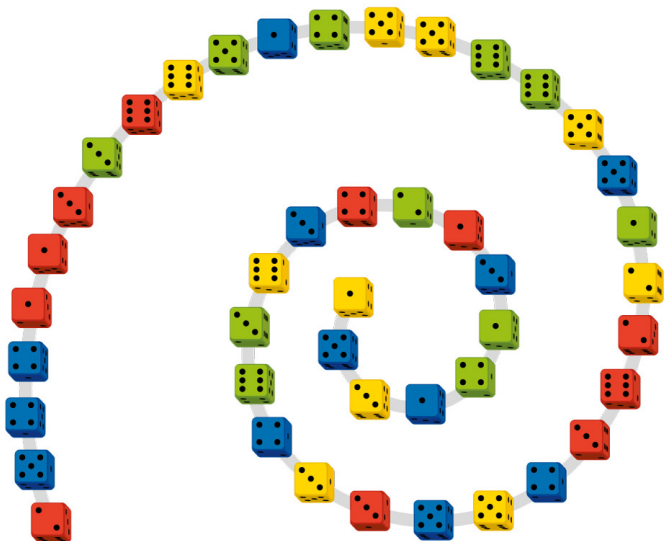




Рис. 6. Ряди кубиків.
Приклад зіграних першого й другого раундів

Математичне обґрунтування. Незвичайність другого етапу пояснюється тим, що є велика ймовірність потрапити на кубики, які випадали на першому етапі. У процесі експерименту другий етап відтворює послідовність переходів із першого. Це відбувається тому, що рано чи пізно випадає кубик, який траплявся раніше. У результаті траєкторія повторюється, і гра завершується в тому самому місці, що й на першому етапі.

Експеримент є прикладом випадкових процесів і демонструє, як попередні дії можуть впливати на подальші події, навіть коли початкові умови змінені. Таке спостереження відкриває нові можливості для вивчення закономірностей у випадковості й показує, як математична ймовірність проглядається в реальних ситуаціях.

ЗАДАЧІ ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Цей розділ містить задачі з елементами ймовірності, логіки й комбінаторики, які спонукають учнів до більш детальних міркувань, обговорень і розроблення власних стратегій. Усі завдання побудовані з використанням простих і знайомих ситуацій, що робить їх зрозумілими, але водночас заохочує до осмислення важливих математичних понять. Мета завдань – сприяти розвитку інтуїції в контексті теорії ймовірностей у дітей середнього і старшого шкільного віку. Утім, деякі задачі можна адаптувати для сприйняття й дітьми молодшого шкільного віку, використовуючи малюнки, запитання-підказки та моделювання ситуацій.

Найпершим поняттям у теорії ймовірностей є *експеримент* як дія чи сукупність дій, результати яких ми зафіксуємо. Наприклад, експериментом є підкидання кубика, а результатом – очки, що на ньому випали. Результати експерименту називаються *елементарними подіями*. Перелічивши всі можливі результати експерименту, одержуємо *простір елементарних подій*, що позначають грецькою літерою Ω (омега). В експерименті з підкиданням кубика і фіксуванням очок простором елементарних подій буде:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

У задачах використовується поняття *події* як певної сукупності елементарних подій експерименту. Наприклад, «після під-

кидання кубика випало парне число» — це подія, що складається з елементарних подій — «випало 2», «випало 4», «випало 6»:

$$A = \{2, 4, 6\}.$$

Тепер, маючи простір елементарних подій, введемо поняття *класична ймовірність події*.

Класичною ймовірністю події A називають число $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$, де $|A|$ — кількість елементарних подій у події A , а $|\Omega|$ — кількість елементарних подій у просторі Ω .

Наприклад, розглянемо підкидання двох монет. Простір елементарних подій складається з упорядкованих пар значень, які випали:

$$\Omega = \{(\text{герб, герб}), (\text{герб, число}), (\text{число, герб}), (\text{число, число})\}.$$

Нехай подія A полягає в тому, що випав хоча б один герб. Тоді

$$A = \{(\text{герб, герб}), (\text{герб, число}), (\text{число, герб})\}.$$

Класична ймовірність того, що випав хоча б один герб, дорівнює:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{4}.$$

Проекспериментуємо з підкиданням двох монет. Що більше разів повторюємо експеримент, то більшу кількість разів настання події A буде наближатися до $\frac{3}{4}$.

Також для розрахунків корисним є *правило суми*: якщо у нас є дві несумісні події (тобто такі, які не можуть відбутися одночасно, наприклад випадіння парного числа на кубику і випадіння одиниці), назвемо їх A і B , то ймовірність того, що настане A чи B , дорівнює $P(A) + P(B)$.

Приклади розв'язування задач ⁴

Задача 1

Експеримент полягає у киданні пари кубиків і спостереженні за числами, що випадають на верхніх гранях.

1. Опишіть відповідний простір елементарних подій Ω .
2. Запишіть події $A_2, A_3, A_4, \dots, A_{12}$, які означають, що сума очок, яка випала, дорівнює 2, 3, 4, ..., 12 відповідно.

Розв'язання

1. Ми можемо представити кожен результат експерименту впорядкованою парою чисел: перше – число, яке випадає на першому кубіку, а друге – число, яке випадає на другому кубіку. Щоб відрізнити два кубики, уявімо, що перший кубик червоний, а другий – зелений. Оскільки існує шість можливих результатів для кожного кубика, правило добутку передбачає наявність 6×6 , або 36 елементів у просторі подій:

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), \\ (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), \\ (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), \\ (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), \\ (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), \\ (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}.$$

2. Маючи простір подій, побудований у пункті 1, збираємо в одну множину пари, що дають однакові суми.

Сума очок	Подія
2	$A_2 = \{(1, 1)\}$
3	$A_3 = \{(1, 2), (2, 1)\}$
4	$A_4 = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$
5	$A_5 = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$

⁴ Див.: Tan S. T. Applied Mathematics for the Managerial, Life, and Social Sciences. 7th Edition. Cengage Learning, 2015. 1024 p.

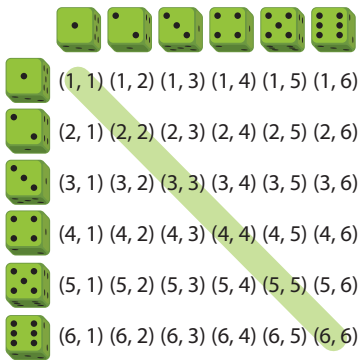


Рис. 7. Подія, коли на двох кубиках випало однакове число

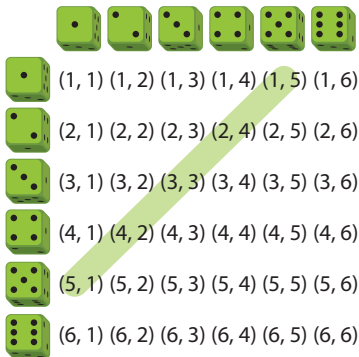


Рис. 8. Подія, коли сума очок на двох кубиках дорівнює 6

2. Подія, коли сума очок на двох кубиках дорівнює 6 (рис. 8), визначається як:

$$A_6 = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}.$$

Отже, за правилом суми, ймовірність того, що сума очок, яка випала на двох кубиках, дорівнюватиме 6, обчислюється як:

$$\begin{aligned} P(A_6) &= P((1, 5)) + P((2, 4)) + P((3, 3)) + P((4, 2)) + P((5, 1)) = \\ &= \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{5}{36}. \end{aligned}$$

Задача 3

Знайдіть помилку в міркуваннях.

Кидають червоний і зелений гральні кубики. Ймовірність того, що на червоному кубіку випаде 6, дорівнює $\frac{1}{6}$, імовірність того, що на зеленому кубіку випаде 1, дорівнює $\frac{1}{6}$. Отже, ймовірність того, що червоний кубик покаже 6 або зелений кубик покаже 1, дорівнює $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

Розв'язання

Правило суми можна застосовувати для подій, які не мають перетинів. У міркуваннях вище випадок «6 на червоному і 1 на зеленому» порахований двічі: і коли рахували подію «6 на червоному», і коли рахували «1 на зеленому». Для таких випадків застосовують формулу включень-виключень:

$$P(\text{«}A \text{ або } B\text{»}) = P(A) + P(B) - P(\text{«}A \text{ і } B\text{»}).$$

Задачі для розв'язання**Задача 1**

Кидають два гральні кубики і фіксують очки, що випали. Знайдіть імовірність того, що:

- 1) сума чисел — парне число;
- 2) сума чисел дорівнює 7 чи 11;
- 3) випало дві одиниці;
- 4) випало два однакові числа;
- 5) на одному кубіку випало 6, а на іншому — менше ніж 3;
- 6) сума чисел не менша за 4;
- 7) сума чисел більша за 2.

Задача 2

Знайдіть помилку в міркуваннях.

Кидають два гральні кубики і фіксують суму очок, що випали. Існує лише один спосіб отримати 2, а саме: кожен кубик показує 1; і є лише один спосіб отримати 7, а саме: один кубик показує 3, а інший – 4. Отже, імовірність отримання суми 2 така сама, як і ймовірність отримання 7.

Задача 3

Після кидання великої кількості кубиків (100–200) потрібно:

- 1) поррахувати, скільки випало кубиків із кожним числом;
- 2) з'ясувати, яка була очікувана кількість;
- 3) виявити, чи зійшлися теоретичні розрахунки та фактичні кількості.

Задача 4

В одній із настільних ігор, щоб ввести фігуру в гру, потрібно викинути шістку. У першому раунді кожен гравець має право кинути кубик тричі. Обчисліть імовірність того, що в разі трьох кидань кубика випаде хоча б одна шістка.

Задача 5

У грі «Колонізатори» (англ. «Settlers of Catan») використовують два кубики. Якщо випадає сума очок 7, то у гру вступає фігура розбійника.

Доведіть, що за умови кидання двох кубиків 7 випадає частіше, ніж будь-яка інша сума очок.

Задача 6

У далекому 1674 р. гра «Passe-dix» була описана англійським письменником Чарльзом Коттоном в одній із перших англомовних книг про ігри «The Compleat Gamester». У грі кидають три кубики та визначають суму очок.

На стовпчастій діаграмі (рис. 9) зображена ймовірність для кожної можливої суми очок після кидання трьох кубиків.

За діаграмою визначте, із якою ймовірністю випадає сума очок, більша ніж 10.

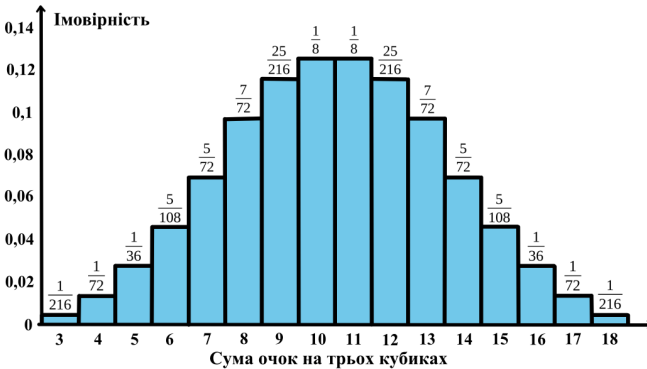


Рис. 9. Розподіл ймовірностей випадіння кожної із сум від 3 до 18

Задача 7

У китайській грі «Прагнення до восьми» використовуються 8 кубиків. Кожен гравець робить ставку на одну з 6 можливих граней кубика. Учасник виграє, якщо хоча б 3 з 8 кубиків показують вибране число.

Мартін робить ставку на число 6. Обчисліть ймовірність того, що він виграє.

Заключне слово

Гральні кубики – це простий і доступний засіб, який за умови педагогічно виваженого підходу може стати ефективним у формуванні математичного мислення, дослідницької активності й пізнавального інтересу.

У математичних гуртках закладів загальної середньої та позашкільної освіти застосування кубиків сприяє організації заняття, під час якого педагог поєднує елементи гри й експерименту, використовує завдання, розв'язання яких можливе за допомогою фокусів.

Матеріали, запропоновані у цьому виданні, можуть бути адаптовані відповідно до вікових особливостей і рівня підготовки учнів, вихованців.

Для дітей 6–9 років рекомендовано застосовувати більш прості ігри з кубиками, пов'язані з додаванням і множенням, порівнянням результатів. Такі форми сприяють розвитку інтуїції й уваги, зацікавлюють у більш глибокому вивченні математики.

Вихованцям 10–14 років доцільно ускладнювати завдання: від фокусів із логічним поясненням, комбінаторних задач до завдань, пов'язаних із теорією ймовірностей, що формують розуміння закономірностей і моделей.

Для вихованців 15–17 років рекомендовано використувати матеріал для більш детального вивчення основ теорії ймовірностей, проведення експериментів, а також завдання щодо математичного моделювання ситуацій із використанням кубиків.

Запропонований підхід дає змогу організувати освітній процес у гуртку з урахуванням інтересів і можливостей кожного вихованця, щоб формувати не лише обчислювальні навички, а й здатність аналізувати, робити висновки, будувати моделі, обґрунтовувати припущення.

У такий спосіб гральні кубики стають не лише елементом ігрових ситуацій, а й засобом більш доступного та глибокого опанування різноманітними математичними процесами, закономірностями й властивостями.

Пропоновані у виданні матеріали можуть бути використані як для проведення окремих занять, так і для розроблення тематичних курсів, майстер-класів, навчальних програм у системі позашкільної освіти.

Список використаних джерел

1. Стрельник М. О., Хомчик М. А., Сорокіна С. А. Гральні кості (II тис. до н. е. – XIV ст. н. е.) з колекції Національного музею історії України. *Археологія*. 2009. № 2. С. 34–49.

2. Avagyan S. How to Play Dice: Rules and Strategies for Beginners. *Particula*. 2024. Jul 17. URL: <https://particula-tech.com/blogs/news/how-to-play-dice?srsId=AfmBOopNVT-2Egad3XLK6tOOi8XPYQYacfO579HH9t9dnn5-mzSVJUJE#common-terminology> (дата звернення: 27.07.2025).

3. Carlisle R. P. *Encyclopedia of Play in Today's Society*. SAGE Publications, 2009. 1032 p.

4. Tan S. T. *Applied Mathematics for the Managerial, Life, and Social Sciences*. 7th Edition. Cengage Learning, 2015. 1024 p.

Для нотаток

Навчальне видання

ГРАЛЬНІ КУБИКИ І МАТЕМАТИКА

Методичні рекомендації

Укладачі:

Терлецька Катерина Валеріївна

Антошина Катерина Олегівна

Редагування: *Н. І. Гетьман, З. В. Пономаренко*

Верстання *О. А. Жупанська*

Дизайн обкладинки *О. А. Чекановська*

Формат 60×108/16. Папір офс. 80 г/м².

Друк цифровий. Ум. друк. арк. 2,09.

Наклад 300 пр.

Видавництво: Національний центр
«Мала академія наук України»,
Кловський узвіз, буд. 8, м. Київ, 01021

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 6999 від 04.12.2019

