# Навчання на основі головоломок

Навчально-методичний посібник

Київ
Національний центр
«Мала академія наук України»
2024

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ЦЕНТР «МАЛА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ»

# НАВЧАННЯ НА ОСНОВІ ГОЛОВОЛОМОК

Навчально-методичний
посібник

За редакцією
академіка НАН України
С. О. Довгого

Київ
Національний центр
«Мала академія наук України»
2024

УДК 37.01
Н15

Укладачі:

*К. В. Терлецька* – завідувачка лабораторії математичних наук НЦ «МАНУ», старша наукова співробітниця Інституту проблем математичних машин і систем НАН України, докторка фізико-математичних наук;

*К. О. Антошина* – методистка лабораторії математичних наук НЦ «МАНУ»

Рецензенти:

*І. А. Єгорченко* – старша наукова співробітниця відділу математичної фізики Інституту математики НАН України, кандидатка фізико-математичних наук;

*О. А. Шамович* – учитель математики Русанівського ліцею м. Києва, спеціаліст вищої кваліфікаційної категорії, вчитель-методист, заслужений учитель України

*Рекомендовано науково-методичною радою Національного центру «Мала академія наук України» (протокол № 3 від 26 жовтня 2022 р.)*

**Навчання** на основі головоломок : навч.-метод. посіб. / уклад.:
Н15 К. В. Терлецька, К. О. Антошина ; за ред. С. О. Довгого. – Київ : Національний центр «Мала академія наук України», 2024. – 364 с.
ISBN 978-617-7945-50-4

Видання призначене для використання в освітньому процесі у закладах позашкільної та загальної середньої освіти.

У посібнику подано матеріали, що відповідають навчальній програмі з позашкільної освіти дослідницько-експериментального напряму «Нестандартні завдання і головоломки» та презентують теоретичні й практичні підходи до організації роботи з дітьми та учнівською молоддю в гуртках і на уроках математики. У матеріалах посібника акцентовано на використанні головоломок як засобу активізації розвитку математичного й критичного мислення учнів під час освітньої діяльності.

**УДК 37.01**

ISBN 978-617-7945-50-4

# Зміст

# Передмова

Національний центр «Мала академія наук України» є Центром ЮНЕСКО з наукової освіти. Одним із пріоритетів у нашій роботі є підтримка дитячої наукової творчості, створення умов для розвитку молодих талантів, здатних приймати креативні інноваційні рішення.

Останнім часом не лише в Україні, а й у багатьох розвинених країнах світу спостерігається загальна тенденція падіння зацікавленості природничими науками. Ці предмети доволі складні, потребують від учнів системності й наполегливості, а найголовніше – старі методи викладання вже не сприймаються сучасною молоддю. У повсякденному житті проблеми не розв'язуються ані за допомогою формул, ані за допомогою готових інструкцій із підручників. Тому вміння будувати виграшні стратегії, робити розрахунки й припущення в непередбачуваних ситуаціях є одними з ключових викликів нинішніх реалій.

Навчання на основі головоломок – це давня, як людство, методика, що сприяє розвитку навичок розв'язання нестандартних проблем, вчить формулювати гіпотези, перевіряти їх і ставити запитання. Розв'язання кожної задачі схоже на невелике наукове дослідження – воно дає учням змогу доторкнутися до розуміння того, як працює науковий метод.

А ще математичні головоломки сприяють розвитку просторового бачення, побудові логічних ланцюжків, переходу від предметних до абстрактних образів і структур, кмітливості, винахідливості, покращенню пам'яті і формуванню критичного мислення.

Головоломки, як-от судоку, кен-кен, ребуси, друдли, представлені в посібнику, не потребують спеціальних математичних знань. Вони вимагають креативності і стануть інтригуючим входом у дивовижний світ математики. Захопившись нескладними ігровими задачами-головоломками, учні дістають мотивацію до певних ускладнень і пошуку нових оригінальних рішень.

Цей посібник також буде цікавий будь-якому читачеві, який володіє базовими знаннями з математики. Він відкриє для себе багато захопливих фактів та підходів до розв'язання різноманітних проблем і задач.

Вчителі математики знайдуть тут яскраві доповнення до своїх уроків – ідеї для групової роботи, математичні шуканки, рухливі ігри та ідеї для шкільних конкурсів командних головоломок, до яких охоче приєднаються і дорослі. Деякі задачі й методи їх розв'язання можуть стати основою для дослідницьких робіт, які можна писати в межах конкурсу-захисту МАН.

Розв'язання математичних головоломок – це навчання і розвага водночас: воно принесе як користь, так і насолоду. Маю надію, що завдяки цьому посібнику багато хто переконається в тому, що математика – захоплива і цікава наука, і він стане у пригоді кожному, хто йде шляхом нових знань і відкриттів.

**Станіслав Довгий**,
президент Малої академії наук України,
академік НАН України, академік НАПН України,
доктор фізико-математичних наук,
професор

Автори видання висловлюють щиру вдячність Сергію Веденському за надані ілюстративні матеріали, деякі головоломки й приклади розв’язання завдань, Олександру Бєдову, Олені Бігдан, Кирилу Веденському за надані матеріали щодо проведення конкурсів командних головоломок, Тарасу Тимошкевичу за ідеї для задач і головоломок та Інні Дзиндрі за редагування деяких розділів. За корисні поради подяка висловлюється Олексію Карлюченку, Олександру Петрову, Ларисі Тимошкевич та Сергію Козеренку, а за наукову експертизу – науково-методичній раді Національного центру «Мала академія наук України».

# Вступ

Головна ідея Нової української школи полягає у поєднанні здобуття академічних знань із формуванням в учнів м'яких навичок, базових компетентностей. Тому важливим є опанування навичок, які були б орієнтовані на розв'язання різноманітних нестандартних життєвих проблем, а не формальне заучування фактів. Це мотивовано тим, що в повсякденному житті учні раптово виявляють: проблеми у реальному світі не розв'язуються ані за допомогою формул, ані за допомогою готових інструкцій з підручників.

За результатами започаткованого Організацією економічного співробітництва та розвитку (OECD) міжнародного дослідження якості освіти PISA (Programme for International Student Assessment), в Україні найбільш проблемною з-поміж трьох галузей – математики, читання, природничо-наукових дисциплін – виявилася саме математика. Базового рівня з математичної грамотності (тобто вміння учня застосовувати знання і навички з математики в повсякденній діяльності) досягли лише 64% підлітків (2018 рік). Інакше кажучи, учні часто мають труднощі із самостійним мисленням та прийняттям обґрунтованих рішень, незалежно від характеру проблем.

У межах навчальних програм з математики учнів навчають застосовувати певні формули та алгоритми для розв'язання задач. Майже всі їхні зусилля спрямовуються на знаходження відповіді, у той час як для мотивації вкрай потрібне розуміння зв'язків між математикою та реальним світом.

Ці зв'язки можуть бути зрозумілими завдяки програмам наукової освіти, що передбачають не тільки ознайомлення учнів з науковими фактами, а також і опанування ними наукового методу, тобто вміння з фактів-цеглинок за певними правилами створювати конструкції. Для цього потрібно аналізувати дані, ставити запитання, висувати гіпотези, робити передбачення, проводити експерименти, створювати моделі, критично аналізувати результати, спростовувати чи підтверджувати гіпотези, формулювати нові припущення або узагальнення.

Саме тому задачі так званої цікавої математики та їхня частина – головоломки є ефективним інструментом, за допомогою якого можна розвинути навички, потрібні на кожному етапі застосування наукового методу. Окрім того, уміння розв'язувати задачі не за шаблонними формулами та не «за інерцією» є дуже актуальним нині, і великі корпорації, такі як «Microsoft» (і багато інших), для пошуку творчих людей на співбесідах використовують розв'язування головоломок та нестандартних задач [1].

Посібник укладено з метою сприяння розвитку в учнів навичок евристичного мислення, опанування наукового методу, математичної грамотності для розв'язання нестандартних проблем, у тому числі й у реальному житті. Посібник відповідає навчальній програмі «Навчання на основі головоломок».

Видання пропонується для викладання навчальної програми учням 7–9 класів. Під час навчання передбачені різні форми роботи: індивідуальна, колективна, проведення конкурсів командних головоломок, математичних шуканок і рухливих ігор.

Навчальне видання містить понад двісті задач, ігор та головоломок як для роботи на уроці, так і для домашніх занять. Зірочкою позначені задачі, які можна розглядати в класах із поглибленим вивченням математики. Уточнення та ілюстрації до певних розділів винесені у додаткові матеріали (розділ 8). До кожного розділу та підрозділу додаються покликання на корисні відео, тестові питання для самоконтролю та завдання, відповіді на які розміщені в останньому розділі цього посібника. У книжці ви знайдете список посилань на науково-популярні YouTube-канали.

# 1.

# Загальні відомості про головоломки

# 1.1. Історія головоломок

Для того, щоб успішно впроваджувати головоломки в навчальний процес, корисним стане знання історії створення та розвитку головоломок, життя і здобутків їхніх авторів. Історія розвитку головоломок свідчить про наявність труднощів, яких учні можуть зазнати під час їх розв'язання, та надає набутим знанням особистісно значущого характеру.

Із чого почалася історія головоломок? Певне, вона бере початок відтоді, як люди почали мислити, спілкуватися і задумуватися над задачами, які перед ними ставили природа й розвиток цивілізації. Відколи винайшли мотузку, з'явилися вузли, а з ними й цікаві задачі. Підтвердженням тому є легенда про гордіїв вузол.

А беззаперечним свідченням того, що чотири тисячі років тому люди вже вчили математику і розв'язували логічні загадки, є давньоєгипетський підручник математики Ахмеса, який містить 84 задачі та багато прикладів арифметичних операцій. Історична задача з підручника Ахмеса:

---

**Задача:**
Пастух пригнав биків. У нього питають, скільки він пригнав голів від його численного стада. Пастух відповів, що пригнав 70 биків, що становлять 2/3 від третини його стада.

**Питання:**
Скільки биків у стаді пастуха?

---

Кінець VIII століття вважається епохою розквіту середньовічних головоломок. У цей час з'явилася і перша книга головоломок у Європі – збірник ірландського просвітителя Алкуїна «Задачі для розвитку молодого розуму». Ось деякі з його загадок:

1. Що не можна побачити, не заплющивши очі? – Сон.
2. Що робить гірке солодким? – Голод.
3. Що одночасно існує та не існує? – Ніщо.

Ще в збірнику Алкуїна вперше зустрічається задача про вовка, козу і капусту. Ця відома головоломка виникла не пізніше IX століття та з’являється в різних фольклорних творах під різними назвами. Варіації цієї задачі можна знайти як у європейських країнах, так і в африканському фольклорі, наприклад у таких країнах, як Камерун, Ефіопія, Уганда, Замбія тощо. Ця задачка також дуже подобалася Льюїсу Керролу.

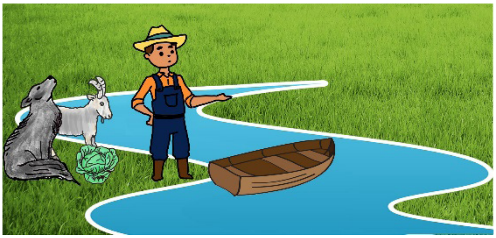


Рис. 1. Селянин має перевезти вовка, козу і капусту на інший берег

**Задача:**
З одного берега річки на інший селянин має перевезти човном вовка, козу і капусту. Але за умови, що в човні може бути човняр і один пасажир. Та є ще одне обмеження – на березі одночасно не можна залишати вовка і козу, козу і капусту. Можна робити скільки завгодно рейсів.

**Питання:**
Як переправити всіх без ушкоджень?

Алгоритм знаходиться доволі просто, якщо збагнути, що вовк не їсть капусту. А саме:

1) перевезти козу туди;
2) повернутися назад;
3) перевезти капусту туди;
4) перевезти козу назад;
5) перевезти вовка туди;
6) повернутися назад;
7) перевезти козу туди.

Цей алгоритм можна «зіграти» на заняттях з математики, і «класична» умова цієї задачі може слугувати основою для створення інших, уже не таких тривіальних, її варіантів. Багато словесних головоломок, поширених у середньовічні часи, можна знайти в книзі Генрі Дьюдені «Кентерберійські головоломки» (1907).

Перші писемні системи давньоєгипетської культури (IV–III тисячоліття до н. е.) сформувалися якраз через використання зображень як засобу передачі інформації. Саме малюнкова писемність і стала прототипом **ребусів**: слова, які складно зобразити примітивною картинкою, представлялися як послідовність простих предметів, назви яких у сукупності мають схоже звучання. Пізніше ребуси з'явилися на римських і грецьких монетах, в них було зашифровано назви міст, а також на гербах і будинках – для позначення роду.

У кінці XV століття з'являються перші рукописні збірники ребусів. Перший друкований збірник «Les Bigarurresdu Seigneurdes Accords» з'явився 1582 року і мав велику популярність.

Прототипами **пазлів** можна вважати мозаїку та вітражі, які виникли ще в античності. У 1766 році картограф Джон Спілсбері винайшов цікавий спосіб навчати дітей географії – він розмістив паперову мапу світу на дерев'яній дошці й розрізав її за контурами країн на шматки. Так з'явилися перші пазли, і вони стали найулюбленішою грою того часу.

Збираючи карту з фрагментів, діти легко запам'ятовували назви країн, міст, а також їхнє взаємне розташування. Спілсбері побачив у своєму унікальному винаході хороші перспективи й можливість непогано заробити, тому створив пазли ще на вісім тем: карти Європи, Азії, Африки, Америки, Великої Британії, Уельсу, Ірландії та Шотландії. Після смерті Джона за пазли взялася його дружина. Згодом вона вийшла заміж за учня Джона Спілсбері Гаррі Ешбі, який і продовжив справу свого вчителя. Невдовзі такі пазли почали використовувати для вивчення й інших предметів, і складання полягало в укладанні частинок на поверхню, а не в зчепленні їх між собою.

У XIX столітті, завдяки винайденню американцями технології штампування по картону, пазли почали швидко поширюватися, і ціна на них значно зменшилась. Купити пазли стало можливо у будь-якій країні світу, а технологія різання картону дала змогу робити частинки такої форми, щоб вони зачіплялись одна за одну й не розпадалися, як це відбувається, наприклад, із мозаїкою.

Пазли для дорослих з'явилися близько 1900 року, і на них були зображені картини відомих художників. До 1908 року пазли набули великої популярності в Америці та Європі. Хтось скептично ставився до головоломки, вважаючи її дитячою забавкою, а хтось починав збирати колекції та присвячував увесь свій вільний час підбиранню однієї частинки до іншої. Люди почали змагатися одне з одним, проводили турніри зі складання пазлів.

У наші дні існує неймовірна кількість різних пазлів: і тривимірні, і голографічні, і віртуальні, і фотопазли. Також, як не дивно, популярними залишаються і дерев'яні пазли, завданням яких, як часто буває, є не складання суцільної поверхні зі шматочків, а упакування шматочків різної форми в певну обмежену фігуру.

У 2007 році американка Енн Вільямс була удостоєна премії імені Спілсбері за написані нею дві книги з історії пазлів та статті про вплив головоломок на масову культуру.

У 1813 році у китайській книзі з'являється перша друкована згадка про **танграм**. Ця гра набула поширення завдяки американському популяризатору головоломок Сему Лойду, що видав 1903 року «Восьму книгу Тан», у якій ідеться про древнє божественне походження танграма, а також міститься 700 задач, зокрема й нерозв'язні.

1878 року американський поштмейстер Ной Чепмен вигадує гру в 15. Прототипом її була придумана ним же головоломка, яка полягала в тому, що потрібно викласти 16 пронумерованих квадратиків у ряди по чотири штуки так, щоб сума чисел у кожному ряду дорівнювала 34. У 1880 році було оголошено про велику грошову винагороду тому, хто розв'яже задачу збирання гри в 15 із «майже складеної» позиції (усі фішки на своїх місцях, окрім 14 та 15). Запропонуйте вашим учням також спробувати розв'язати цю задачу. Якщо вони ще не знайомі з нею, то попросіть їх не шукати відповіді в інтернеті, а намагатися розв'язати самостійно.

Наприкінці XIX століття з'явилося безліч інших механічних головоломок, серед яких, наприклад, «Ханойська вежа». У перші два десятиліття XX століття логічні, словесні та цифрові головоломки були неймовірно популярні.

Історія **кросвордів** налічує майже дві тисячі років. Знайдені археологами речі дають змогу стверджувати, що вже в I столітті нашої ери в Європі були ігри, що нагадують сучасний кросворд. Деякі подібні головоломки з'являються в газеті «The Stockton Bee» наприкінці XVIII століття. Фразу «cross-word puzzle» було вперше вжито у 1862 році в одному з американських журналів. Перший кросворд, що дійшов до нас, опублікований у 1875 році в нью-йоркському журналі «Святий Ніколас». Інша схожа головоломка з'явилася в італійському журналі у 1890 році.

Найбільше розвинулися кросворди в період розквіту науки – XIX–XX століття. Проте першим сучасним кросвордом вважається надрукований у грудні 1913 року в газеті «New York World» «Word-cross» американського журналіста Артура Вінна. Він мав форму ромба і не містив чорних клітин. Але задовго до того, як це сталося, в окремих розділах провідних газет були опубліковані головоломки, більше того, їх можна було знайти навіть у таких журналах, як «Woman's Home Companion». Ведучі цих розділів (найвідоміші серед них – американець Сем Лойд і британець Генрі Ернест Дьюдені, про яких йтиметься в наступних розділах) були загальновизнаними знаменитостями.

Головоломка почала різко набирати популярності у 1924 році, друкувалася в багатьох американських журналах, а в квітні було видано перший збірник кросвордів (що продавався разом із олівцем), який спричинив бум на ринку американських головоломок. Артур Вінн створив перший британський кросворд у грудні 1924-го.

Того самого року вийшла друком перша частина книги Якова Перельмана «Цікава фізика», яка мала приголомшливий успіх серед читачів і містила велику кількість цікавих прикладів і парадоксів. Варто ознайомитися із творчістю Перельмана, особливо із його циклом книг, присвячених цікавій математиці[1].

Перші **головоломки із сірниками** з'явилися задовго до появи самих сірників – у Китаї близько трьох тисяч років тому. Замість них використовувалися бамбукові палички. Наприкінці XIX століття вийшла книга датського астрофізика (засновника науково-дослідного інституту з дослідження північного сяйва в Каутокейну), фотографа-аматора і педагога Софуса Тромгольта «Ігри із сірниками. Завдання і розваги». У цій книзі представлені майже всі види завдань, ігор, фокусів і розваг із сірниками.

У 1926 і 1939 роках вийшли друком дві книги Я. І. Перельмана, що містили деякі завдання із сірниками, пов'язані з геометричними

[1] Перельман Я. І. Жива математика. Київ : Вид-во КМ-Букс, 2016. 176 с.

фігурами. Також було видано книги Є. І. Ігнатьєва «У царстві кмітливості» (1908), Я. І. Перельмана «Веселі завдання. 101 головоломка для юних математиків» (1916), Б. А. Кордемського «Математична кмітливість» (1950) та інші, у кожній з яких був окремий розділ, що містив завдання із сірниками.

1974 року Ерньо Рубік створює механічну головоломку, яка надалі отримала назву **кубик Рубіка**. У середині 1970-х років молодий угорський скульптор Ерньо Рубік викладав архітектуру й дизайн в Академії прикладного мистецтва в Будапешті. Захоплювався геометрією й тривимірним моделюванням, вважаючи його чудовим засобом розвитку просторової уяви. Одного разу Рубік зробив 27 різнокольорових кубів, зібрав їх у великий куб і поставив таке запитання: як обертати окремо взятий кубик, щоб при цьому не порушувалась конструкція й цілісність механізму?

Надалі довелося відкинути «зайві» елементи. Зі свого першого винаходу Рубік залишив 54 кольорові грані, а центральний кубик замінив на механізм, міцно прикріплений до всіх зовнішніх кубиків, при цьому даючи їм можливість обертатися навколо одне одного. У 1975 році Рубік отримав угорський патент, однак перший промисловий випуск головоломки відбувся лише наприкінці 1977-го – як різдвяної іграшки під назвою «Магічний кубик». Тиражі були обмежені, до всесвітньої популярності було далеко. Але одного разу німецький підприємець Тібор Лакзі випадково побачив кубик в руках офіціанта кафе. Лакзі захоплювався математикою, і його дуже вразила ця головоломка, тому вони разом із винахідником Томом Кремером почали популяризувати кубик Рубіка. Справжній бум стався 1980 року, коли компанія «Ideal Toy Corporation» купила ліцензію на виробництво, випустила перший мільйон кубиків і продавала їх по всьому світові. Силу головоломки першими відчули вчителі: цілі класи не виходили на перерви, бо крутили кубик Рубіка. Школярі збирали його під час уроків під партами. Вчителі, відібравши його під час уроків, самі скрипіли кубиком на заняттях, відгородившись від учнів класним журналом. А потім допізна засиджувалися в учительській, намагаючись зібрати головоломку. Тоді ж кубик Рубіка одержує звання найкращого винаходу і виграє конкурси іграшок у США, Німеччині, Великій Британії та Франції.

У 1982 році в Будапешті відбувся чемпіонат світу зі збирання кубика Рубіка. У ньому взяли участь представники 19 країн – переможці національних чемпіонатів. Для вирішення пропонувалися три завдання. Зараховувався найкращий час із трьох спроб. Кожен учасник змагання отримував новий кубик фірми «Політойс». Усі кубики були однаково складно заплутані 25–30 обертаннями за допомогою комп'ютера. Комп'ютер програмувався як генератор випадкових чисел і невідомим заздалегідь чином визначав, яка грань кубика повертається, напрямок і кут повороту. До початку відліку часу кожному учаснику змагання надавалося 15 секунд для вивчення початкового розташування кольорів на кубику і вибору способу рішення. Учасникам змагання потрібно було зібрати кубик не більше ніж за 60 секунд. Найкращий час складання – 22,95 секунди – показав 16-річний студент із Лос-Анджелеса Мінх Тхай, а один із претендентів на перемогу в поспіху зламав поспіль два кубики, за що його було дискваліфіковано. Водночас ширилися легенди про невідомих вундеркіндів, які збирали кубик мало не за 10 секунд. За іронією долі проведення першого світового чемпіонату припало на час, коли головоломка була на піку популярності. По всьому світу відкриваються фабрики з виробництва кубиків Рубіка, іграшка захопила всіх і всюди, як свого часу захопила гра в 15.

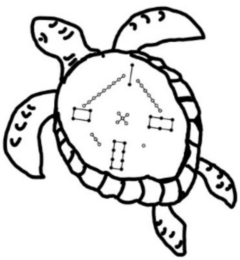
Проте до 1983 року інтерес до кубика Рубіка різко зменшився. Не було замовлень на виробництво, іграшку було фактично неможливо знайти в магазинах. 1985 року англійська фірма «Seven Towns» перекупила права на кубик і протягом шести років поступово відновлювала популярність головоломки. Переможним моментом став 1996 рік, коли в США було продано 300 тисяч кубиків, а в Європі – близько 100 тисяч. З появою відеогри, у якій можна було складати головоломку, інтерес до живого тривимірного кубика зріс у рази!

2013 року відбулося кардинальне оновлення кубика. Кольорові наліпки були замінені на пластикові вставки, а механізм перероблений на кулеподібне ядро зі спеціального пластику, що забезпечило плавність поворотів.

У 1979 році з'являються перші надруковані **судоку**. Сучасне судоку, швидше за все, було анонімно сконструйоване 74-річним американським архітектором Говардом Гарнсом з Консервілля, штат Індіана, і вперше опубліковане у 1979 році в журналах видавництва «Dell Magazines» під назвою «Number Place». Ім'я Гарнса завжди було у списках учасників випусків, що містили таке судоку, та відсутнє у випусках, у яких судоку не було. Прообразами судоку є так звані магічні квадрати, про які було відомо ще у стародавньому Китаї.

Ще у XVIII столітті Леонард Ойлер встановив, що в матриці розміром $9 \times 9$ кожен ряд і кожну колонку можна заповнити цифрами від 1 до 9 в певному порядку і без повторення. Але справжньої популярності головоломка набула у 1983 році, коли її почали друкувати в японському журналі «Nikoli»[2]. Назва головоломки походить від японської фрази «suji wa dokushin ni kagiru», що означає «цифра входить лиш раз». Згодом фразу було скорочено до абревіатури «судоку». Судоку публікується у найрізноманітніших періодичних виданнях, а збірники з різними варіаціями й рівнями складності розкуповують великими тиражами.

Про перший магічний квадрат дізнаємося з легенди стародавнього Китаю. Більш ніж чотири тисячі років тому китайський імператор та мудрець Ю розгледів на панцирі черепахи, що випливла на берег річки Хуанхе, числа від 1 до 9, причому ці числа були розташовані таким чином, що у всіх напрямках, хоч у вертикальному, хоч по горизонталі або діагоналі, їхня сума дорівнювала 15 *(рис. 2)*.



| | | |
|---|---|---|
| 4 | 9 | 2 |
| 3 | 5 | 7 |
| 8 | 1 | 6 |

Рис. 2.
За легендою, перший магічний квадрат було помічено на панцирі черепахи

Цій табличці із зазначеними властивостями дали назву *«магічний квадрат»*. Оскільки згодом з'ясувалося, що для будь-якого $n > 0$ можна побудувати таблицю $n \times n$, заповнену натуральними числами так, що їхня сума в кожному рядку, кожному стовпці та на кожній з діагоналей була однаковою, і таких таблиць існує безліч, то визначення *магічного квадрата* формулюється в узагальненому сенсі. Часто відтворюється магічний квадрат, розміщений на знаменитій гравюрі Альбрехта Дюрера «Меланхолія». Квадрат складений із послідовних натуральних чисел від 1 до 16 так, що сума чисел по вертикалі, горизонталі, а також на обох діагоналях дорівнює 34.

1700 року корейський математик Choi Seok-jeong видає першу книгу з прикладом квадрата $9 \times 9$, у якому фігурують лише 9 чисел, і в кожному рядку й кожному стовпці вони не повторюються.

[2] «Nikoli» – відоме японське видавництво, що розробляє головоломки і видає журнали про головоломки.

У другій половині XVIII століття Леонард Ойлер розвинув теорію латинських квадратів. Наприкінці XIX століття французькі творці головоломок почали експериментувати з вилученням чисел із магічних квадратів. Першу схожу на сучасне судоку головоломку опубліковано в паризькому журналі 1892 року. Вона мала вигляд частково заповненого магічного квадрата розміром 9 × 9 із виділеними клітинами 3 × 3. Це не було судоку, оскільки використовувалися двоцифрові числа і заповнення потребувало радше арифметичних навичок, а не логічних.

У 1997 році суддя з Гонконгу побачив у японській книгарні частково розв'язану головоломку. Це спонукало його розробити комп'ютерну програму для швидкого створення унікальних судоку. Шість років знадобилося йому на написання програми, яку він вирішив передати до редакції британського журналу «The Times». З 2004 року в журналі почали друкувати такі судоку, і вже у 2005-му завдяки цьому судоку захопило весь світ.

Безліч журналів і газет друкували головоломку на своїх сторінках, змагалися за те, щоб зватися її авторами та публікувати її на обкладинці; з'явилися вебсайти, присвячені судоку, комп'ютерні й настільні ігри; а теле- і радіожурналісти насилу встигали публікувати новини й відповідати на численні листи. До редакцій надходили скарги, що захоплені розв'язанням судоку люди пропускали час відправлення своїх поїздів, запізнювалися на роботу, ставали неуважними та байдужими до навколишнього світу.

З 2006 року започатковано проведення щорічного чемпіонату світу з судоку. Перший чемпіонат відбувся в італійському місті Лукка, другий – у Празі, Чехія, третій – в Гоа, Індія. Цікавий факт: у цьому змаганні є особливі номінації лише для двох вікових категорій – «до 18» та «після 50». У першій категорії з 2013 року (коли ввели такий поділ) усі призові місця займали винятково китайці.

Головоломки популярні завжди: як в античності, так і на сьогодні, в епоху розвинених інформаційних технологій. Як діти, так і дорослі із захопленням розв'язують сучасні головоломки, адже вони з кожним роком стають дедалі складнішими й заплутанішими.

## Завдання для самоконтролю

1. За розв'язання якої головоломки у 1880 році було оголошено велику грошову премію:
   а) пазл Спілсбері;
   б) кросворд Артура Вінна;
   в) судоку;
   г) гра в 15.

2. Хто з цих математиків не має прямого стосунку до розвитку головоломок:
   а) Леонард Ойлер;
   б) Карл Гаусс;
   в) Генрі Дьюдені;
   г) Ахмес.

3. Установіть хронологічну послідовність появи (масового поширення) головоломок:
   а) пазли;
   б) ребуси;
   в) кросворд;
   г) танграм.

4. Хто вигадав легенду танграма:
   а) Сем Лойд;
   б) стародавні китайці;
   в) Джон Спілсбері;
   г) визначити неможливо.

5. Встановіть відповідність між головоломкою та приблизним часом її появи:

| | |
|---|---|
| 1) кубик Рубіка | а) 1970-ті |
| 2) пазл | б) 1910-ті |
| 3) кросворд | в) 1760-ті |
| 4) гра в 15 | г) 1810-ті |
| | д) 1870-ті |

## Завдання до підрозділу

1. Летіла зграя гусаків, а назустріч їм – іще один гусак. Він привітався зі зграєю: «Привіт, сотне гусаків!». А вони йому відповідають: «Нас не сто, нас набагато менше. Ось якщо взяти стільки, скільки нас, і ще стільки ж, і ще половину від нашої кількості, і ще чверть, і ще додати тебе, гусаче, то тоді нас буде сто». Скільки гусаків було в зграї?

   На вашу думку, ця задача з папіруса Ахмеса чи зі збірника Алкуїна?

2. Один чоловік перед смертю заповідав трьом своїм синам 30 скляних пляшок, серед яких 10 були повністю заповнені олією, 10 заповнені наполовину і 10 порожніх. Потрібно розподілити пляшки й олію так, щоб кожному синові дісталася однакова кількість олії та кількість пляшок.

   На вашу думку, ця задача з папіруса Ахмеса чи зі збірника Алкуїна?

3. Яку із запропонованих головоломок винайшов Сем Лойд (можна здійснити інтернет-пошук)?
   а) танграм;
   б) гра в 15;
   в) «Схована зірка»;
   г) «Гіперкуб».

4. Що із зображеного – головоломка «Ханойська вежа»?

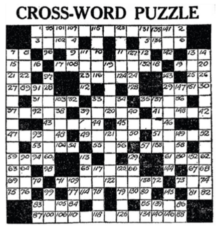
а

б

в

5. Що із зображеного – кросворд Артура Вінна?


а




б


в

6. Задача на переправу: селянин із двома вовками, собакою, козою і мішком капусти підійшов до річки. Йому треба переправитися на інший берег за допомогою тримісного човна. Кожне місце може займати людина, тварина або мішок капусти, причому не можна залишати разом собаку з вовком, собаку з козою, вовка з козою, козу з капустою. Як селянинові переправитися без втрат?

7. Задача на переправу: три математики і три ведмеді мають перетнути річку за допомогою човна, у якому можуть розміститися тільки троє. Математики мають дотримуватися обережності, щоб ведмеді не отримали чисельної переваги на будь-якому березі. Як переправитися на інший берег річки?

# 1.2. Видатні люди у світі головоломок

**Джон Спілсбері** (1739–1769) – британський картограф, винахідник дерев'яних пазлів. Працював гравером і помічником географа імператорського двору короля Георга III.

На його честь було засновано міжнародну премію. Людям, які зробили значний внесок у розвиток популярності головоломок, присуджується міжнародна премія імені Спілсбері.

**Льюїс Керрол** (1832–1898) – англійський математик, письменник, професор математики в Коледжі Христової церкви. Написав багато науково-популярних і наукових книжок, винайшов прототип гри «Scrabble» (*«Ерудит»*), а також гру, в якій необхідно в результаті послідовної заміни літер прийти від одного слова до іншого, і ще багато всього. Справжнє ім'я математика – Чарльз Лютвідж Доджсон. Свій псевдонім він придумав так: англійське ім'я *Charles Lutwidge* спочатку було перетворене на латинське – *Carolus Ludovicus*. Після цього ім'я було повернено до англійських канонів і для цікавості переставлено слова місцями. Так і з'явився яскравий псевдонім – *Lewis Carroll*.

Уночі, щоб відволікатися від сумних думок, Керрол вигадував різноманітні задачі, головоломки, ігри, розв'язував їх стандартними та нестандартними способами. Він уклав збірник, що спершу мав назву «Опівнічні задачі, придумані безсонними ночами», а згодом, у другому виданні, словосполучення «безсонні ночі» було замінено на «безсонні години».

**Ной Чепмен** – американський поштмейстер, вважається автором легендарної гри у 15, хоча до винаходу та після нього поштмейстер нічим більше не відзначився. Прототипом гри була придумана ним же головоломка, яка полягала в тому, що потрібно викласти 16 пронумерованих квадратиків у ряди по чотири штуки так, щоб сума чисел у кожному ряду дорівнювала 34.

**Сем Лойд** (1841–1911) – відомий американський шахіст і автор величезної кількості головоломок та присвячених головоломкам книжок, наприклад «Восьма Книга Тан», у якій гарно обігране божественне походження танграма. Він є автором популярної головоломки на зникання «Get off the Earth». Лойд відомий тим, що крав авторство головоломок, тому майстри та математики відмовлялися з ним співпрацювати. Дуже довго, але безуспішно, боровся за право називатися автором гри у 15.

**Генрі Дью́дені** (1857–1930) – англійський спеціаліст із логіки та математичних ігор. Упродовж двадцяти років вів розділ математичних розваг у популярному журналі «Strand Magazine».

1907 року побачила світ перша книга Дьюдені «Кентерберійські головоломки». Після цього з'явилися «Математичні розваги», «Найкращі головоломки з усього світу» і «Сучасні головоломки». Книги «Цікаві завдання й головоломки» та «Копальні головоломок» були опубліковані вже після смерті Генрі Дьюдені (1930).

Дружнє суперництво із Семом Лойдом зіграло важливу роль у житті математика. Вони листувалися, обмінювалися ідеями, доповнювали один одного в тому сенсі, що Лойд умів «продати публіці» ідеї, що їх генерував Дьюдені.

Особливої майстерності Генрі Дьюдені досяг у розв'язанні геометричних задач на розрізання. Він виступав перед членами Королівського математичного товариства із доповіддю про те, як розрізати квадрат на чотири частини, із яких можна скласти рівносторонній трикутник (розрізання Дьюдені).

**Мартін Гарднер** (1914–2010) – американський математик, письменник, популяризатор науки. Інтерес до науки, зокрема математики, у мільйонів людей по всьому світу з'явився завдяки його книгам.

Гарднер працював в університетській пресслужбі, а після Другої світової війни розвивав свою діяльність у журналах «Есквайр» та дитячому «Humpty Dumpty Magazine». З 1956 до 1981 року вів рубрику математичних ігор і розваг у журналі «Scientific American».

Гарднер легко й дохідливо пояснював цікаві математичні задачі. Працюючи в «Scientific American», написав книги, такі як «Є ідея!», «Хрестики-нулики», «Цей правий, лівий світ» тощо. Він вивчав творчість Керрола, розгадуючи математичні, філософські, фізичні, лінгвістичні парадокси, що зашифровані в книгах про Алісу. Опублікував у своїй рубриці опис гри «Життя», яку в 1970 році придумав відомий американський математик Джон Конвей[3], зробивши її відомою на весь світ. Ця гра, а точніше, клітинний автомат, має всього два правила, але настільки вдалі, що вона й досі привертає увагу вчених, які знаходять її прояви в біології, астрономії та фізиці, хімії, соціології тощо.

За життя Мартін Гарднер написав понад 100 книжок, рецензій та статей, вів рубрики. Він висвітлював популярні й непопулярні задачі, популяризував різних авторів, різні розділи математики й нестандартні підходи до постановки й розв’язання задач, сам складав головоломки й грався зі словами.

Діяльність Гарднера може вважатися еталоном популяризування науки. Взявши приклад із Льюїса Керрола, він розвинув талант пояснювати складні речі простими словами.

**Яків Перельман** (1882–1942) – популяризатор фізики, математики й астрономії, один із основоположників жанру науково-популярної літератури, автор поняття *«наукова фантастика»*.

Перельман не робив наукових відкриттів, не мав ученого звання, проте все життя присвятив науці. У 1913 році вийшла перша частина його книги «Цікава фізика», яка мала приголомшливий успіх у читачів. Учені визнали Перельмана, сказавши, що ніхто раніше не міг так яскраво й доступно писати про науку.

За 17 років роботи в редакції журналу «Природа і люди» Перельман надрукував понад 500 статей.

У 1919 році вийшов перший номер заснованого ним журналу «В майстерні природи». У 1920-ті роки Яків Перельман працював у редакціях журналів «Наука і техніка», «Педагогічна думка», «Червоній газеті». Після «Цікавої фізики» вийшли друком «Цікава арифметика», «Цікава алгебра», «Цікава астрономія», «Цікава геометрія»,

[3] Джон Конвей помер 11 квітня 2020 року від COVID-19.

«Цікава механіка» і ще безліч книжок, які так полюбилися дітям і дорослим.

Завдяки ініціативі Перельмана було відкрито Будинок цікавих наук – прототип сучасних музеїв цікавої науки, до яких належить і інтерактивний простір «Музей науки Малої академії наук України» в Києві.

**Олександр Гайштут** (1936–2015) – український вчитель-методист вищої категорії, викладач математики. Зробив значний внесок у розвиток методик навчання математики на основі головоломок. Написав велику кількість підручників та методичних посібників, втілюючи ідею нестандартних підходів до розв'язання задач та зацікавлення учнів шляхом залучення їх у пізнавальну гру.

У 1980 році вийшла перша книга – «Прийоми інтенсифікації математики в 4–5 класах», що поклало початок великій кількості публікацій. У 1988 році Олександр Гайштут створив творче об'єднання «Учитель», яке займалося розробкою і друком навчальних наочних посібників – наборів плівок для кодоскопа та діафільмів. Окрім авторських розробок Гайштута, публікувалися також матеріали і з інших предметів.

До ознайомлення пропонується його книга «Вправи з розвитку мислення» (1994).

**Ерньо Рубік** (1944) – угорський скульптор, винахідник, професор архітектури. Це людина, яка назавжди перевернула світ своїм винаходом. Він не тільки любив читати літературу, а й обожнював головоломки, шахи, математику, геометрію, захоплювався малюванням.

Отримавши технічну освіту (інженер), Ерньо Рубік вирішив додати творчості у свою діяльність і вступив до аспірантури на спеціальність «Дизайн інтер'єру».

На початку 1970-х років Ерньо починає викладацьку діяльність. Саме вона і послужила поштовхом до створення головоломки. Молодий викладач у 33 роки став першим мільйонером у соціалістичному блоці країн, який заробив свої гроші власним розумом і абсолютно чесно. Офіційний рік народження кубика Рубіка – 1974.

Рубік став професором будапештського Університету мистецтв і дизайну, потім – президентом Угорської інженерної академії. У 1990-х заснував Міжнародний фонд Рубіка, завданням якого є підтримка молодих талантів, що працюють у технічній і промисловій сферах.

*The Japanese like logical thinking.*
*We have a discipline of 'try, try, and try again'.*
*In Europe and the USA it is always 'fun, fun, fun'.*
*Макі Кадзі*

**Макі Кадзі** (1951–2021) – японець, засновник журналу «Puzzle Communication Nikoli» (1980), який спеціалізується на головоломках. У XVII–XIX століттях Японія була ізольована від світу, тому виробила власний підхід до математики й головоломок. Здебільшого японці надавали перевагу геометричним та паперовим головоломкам, замкненим коробкам (головоломки послідовного руху). Саме завдяки Макі Кадзі з'явилося відоме на весь світ судоку, трохи менш знані какуро та хіторі. Відомо багато японських авторів головоломок. Британський письменник **Алекс Беллос** подорожував до Токіо, щоб зустрітися з ними, й написав книгу «Puzzle Ninja», у якій зібрав безліч унікальних японських головоломок. Найбільш значущі його твори – «Alex's Adventures in Numberland», «Alex Through the Looking-Glass» та збірка найкращих математичних головоломок тисячоліття «Can You Solve My Problems?».

## Завдання для самоконтролю

1. Встановіть відповідність між головоломкою та людиною, причетною до її створення:

| | |
|---|---|
| 1) кубик Рубіка | а) Макі Кадзі |
| 2) пазл | б) Джон Спілсбері |
| 3) судоку | в) Сем Лойд |
| 4) гра в 15 | г) Ернью Рубік |
| | д) Ной Чепмен |

2. Визначте хронологічну послідовність діяльності таких людей, як:
   а) Генрі Дьюдені;
   б) Сем Лойд;
   в) Льюїс Керрол;
   г) Ерньо Рубік;
   д) Мартін Гарднер;
   е) Макі Кадзі;
   ж) Яків Перельман.

3. Хто з видатних людей заснував музей, що став прототипом інтерактивного простору «Музей науки Малої академії наук України»?
   а) Сем Лойд;
   б) Ерньо Рубік;
   в) Мартін Гарднер;
   г) Яків Перельман.

## Корисні відео

– Льюїс Керрол

– Сем Лойд

# 2.

# Головоломка як математична задача

# 2.1. Що таке головоломка?

*Навчання на основі головоломок* [2] – це один із підходів до розвитку розумової активності та наполегливості у розв'язанні проблем. Завдяки роботі з головоломками краще засвоюються й закріплюються набуті знання, в учнів з'являється жвавий інтерес до вивчення математики. Головоломки стимулюють розвиток пам'яті, уваги, уяви; навчають аналізу й синтезу, порівнянню, сприйняттю просторових співвідношень, розвивають конструктивні вміння і творчість, формують навички обґрунтовувати судження, сприяють підпорядковуванню своїх дій поставленому завданню, доведенню розпочатої діяльності до її логічного завершення.

Однією з основних причин не зовсім достатнього використання головоломок в освітньому процесі є те, що наразі майже не існує наукових досліджень зазначеної проблеми, а також посібників, що містять достатню кількість головоломок різних видів. Втім, результативність навчання математики на основі головоломок доведено дослідженнями, опублікованими в книзі професорки Стенфордського університету Джо Боулер [3].

У нашому виданні представлено головоломки, які є не лише текстовими задачами, а й такими, що можуть бути виготовлені з картону, паперу та дають можливість побачити й скласти головоломку власними руками. Також є командні ігри, де важливо розуміти наміри інших гравців, стратегічно планувати взаємодію між гравцями.

Що ж таке головоломка і чим головоломка відрізняється від *вправи* чи *задачі*? Традиційно головоломки й ігри відносяться до розділу, який називається *цікава математика*. Цікава математика найбільше асоціюється з головоломками не лише тому, що в основі майже кожної головоломки є математична ідея, а й тому, що розв'язання головоломки близьке до розв'язання математичної задачі. Зазначимо, що не існує узгодженого визначення терміна *«головоломка»*. Але можемо порівняти цей термін із більш широковживаними математичними термінами *«вправа»* й *«задача»*.

*Математична вправа* – це задача (можливо, досить складна), яка може бути розв'язана відомим раніше методом. Наприклад, розв'язання біквадратного рівняння. Такі вправи становлять значну частину навчальної методики. Навчання учнів виконувати вправи передбачає ознайомлення з теорією, демонстрацію способів виконання, формування в учнів умінь і навичок здійснювати комплекс математичних обчислень.

*Задача* – це поняття є ширшим, ніж «вправа». Задачі частіше формулюються вербально, і математична суть там може бути не очевидною. Тому доводиться міркувати, у чому ж полягає задача, проаналізувати умову, виділити важливі елементи й вибрати, як їх перекласти на мову математики, розв'язати математичними методами, що є подібним до моделювання. Наприклад, завдання нижче – типова задача.

---

**Задача:**
Є квадратний аркуш картону. З нього в кутах вирізають чотири квадрати і склеюють коробку сторонами, де робили вирізи.

**Питання:**
Яка має бути сторона вирізаного квадрата, щоб коробка мала найбільший об'єм?

---

Після того, як процес математичного опису задачі завершений, учні вважають її звичайною вправою.

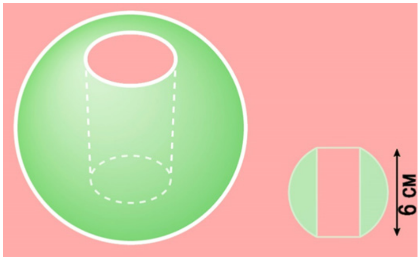
Визначимо *головоломку* задачею, яка викликає здивування і має розв'язок, що вимагає значної винахідливості, нестандартних підходів до її розв'язання, або приводить до несподіваного, навіть контрінтуїтивного чи парадоксального розв'язку.

Тобто елемент здивування (вау-момент) може бути наявним або в умові головоломки, або в неочікуваному ході розв'язання, або в самій відповіді. Розглянемо це на прикладах.

Перший приклад задачі-головоломки, коли умова побудована таким чином, що здається, ніби даних для її розв'язання не вистачає.

**Приклад 1. Задача про отвір у кулі**

Через центр кулі було зроблено циліндричний отвір довжиною 6 см, як показано на рисунку.




**Питання:**

Який об'єм тієї частини кулі, яка лишилася?

Умова задачі виглядає неповною, бо здається, що в ній не вистачає даних. Нам відома лише довжина отвору та зовсім нічого не відомо про розміри кулі. Потрібно створити геометричну модель задачі та з'ясувати, які ще розміри ми можемо знайти.

Нехай $R$ – радіус кулі. На рисунку радіус циліндричного отвору дорівнює $\sqrt{R^2-9}$, а висота сферичних «шапочок» на кінцях циліндра дорівнює $R-3$. Для обчислення об'єму, що залишився після того, як було вирізано циліндр і шапочки, потрібно додати об'єм циліндра $6\pi(R^2-9)$ до подвоєного об'єму сферичної шапочки і відняти цю суму від об'єму кулі $\frac{4}{3}\pi R^3$, об'єм «шапочки» обчислюється за формулою кульового сегмента $\frac{1}{3}\pi h^2(3R-h)$, де $h$ – висота «шапочки», яка в задачі дорівнює $h = R - 3$.

Виконавши спрощення виразу, бачимо, що відповідь не залежить від значення радіуса:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 - 6\pi(R^2-9) - 2\times\frac{1}{3}\pi(R-3)^2\big(3R-(R-3)\big) =$$

$$= \frac{4}{3}\pi R^3 - 6\pi R^2 + 54\pi - \frac{2}{3}\pi(R^2-6R+9)(2R+3) =$$

$$= \frac{4}{3}\pi R^3 - 6\pi R^2 + 54\pi - \frac{2}{3}\pi(2R^3-12R^2+18R+3R^2-18R+27) =$$

$$= 54\pi - 18\pi = 36\pi.$$

Другий приклад задачі-головоломки, у якій наявний елемент несподіваної влучної ідеї під час розв'язання задачі.

---

**Приклад 2. Задача про паркан**

Прямокутне поле оточене смугою лісу у формі літери L, як показано на рисунку.

**Завдання:**

Проведіть прямий паркан так, щоб він розділив поле та ліс навпіл.

---

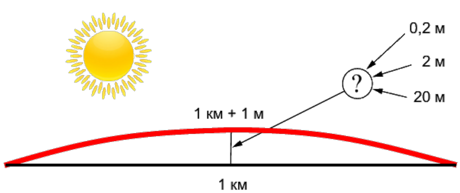
Ідея полягає в тому, що для того, аби поділити поле навпіл, потрібно, щоб паркан проходив через центр прямокутника, що є полем. І не обов'язково паркан має бути діагоналлю. Несподівана ідея виникає, коли під час міркування над головоломкою усвідомлюємо, що пряма (паркан), яка проходить ще і через середину великого прямокутника, поділить і зону лісу навпіл.

Третій приклад неочікуваної й контрінтуїтивної відповіді можна продемонструвати на *задачі про залізничну рейку*. Ця задача справляє велике враження, і не тільки на дітей, а й на дорослих.

---

**Приклад 3. Задача про залізничну рейку**

Залізнична рейка має довжину 1 км. Вона лежить на рівній землі. Якось під пекучим сонцем рейка подовжилась на 1 м. Її кінці залишилися нерухомими, закріпленими на землі, а колія утворила дугу довжиною 1001 метр.




**Питання:**

На скільки метрів підніметься рейка над землею в центрі дуги?

---

Є три варіанти відповіді: приблизно 0.2 м (20 см), приблизно 2 м, приблизно 20 м. Що нам підказує інтуїція? Здається, що відповідь – 20 см або 2 м, але якщо зробити розрахунки, то відповідь буде несподіваною.

Зробимо спрощену модель задачі: дугу наблизимо гіпотенузою прямокутного трикутника *(рис. 3).*

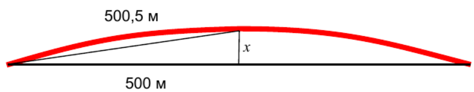



Рис. 3. Модель задачі: робимо спрощення, приймаючи, що дуга дорівнює хорді

Тоді за теоремою Піфагора отримаємо:

$$500^2 + x^2 = 500.5^2 \Longrightarrow x^2 = 500.5^2 - 500^2 \Longrightarrow x \approx 22.4.$$

Отримана відповідь неочікувана. Насправді рейка дійсно підійметься приблизно на 20 м!

Якщо застосувати більш точну формулу Гюйгенса: $L = 2m + \dfrac{2m - M}{3}$, то отримаємо, що хорда $m =$ 500.36 м, і тоді зможемо більш точно порахувати висоту, яка дорівнюватиме 19 метрів *(рис. 4).*

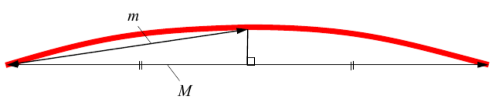



Рис. 4. Модель задачі

Ця задача, окрім несподіваної відповіді, має висновком важливе правило: не покладайся на інтуїцію, а перевіряй все за допомогою розрахунків. Це правило покладено в основу методики розв'язання головоломок, про яку йтиметься у наступному підрозділі.

Коли ми говоримо про навчання на основі головоломок, то в такому процесі ми переходимо від об'єктів чи явищ реального світу до побудови моделей (формулювання умов задач), які потім приводять учнів до узагальнення й абстракцій.

Є і зворотний напрям – від розв'язання й обмірковування абстрактних задач, коли відпрацьовується багато важливих навичок, до розуміння, де їх можна використовувати в житті *(рис. 5).*


Рис. 5. Навчання на основі головоломок: перехід від реального світу до абстракції та навпаки

# 2.2. Типи головоломок

Зроблено багато спроб класифікації головоломок, проте всі вони були або надто спеціалізованими, або надто загальними, тому типи, які тут наводяться, є умовним розподілом усіх головоломок для зручнішого розуміння їхньої різноманітності.

Отже, першим типом є *текстові головоломки*. Це найдавніший тип логічних задач, що з'явилися в усній формі. Для їх вирішення не потрібно нічого переставляти, повертати чи рухати. Прикладом таких головоломок є, скажімо, задача, відома людству з підручника Алкуїна більше ніж 1000 років, – про вовка, козу і капусту (задача розглянута в підрозділі 1.1). До цього класу належать і математичні головоломки – нестандартні задачі або ж парадокси, твердження й міркування, які на перший погляд не містять помилок, проте таки є помилковими. Приміром, теорема Льюїса Керрола про те, що тупий кут іноді дорівнює прямому, або що всі трикутники є рівнобедреними (підрозділ 5.10).

Наступний тип головоломок — *логічно-ігрові*, виникли також із життя, наприклад, коли купці загадували загадки про мішки з пшеницею або ж коли столярові наказували зробити ідеально круглий стіл. Такі головоломки передбачають наявність предметів, які можна рахувати, рухати, розрізати, переливати чи пересипати одне в інше (підрозділ 5.4.2), наявність елемента гри (ігрового поля, реквізиту). Також до них належать судоку (підрозділ 5.5), кросворди (підрозділ 3.3.2) та інші задачі, які потребують уваги, уяви та кмітливості.

Третій тип – *графічні головоломки* – це такі загадки, відповідь на які треба шукати на зображенні. До них належать ребуси (підрозділ 3.3.1), шифри (підрозділ 3.3.3), детективні картинки, зображення, на яких треба щось порахувати або знайти (підрозділ 4.3.2).

Четвертий тип – *механічні головоломки*. Їх, у свою чергу, також можна поділяти за певними характеристиками. Загалом питання класифікації є доволі дискусійним і неоднозначним. Наведемо розподіл механічних головоломок за Джері Слокумом [14]:

1. *Головоломки на складання* – задача є вирішеною, коли вона є складеною. Прикладами є танграм, пазли (підрозділ 6.2), головоломки із сірниками (підрозділ 6.3, *рис. 6*), пакування (підрозділ 6.6), оригамі (підрозділ 6.4).

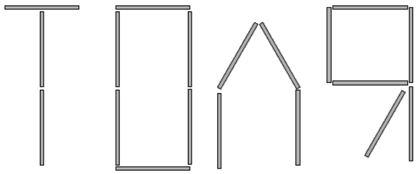


Рис. 6. Задача із сірниками: перекладіть один сірник так, щоб вийшло жіноче ім'я

2. *Головоломки на розкладання* – задача полягає в тому, щоб розділити головоломку на частини або відкрити її нестандартним чином, наприклад загадкові замки або шкатулки.

3. *Замкнені суцільні головоломки* – вважаються вирішеними, коли відомо, як розібрати, а потім зібрати назад головоломку. До них належать такі головоломки, які складаються з частин, що хитро й щільно зачеплені одна за одну, наприклад «Дерев'яний китайський вузол» *(рис. 7)*.

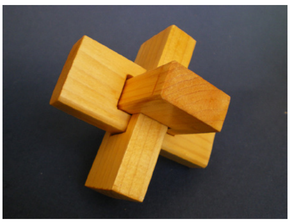


Рис. 7. Головоломка «Дерев'яний китайський вузол»

4. *Розплутувані головоломки* – головоломки з вузлами, мотузками й кільцями, дерев'яними чи металевими елементами (підрозділ 6.5, *рис. 8*).

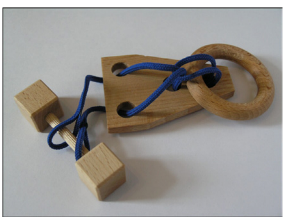


Рис. 8. Розплутувані головоломки

5. *Головоломки послідовного руху* – для того, щоб вирішити головоломку, необхідно виконати певну послідовність рухів різних її частин. До таких належать: гра в 15 (підрозділ 6.7), кубик Рубіка (підрозділ 6.8), «Ханойська вежа», «Dad's puzzle» *(рис. 9)*.

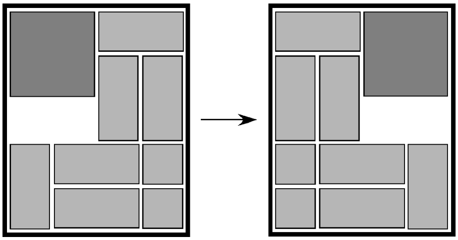


Рис. 9. Головоломка «Dad's puzzle»

6. *Головоломки на спритність* – це об'ємні чи пласкі лабіринти з кульками, наприклад, у яких потрібно провести кульку так, щоб та не впала у дірочки. Також до таких головоломок належать ігри на кшталт «впіймати м'ячик у чашку».

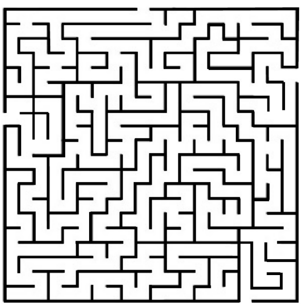


Рис. 10. Лабіринт: з'ясуйте, які з чотирьох отворів сполучені крізь лабіринт

7. *Головоломки на зникання* – що відбувається у таких головоломках, не вкладається в голові! Наприклад, головоломка Сема Лойда «Зникнення з планети Земля» («Get off the Earth») або «Зникнення лепрекона».

Велику кількість цікавих головоломок на зникання можна знайти на цьому ресурсі:

8. *Неможливі головоломки* – на перший погляд не зрозуміло, як вони взагалі склалися. Наприклад, хрест у колбі або пляшки Гаррі Енга *(рис. 11)*.

Рис. 11. Головоломка «Неможлива пляшка»

## Завдання для самоконтролю

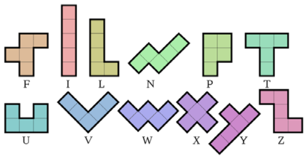
1. Який із зазначених типів головоломок НЕ Є елементом класифікації головоломок за способом взаємодії?
   а) графічні;
   б) розплутувані;
   в) текстові;
   г) механічні.

2. До якого типу головоломок належать математичні головоломки?
   а) текстові;
   б) логічно-ігрові;
   в) графічні;
   г) механічні.

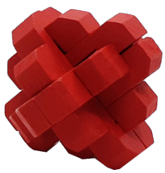
3. Оберіть логічно-ігрові головоломки:
   а) судоку;
   б) кубик Рубіка;
   в) шахова задача;
   г) гра в нім;
   д) гра в 15.

4. Встановіть відповідність між механічною головоломкою та її типом (за Джері Слокумом):

1.

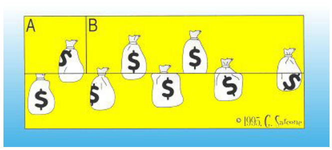



2.



3.

4.




а) головоломка на зникання

б) замкнена суцільна головоломка

в) головоломка на складання

г) головоломка на розкладання

д) розплутувана головоломка

# 2.3. Як розв'язувати головоломки

Упродовж багатьох років дослідники розробляли правила та методи розв'язування головоломок і нестандартних задач. Залишається визначити той, який нам більше до вподоби. Класичним і близьким до розв'язання математичних задач є метод контрольних питань. Його розробкою займалися С. Пірсон, А. Осборн, Дж. Поя, Р. Кроуфорд. У дослідженні Дж. Поя[4] представлено чотири основні блоки запитань для розв'язання задачі [6]:

1. Розуміння постановки задачі. Ясно зрозуміти задачу. Відповісти на такі запитання: *Що невідомо? У чому полягає умова? Чи можна задовольнити умову? Чи достатня умова для визначення невідомого? Чи недостатня, чи надмірна, чи суперечлива?* Зробити креслення. Визначити зручні позначки. Розділити умову на частини. Записати їх.

2. Складання плану рішення. Знайти зв'язок між даними і невідомим. Якщо цей зв'язок не вдається одразу визначити, то можна розглянути допоміжні задачі. Необхідно дійти до плану рішення. Запитання: *Чи не зустрічалась вам раніше подібна задача? Хоча б і в іншій формі? Чи відома вам якась схожа задача? Чи не знаєте теореми, яка могла б виявитись корисною? Розгляньте невідоме. Спробуйте згадати знайому задачу з таким же або подібним невідомим. Ось уже розв'язана задача, споріднена із цією. Чи не можна скористатися нею? Чи не можна використати її результат? Чи не можна використати спосіб її розв'язання? Чи не варто запровадити який-небудь допоміжний елемент, щоб можна було скористатися попередньою задачею? Чи не можна сформулювати задачу інакше? А ще інакше? Поверніться до визначень. Якщо не вдається розв'язати цю задачу, спробуйте спочатку розв'язати подібну. Чи не можна скласти більш просту*

[4] Джордж Поя (угор. *Pólya György*), нар.13 грудня 1887 року, Будапешт, Австро-Угорщина, нині Угорщина – † 7 вересня 1985 року, Пало-Альто, Каліфорнія, США. Угорський, швейцарський і американський математик. Закінчив Будапештський університет (1912), у 1914–1940 роках працював у Вищій технічній школі в Цюриху (з 1928 проф.). У 1940 переїхав до США. Основні праці – з теорії чисел, функціонального аналізу, математичної статистики (розподіл Поя) і комбінаторики (теорема Поя).

*подібну задачу? Або більш загальну? Або більш конкретну? Чи аналогічну? Чи не можна розв'язати частину задачі? Залиште лише частину умови: чи визначеним є тепер невідоме? Як воно може змінюватись? Чи не можна отримати підказку з умови? Чи не можна підставити інші дані, що допоможуть визначити невідоме? Чи не можна змінити невідоме, дані або їх разом так, щоб невідоме стало більш визначеним? Чи всі дані використано? Чи всі умови взято до уваги? Чи враховано всі суттєві поняття, наявні у задачі?*

3. Реалізація цього плану. Запитання: *чи ми впевнені, що цей крок правильний? Як можна довести, що він дійсно правильний?*

4. Аналіз розв'язку. Запитання: *чи можна перевірити результат? Чи можна перевірити хід розв'язання? Чи можна отримати той самий результат інакше? Чи можна побачити його відразу? Чи можна в будь-якій іншій задачі використати отриманий результат або метод розв'язання?*

Ідеї Поя розвивалися. У сучасних роботах Збігнєва та Метью Михалевичів [5] представлені більш спрощені підходи до схеми навчання на основі головоломок. На їхню думку, привести до розв'язку мають кілька логічних правил.

**Правило 1.**
**Зрозуміти головоломку, усі основні терміни та вирази, що використовуються для її визначення.**

**Правило 2.**
**Не надто покладатися на свою інтуїцію, бо обчислення – більш надійні.**

**Правило 3.**
**Побудувати модель головоломки, визначивши її змінні, їхні межі та сформулювавши питання в термінах змінних моделі.**

Проілюструємо, як ці правила працюють.

**Правило 1. Будьте впевнені в тому, що ви зрозуміли головоломку та всі основні терміни й поняття, які використовуються для її визначення.**

**Задача:**
Першу половину шляху автомобіль проїхав із середньою швидкістю 60 км/год, а другу – зі швидкістю 40 км/год.

**Питання:**
Яка середня швидкість автомобіля на всьому шляху?

Розглянемо, як працює це правило, на прикладі.

Спочатку учням може здатися, що відповідь (інтуїтивна, але неправильна) 50 км/год. Вона з'являється з нерозуміння самого терміна «середня швидкість». Для розв'язання задачі насамперед маємо застосувати **правило 1** і впевнитись, що розуміємо всі терміни та поняття в задачі.

*Середня швидкість* – це відношення всієї пройденої відстані до всього затраченого часу. Проаналізуємо умову задачі. Першу половину шляху автомобіль проїхав зі швидкістю $v_1$ = 60 км/год та витратив час, що дорівнює $t_1 = \frac{0.5S}{v_1}$, другу половину шляху – зі швидкістю $v_2$ = 40 км/год, витративши час $t_2 = \frac{0.5S}{v_2}$. Тепер можемо обчислити швидкість:

$$v = \frac{S}{t_1 + t_2} = \frac{S}{\frac{0.5S}{v_1} + \frac{0.5S}{v_2}} = \frac{2 \times 60 \times 40}{40 + 60} = 48 \text{ км/год}.$$

Отже, правильна відповідь – 48 км/год, і вона вже є контрінтуїтивною.

Цей приклад ілюструє, що без розуміння терміна «середня швидкість» задачу розв'язати неможливо. Так, дуже часто використання термінів «середній», «найбільший», «найкращий» без чіткого розуміння їхнього значення призводить до хибних висновків.

**Правило 2. Не довіряйте своїй інтуїції, лише за допомогою математичних обчислень можна отримати правильну відповідь.**

Частково це правило вже було продемонстровано в попередньому прикладі, тут можна навести більш цікаву задачу.

**Задача:**
Уявіть собі, що наша планета має форму кулі. Подумки обв'яжемо її по екватору мотузкою і зафіксуємо довжину екватора. Додамо шматок мотузки довжиною 1 метр і подумки «розподілимо» мотузку так, щоб проміжок між нею та поверхнею Землі був однаковий по всій довжині.

**Питання:**
Чи може в цей проміжок пролізти миша?

Може здатися, що миша не зможе пролізти в такий малий проміжок. Тоді згадайте формулу довжини кола: $C = 2\pi R$, де $C$ – це довжина екватора, а $R$ – радіус Землі. За умовою задачі збільшимо довжину мотузки на 1 метр: $(C + 1)$. Це означає, що радіус $R$ збільшився на невідому величину зазору $x$ і тепер дорівнює $R + x$. Отже, отримаємо рівняння: $C + 1 = 2\pi(R + x)$.

Далі розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} C = 2\pi R \\ C + 1 = 2\pi(R + x) \end{cases} \Rightarrow 2\pi R + 1 = 2\pi R + 2\pi x \Rightarrow 1 = 2\pi x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2\pi} \approx 0.159 \text{ м}.$$

Це контрінтуїтивно! Виявляється, що цей «зазор» становить більш ніж 15 см. А це означає, що в нього пролізе не тільки миша, а й кішка! Тому не треба довіряти своїй інтуїції, лише прямі обчислення можуть дати правильну відповідь.

**Правило 3. Створіть модель задачі, визначивши її змінні та їх обмеження.**

Обчислення й обґрунтування значно легше робити, коли є модель задачі, у якій визначені всі змінні, їхні межі та конкретна постановка питання в термінах змінних. Тому розв'язання головоломки краще проводити таким чином:

1. Розуміння проблеми, визначення змінних і діапазон їхніх значень.
2. Побудова самої моделі – рівняння (або системи рівнянь).
3. Розв'язання рівнянь.
4. Аналіз відповіді.

**Задача:**
В одній склянці було молоко, а в іншій – стільки само кави. Зі склянки молока перелили одну ложку до склянки з кавою та перемішали. Потім таку саму ложку отриманої суміші перелили назад у склянку з молоком.

**Питання:**
Чого більше – кави у склянці з молоком чи молока у склянці з кавою?

Продемонструємо підхід на прикладі.

Тут формулювання проблеми є цілком зрозумілим, бо всі поняття чітко визначені. Однак інтуїція – поганий порадник: багато людей вважають, що молока в каві буде більше, бо повну ложку молока додали в каву. Для того, щоб розв'язати задачу, скористаємося **правилом 3** – створимо модель задачі.

Нехай початковий об'єм рідин у кожній зі склянок дорівнює $V$, об'єм ложки – $x$. Після першого переливання у склянці з кавою знаходитиметься $V + x$ суміші (одиниці вимірювання не використовуємо), а у склянці з молоком – $V - x$ молока.

Тоді відношення $\frac{x}{V + x}$ – це частка молока в каві після першого переливання.

Другим кроком є переливання суміші молока з кавою до склянки з молоком. Дізнаємося, скільки молока повернулося в цій ложці: $x \times \frac{x}{V + x}$, тоді кави, відповідно, $x - x \times \frac{x}{V + x} = \frac{Vx}{V + x}$. Аналогічні відношення отримаємо, порахувавши кількості молока і кави в другій склянці.

Якщо задачі з розділу 5 розв'язувати за допомогою цих правил, то багато труднощів, які виникають під час роботи над головоломками, буде подолано.

## Завдання для самоконтролю

1. Оберіть три основні правила розв’язання математичних головоломок:
   а) упевнитися в повному розумінні проблеми та постановки задачі;
   б) створити математичну модель задачі;
   в) не довіряти інтуїції, перевіряти все розрахунками;
   г) зобразити всі відомі дані у вигляді таблиці.

2. Причина поширеної помилки в задачі про середню швидкість полягає в:
   а) нерозумінні термінів;
   б) громіздких розрахунках;
   в) заплутаній умові;
   г) усьому зазначеному вище.

3. У задачі про змішування кави й молока чого стало більше: кави в склянці з молоком чи молока в склянці з кавою?
   а) кави в склянці з молоком;
   б) молока в склянці з кавою;
   в) однаково;
   г) неможливо визначити.

# 2.4. Труднощі розв'язування головоломок

Розв'язування математичних задач часто вимагає «сфокусованого» мислення [7], знайомими для всіх є труднощі під час спроб осягнути нову тему чи розв'язати нестандартну задачу. Але саме тому треба вміти вмикати та вимикати зосередження на нових типах задач, змінювати свій підхід та кут зору. Саме цього і вчать нестандартні задачі та головоломки. Також нестандартні задачі вчать уникати «інерційного» (шаблонного) мислення. Один із головних психологічних бар'єрів – нездатність відмовитися від найбільш очевидного способу розв'язання задачі. Іноді ми не можемо сконцентруватися на пошуках нового підходу.

**Задача, яка демонструє шаблонне мислення:**

1. Розділіть квадрат зі стороною 1 на чотири рівні частини.
2. Розділіть такий самий квадрат на 16 рівних частин.
3. Розділіть такий самий квадрат на 17 рівних частин.

І якщо перші два пункти в задачі є легкими (більшість намалює чотири квадрати), то вирішити після них третій видається неможливим. Ми засвоїли певний шаблон, і це не дає змоги розв'язати третє завдання. Хоча насправді розділити квадрат на 17 рівних частин можливо. Ці частини не є квадратами, а є тоненькими прямокутниками зі сторонами $\frac{1}{17}$ та $1$.

Іншою проблемою є невміння переформулювати задачі з реального життя в математичні моделі. Запис математичного формулювання реальної задачі може викликати певні психологічні труднощі. Наприклад, запишіть у вигляді рівняння наступне твердження: «В університеті в 6 разів більше студентів, ніж викладачів», якщо $S$ – це кількість студентів, а $T$ – кількість викладачів. На цю задачу часто школярі дають неправильну відповідь: $6S = T$. Зазвичай труднощі виникають саме з переходом від словесного формулювання ситуації до математичного рівняння.

# 3.

# Поради педагогу

# 3.1. Головоломки як мотивація до навчання

Важливою складовою навчання будь-якого предмета є заохочення, розвиток та підтримка інтересу й залучення учнів до активного його вивчення. Потрібно аргументувати, чому вміння розв'язувати головоломки може стати в пригоді. Як уже зазначалося, уміння вирішувати проблеми не «за інерцією» є дуже актуальним сьогодні. Наприклад, інтелектуальні тести доволі часто використовуються у сфері бізнесу. Уміння робити розрахунки і передбачення є однією з ключових навичок кваліфікованих працівників багатьох галузей. Для того, щоб мотивувати до навчання, можна запитати в учнів, *яким вони бачать світ, у якому їм треба буде застосовувати свої навички та знання, як би вони описали реальний світ, які з навичок вони вважають потрібними в житті.*

Ймовірно, вони назвуть такі навички, як *вирішення проблем, критичне мислення, креативність, наполегливість, стійкість, планування, стратегічне мислення, синтез знань* тощо. Тому треба пояснити учням, що під час занять вони не лише отримують нові знання, а й розвивають навички логічно мислити. Головоломки є засобом підготовки до проведення дослідницької діяльності. Як і в досвідчених науковців, так і в учнів може виникнути проблема з пошуком способу розв'язання якоїсь складної задачі. Це природно. Можна провести аналогію зі спортом: коли ви зранку пробігли п'ять кілометрів, ви, ймовірно, не отримали якогось вагомого результату. Але сенс полягає в розвитку окремих навичок і якостей під час тренувань і під час розмірковування над задачею. Біг і тренування розвивають фізичну силу та витривалість, а головоломки – *розумову*. Ось поради, що ними варто скористатися під час навчання того, як розв'язувати головоломки.

**Порада 1.** Починайте розв'язання головоломок із постановки запитань, а не пояснення алгоритмів і відповідей. Як уже було описано в підрозділі 2.3, на кожному етапі розв'язування задачі є набір запитань, що має ставити учень. Під час розв'язування різних типів головоломок і нестандартних задач в учнів можуть виникати неочікувані запитання. Потрібно всіляко заохочувати їх ставити запитання, оскільки саме це навчає висувати гіпотези, дискутувати, сумніватися, перевіряти.

**Порада 2.** Дайте учням стільки часу на розв’язання задачі, скільки їм потрібно. Це розвиває наполегливість. Вони не отримують алгоритмів і відповідей, а долають труднощі та виклики під час розв’язання задач. Тому учні вимушені шукати власні підходи, генерувати ідеї, аналізувати. Що довше учні шукають відповідь, то активніше міркують, починають висувати більше гіпотез, ставити більше запитань. Під час дискусії вони розвивають допитливість, здатність ризикувати, обстоювати власні думки. А отже, стають більш рішучими.

**Порада 3.** Учитель не дає правильні відповіді, він бере участь в обговоренні складної задачі так само, як і учні. У такий спосіб він створює простір для спілкування, визначення та перевірки гіпотез. Педагог модерує та коментує це обговорення. Такий підхід сприяє формуванню вмінь і навичок використовувати наукові методи, про які ми поговоримо в розділі 4.

**Порада 4.** Для того, щоб учні зацікавилися розв’язуванням головоломок, вони мають бути впевнені у своїх силах! Тому варто розпочинати з простих і яскравих головоломок, а потім навчати розв’язувати більш складні. Дуже вдалим прикладом є парадокс Монті Голла (підрозділ 5.10), який можна пояснити, застосувавши і класичне визначення ймовірності (інтуїтивно зрозуміле і учням 7–8 класів), і загальну формулу Байєса, яка вивчається в теорії ймовірностей. Навчаючи розв’язувати головоломки на кшталт судоку та кен-кен, починайте з мінімальних і поступово збільшуйте їх розміри.

Під час навчання учні отримують внутрішню мотивацію для розв’язання більш складних задач. Завдання вчителя – підготуватися до цього. Саме для таких учнів пропонуються пункти з зірочками, орієнтовані на їх самостійну роботу.

Розділи посібника подібні до елементів конструктора, з яких можна складати уроки, додавати головоломки-розминки до програмного матеріалу, використовувати їх у роботі математичних гуртків. Робота над розв’язанням задач-головоломок сприяє створенню у колективі комфортної атмосфери, коли можливо помилятися, вчитися ставити запитання. Підбір головоломок для заняття потребує формулювання мети, якої потрібно досягти. *Чи це буде вправа на розминку? Чи потрібно провести знайомство та формування колективу? Чи зміцнити впевненість учнів у своїх силах? Чи хочете їх навчити ставити влучні запитання? Чи підготувати вихованців до участі в конкурсах?*

Існує не так багато головоломок і задач, які можуть поєднувати у собі всі ці функції. А на занятті, розробленому на основі головоломок, мають розв'язуватися завдання-головоломки, які зазвичай налаштовують на навчання, потім розв'язуються головоломки, що потребують колективного обговорення, а вже потім – індивідуальні завдання.

Частиною підготовки до такого заняття є вибір форми і методів роботи педагога. Чи буде воно відбуватися індивідуально, чи в групах? Чи матиме місце дискусія, під час якої учні братимуть активну участь в обговоренні та пошуку способів розв'язання?

# 3.2. Головоломки для знайомства

Незалежно від кількості учнів важливо, щоб вони брали активну участь у розв'язуванні задач. Метою вчителя має бути максимальне заохочення учнів використовувати можливості нестандартного мислення під час занять. Головоломки можна класифікувати різними способами: від простих до складних, від текстових до математичних, від абстрактних до конкретних.

У посібнику наведені головоломки для досягнення різних цілей. Деякі з них варто використати для знайомства на першому занятті з метою максимального залучення всіх учасників до активної участі в розв'язуванні головоломок. Це сприяє актуалізації знань, що допомагає розв'язанню більш складних головоломок, налаштовує колектив на подальше спілкування.

### Головоломка для знайомства 1

Потрібно підготувати папірці й ручки (олівці). Учень, який погодився бути ведучим гри, має озвучити назву комахи, що складається з трьох букв. Найбільш поширеними відповідями є «оса», «жук». Інші гравці записують по 5 географічних назв, у яких наявні ці три літери.

### Головоломка для знайомства 2

Сформуйте дві команди учнів і дайте їм листочки, де вони мають поставити галочку у віконце А чи у віконце Б. Поясніть, що бали першої команди будуть зараховані другій і навпаки. Радитися не можна. Усі відмічають А чи Б. Потім збираються картки першої команди й визначаються бали за системою, що описана далі. Це бали, що отримує **друга** команда. Збираються картки другої команди. Кількість балів зараховується **першій** команді. Виграє та команда, яка набрала більше балів.

*Оцінювання.* Якщо всі учні в команді відмітять віконце А, тоді кожна їхня картка вартує 20 із 20 можливих балів у цій вікторині. Якщо принаймні один учень вибере Б, тоді всі учні, які обрали А, отримають 10/20, і всі учні, які обрали віконце Б, отримають 15/20.

В учнів виникає зацікавленість, зокрема і щодо оцінювання своїх колег: хто яке віконце відмітить. Адже якщо всі інші в команді виберуть А, то суперники отримають максимальну кількість балів. Але якщо хтось із команди відмітить Б, то якраз вигідніше ставити галочку у віконце А, оскільки воно принесе суперникам лише 10 балів, а не 15!

## Головоломка для знайомства 3

Цю гру в 2005 році датська газета «Politiken» запропонувала своїм читачам із виграшем для переможця 5000 датських крон, на той час це близько $800.

Запропонуйте кожному з учнів загадати число від 0 до 100 та оголосіть правила: виграє той, чиє число виявиться найближчим до $^2/_3$ від середнього арифметичного загаданих чисел.

Ця гра відома в теорії ігор під назвою *«вгадати $^2/_3$ середнього»*. Вона демонструє різницю між абсолютно раціональною поведінкою і реальними діями гравців. Уявімо собі, що всі учасники гри діють повністю раціонально і, що не менш важливо, знають, що інші також діють раціонально і не змовляються між собою. Яке ж число буде оптимальним у такій ситуації?

Оскільки середнє арифметичне не може бути більше 100, то логічно, що немає сенсу називати числа більше ніж $^2/_3 \times 100 = 66.(6)$. Однак якщо всі гравці міркують подібним чином, усі числа будуть не більше ніж 66.(6). Отже, і середнє арифметичне не перевищить цього числа, тому не варто називати більше ніж $^2/_3 \times 66.(6) = 44.(4)$. Повторюючи таке міркування нескінченно багато разів, дійдемо висновку, що єдиним правильним ходом буде число 0. Тож якщо всі гравці міркують раціонально, то всі вони виберуть число 0. Однак у реальному житті ситуація відрізняється. Якщо гравець раціональний, він знає, що багато хто з його суперників не раціональні, а отже, йому доведеться враховувати, що їхні числа будуть більше 0.

Проводячи цю гру, також спробуйте вгадати число. Залежно від аудиторії значення може змінюватися від 20 до 30.

## Головоломка для знайомства 4

Учні мають написати на листочку їхнє ім'я та натуральне число, віддати листочки педагогу. Перемагає той, хто написав найменше унікальне число. Наприклад, якщо грають 7 гравців, і вони написали числа 5, 4, 2, 1, 1, 2, 6, перемагає гравець, який написав число 4. Після того, як ви зібрали листочки, почніть називати числа від 1. Коли учень чує своє число, він піднімає руку. Переможцем стане перша людина, яка буде єдиною з піднятою рукою. Дайте учням 5–7 хвилин подумати над цією проблемою.

Коли оголошується підсумок, потрібно розпочати загальну дискусію з цього питання. Інтуїція учнів часто вказує на просте евристичне правило, яке свідчить: «Що більша кількість учасників, то більше число треба писати на листочку», і це загалом є правдою. Зазначене можна проілюструвати, показавши криву *(рис. 12)*.

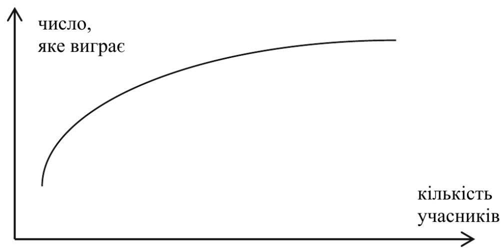



Рис. 12. Графік, що вказує на зв'язок між кількістю учасників і числом, яке виграє

Перш ніж повідомити результати, також можна оголосити учням власні очікування (на основі вашого попереднього досвіду). У багатьох випадках, коли проводилось таке змагання, було помічено кілька цікавих речей [8]:

- Було кілька учнів (більше одного), які вибирали 1. Міркування такі: є ймовірність, хоча й низька, що ніхто інший не вибере це число.
- Деякі числа популярніші за інші. Отже, можуть з'являтися піки частоти для деяких простих чисел (3, 5, 7 та 11). Із якихось причин учні (як і багато пересічних людей) надають перевагу простим числам.
  Популярність 4, 6 або 8 значно нижча.

## Головоломка для знайомства 5

Слова, які є назвами 10 країн, поділені на частини. Ці частини перемішуються, жодну з них не можна використовувати двічі, використати треба всі частини. Треба визначити, які це 10 країн. Картки з відповідними частинами слів винесені в підрозділ 8.1.

## Головоломка для знайомства 6

Ця головоломка є розважальною, проте має топологічне підґрунтя (див. підрозділ 6.5). Учні працюють у парах. Для кожного учня вам знадобиться 1–1.5 м мотузки товщиною близько 0.5 см. Кожен учень із пари зав'язує петлю на обох кінцях мотузки і просовує в неї зап'ястя. Дві мотузки мають з'єднати учнів, як показано на *рис. 13*.

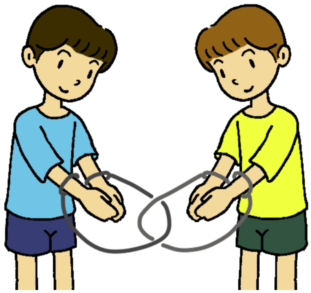


Рис. 13. Двоє учнів, з'єднані мотузкою

Завдання кожної пари учнів – розчепитися.

Учні мають розуміти, що в такій ситуації руки не є прив'язаними до мотузки. Мотузка утворює петлі, які потрібно використати. Після розв'язання кожен учень залишиться із мотузкою, але вже не буде прив'язаний до партнера.

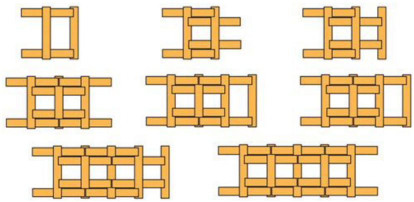
Через деякий час, якщо жодна пара не змогла роз'єднатися, можна підказати: чи можна протягнути мотузку через вузол на зап'ясті? Зніміть петлю із зап'ястя учня, замість неї вдягніть на зап'ястя гумове кільце й підкладіть під нього петлю *(рис. 14)*. Тепер попросіть учнів накинути петлю на зап'ястя, а потім зняти петлю із зап'ястя, не знімаючи гумового кільця. Ця задача виявиться легкою. За допомогою підказки учні можуть узагальнити хід розв'язання поставленої задачі. Це приклад стратегії вирішення проблем: коли ви не можете вирішити більш загальну задачу, шукайте подібну, але простішу задачу, яку ви можете розв'язати.

Рис. 14. Детальне зображення простішої задачі

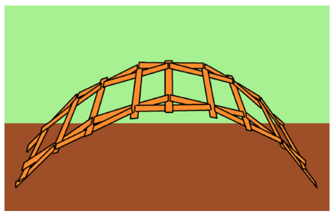
Якщо парі вдалося роз'єднатися, нехай спробують з'єднатися назад. Чи зможуть вони виконати свої дії у зворотному порядку?

### Головоломка для знайомства 7

Міст Леонардо да Вінчі – головоломка для командної роботи. Потрібно кілька десятків однакових пласких паличок від морозива. Завдання – побудувати з них міст без використання клею, скотчу тощо *(рис. 15)*.



а
Покрокова схема будівництва



б
Результат

Рис. 15. Міст Леонардо да Вінчі

# 3.3. Головоломки-розминки

Починати уроки чи робити паузи перед складними завданнями можна за допомогою головоломок-розминок розважального характеру. Такі головоломки готують та налаштовують учнів на певний спосіб мислення. Правильна розминка (як і в спорті) допоможе учням спрямувати їх мислення та потім розглядати складніші головоломки в тому ж ключі. Головоломки розважального характеру можна обирати досить різні за складністю та не прив'язані до конкретної дисципліни, хоча певні знання можуть стати в пригоді під час їх розв'язання. І нарешті – безпосередньо математичні головоломки, зокрема цікаві математичні задачі, у яких вже використовуються спеціальні знання з математики.

## 3.3.1. Ребуси

**Ребус** – це загадка, у якій слова або фрази зображено у вигляді комбінації картинок, фігур, композицій букв тощо. Саме слово «ребус» походить від латинської фрази «Non verbis sed rebus», що означає «Не словами, а речами». Сучасні ребуси є поєднанням зображень предметів, букв, цифр тощо, що за своїм звучанням нагадують слова або частини слів розгадки. Кілька ребусів можуть утворювати послідовність малюнків, і їх розгадкою є фраза або речення.

Це легка розвага, що підійде як для розминки, так і як елемент конкурсів головоломок чи інших інтелектуальних змагань. Під час розв'язування ребусів розвивається логічне мислення. Щоб правильно «прочитати» картинку, потрібно поміркувати над взаємним розташуванням елементів головоломки, підібрати правильні «ключі». Ребуси допомагають розвивати нестандартне мислення: картинку-шифровку можна інтерпретувати по-різному. Розв'язування ребусів за обмежений час може перетворитися на захопливе змагання. Невеликі 3–5-хвилинні змагання сприяють тренуванню кмітливості, швидкості мислення. Згодом можна запропонувати учням самим складати ребуси: зашифровувати імена та прізвища своїх однокласників, учителів і знайомих.

Усім нам траплялися ребуси у повсякденному житті. Найвідоміший ребус – **I ♥ Y** («I Love You»). Часто ребуси використовуються як розвага або як частина конкурсу чи гри. Але є ребуси, що слугують інструкціями (наприклад, табличка «Вихід там» у вигляді силуета чоловічка, що біжить, і стрілки, що вказує напрямок).

Як розгадувати ребуси? Для цього маємо згадати **правило 1** та виокремити всі елементи ребуса, зрозуміти їх значення, потім застосувати правила складання і читання таких головоломок.

### Складання і читання ребусів

1. Назви всіх предметів, зображених на ребусі, стоять в називному відмінку.

2. Якщо в назві предмета непотрібною є одна або кілька літер на початку чи в кінці цього слова – використовуються коми й апострофи. Кількість ком чи апострофів показує, скільки літер потрібно пропустити *(рис. 16).*

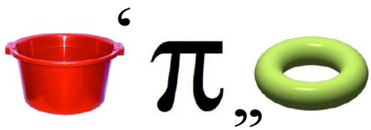


Рис. 16. Ребус «Тапір»

3. Якщо предмети чи літери розміщені одне в одному, до їхньої назви треба додати прийменник «у» або «в» *(рис. 17).*


Рис. 17. Ребус «Увага»

4. Якщо якась літера складається з іншої (багато разів повтореної), то читається з додаванням прийменника «з» *(рис. 18).*

Рис. 18. Ребус «Магазин»

5. Використання різних прийменників (над, під, між, за ...) залежить від розташування предметів відносно один одного *(рис. 19)*.


Рис. 19. Ребус «Задача»

6. Якщо зображення перевернуте догори дриґом або поряд із ним намальована стрілка, то його назву треба читати в протилежний бік *(рис. 20)*.


Рис. 20. Ребус «Нагляд»

7. Якщо закреслена літера стоїть окремо, читаємо як «НЕ»-літера *(рис. 21)*.

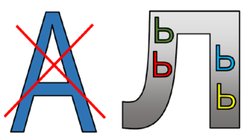



Рис. 21. Ребус «Неаполь»

8. Якщо біля зображення є підпис «буква» = «інша буква», або «цифра» = «буква», то в назві предмета потрібно замінити відповідну букву на ту, що вказана в ребусі (*рис. 22*).

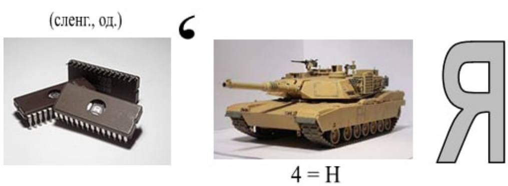



Рис. 22. Ребус «Читання»

## Завдання для самоконтролю

1. З якої мови походить слово «ребус»?
   а) французької;
   б) єгипетської;
   в) латини;
   г) італійської.

2. Яке з цих правил НЕ Є правилом читання ребусів:
   а) якщо предмети чи літери розміщені одне в одному, до їх назви треба додати прийменник «у» або «в»;
   б) якщо зображення перевернуте догори дриґом або поряд із ним намальована стрілка, то його назву треба читати в протилежний бік;
   в) назви всіх предметів, зображених на ребусі, читаються в називному відмінку;
   г) якщо якась літера складається з іншої літери, багато разів повтореної, то вона читається з додаванням прийменника «по».

3. Якщо перед перевернутим зображенням у ребусі стоїть кома, то треба:
   а) прочитати слово в зворотному порядку, але без першої літери;
   б) прочитати слово в зворотному порядку, але без останньої літери;
   в) прочитати слово в зворотному порядку, а кома стосується попереднього слова;
   г) прочитати слово без першої літери.

### Завдання
### до підрозділу

Розгадайте ребуси.

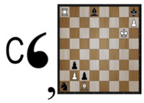
1. 

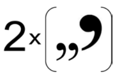

2. 


3. 


4. 


5. 


6. 


7. 


8. 


9. 

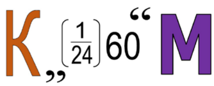

10. 


11. 

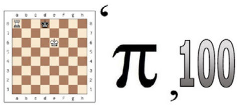

12. 


13. 


14. 


15. 


16. 

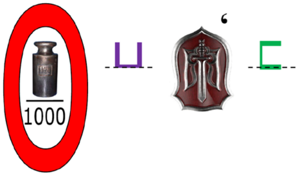

17. 


18. 


19. 


20. 

21.


1000

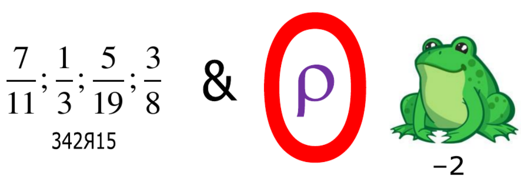
22.


Ox
Ostsee
Republik Polen
Bundesrepublik Deutschland
Neiße
Tschechische Republik
10²
A=O
ь
т
?
R

23.


п
С
5=ь
3 4
4 2
3/4
4=у

24.


7/11; 1/3; 5/19; 3/8
342Я15
&
ρ
−2

# 3.3.2. Кросворди

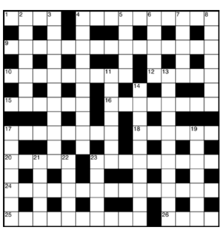
**Кросворди** – ігровий тип головоломок, завдання яких полягає в розгадуванні слів. Кросворди можна використовувати для запам'ятовування визначень і правил. Їх корисно застосовувати на етапі повторення матеріалу та на етапі перевірки знань: це робота з математичними (або іншими) термінами й поняттями. Розв'язування кросвордів збагачує словниковий запас, розвиває логіку, навчає творчому підходу до вирішення завдань.

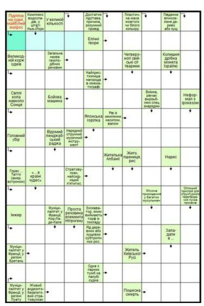
### Правила складання кросвордів

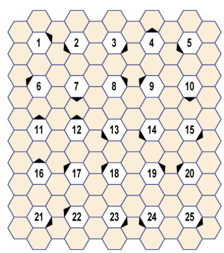
1. Не допускається наявність незаповнених клітин у сітці кросворда.
2. Не допускаються випадкові буквосполучення.
3. Слова мають бути іменниками в називному відмінку однини.
4. Дволітерні слова повинні мати два перетини.
5. Трилітерні слова повинні мати не менше двох перетинів.
6. Не допускаються абревіатури (МАН, ЗВО тощо), скорочення (дитбудинок тощо).
7. Не рекомендується велика кількість дволітерних слів.

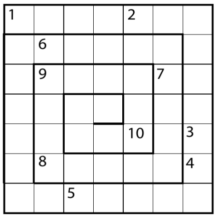
Переваги кросворда як засобу навчання полягають у деталізації окремих розділів і тем. У кросворді терміни є однозначними, лаконічними, конкретними. За рахунок цього і забезпечується швидке запам'ятовування слова та його значення; активізуються увага, пам'ять; формуються логічне мислення, мова.

### Види кросвордів

а


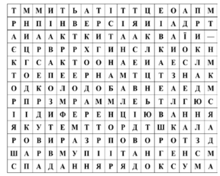
б


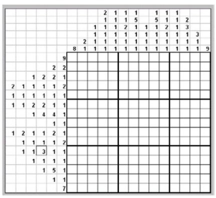
в


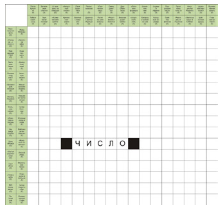
г


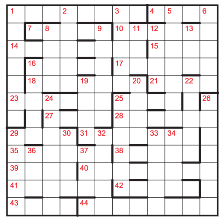
д

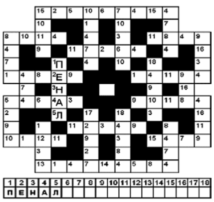


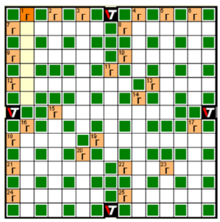
е


ж


и



к


л


м


а) *Класичний кросворд* складається із сітки кросворда й питань до загаданих слів. Сітка кросворда містить клітини з літерами слів-відповідей, а також порожні клітини. Кожна клітина першої літери будь-якого слова-відповіді має номер, яким позначаються ця відповідь та питання до неї.

б) *Скандинавський кросворд (сканворд)* від класичного кросворда відрізняється значно більшою кількістю перетинів слів вертикально й горизонтально. У сканворді замість розгорнутих питань у окремій графі й окремих клітинках пишуться короткі питання до загаданих слів, які також можуть бути представлені у формі зображень або фотографій і займати кілька клітин сітки.

в) *У циклокросворді (циклічному кросворді)* слова розташовуються навколо клітини з номером відповідного питання. Особливістю такого кросворда є однакова кількість букв у всіх загаданих словах – зазвичай 4, 6 або 8. Перетини слів відбуваються по дузі кола. Якщо слово розташоване не скраю, то всі його літери одночасно є літерами сусідніх слів.

г) *Лінійний кросворд («чейнворд», «чайнворд»)* – кросворд, у якому слова перетинаються по лінії: тобто кінець одного слова є початком наступного. Є кілька видів лінійних кросвордів.

д) *Угорський кросворд (філворд)* складається з клітин, у яких вже наявні букви відповідей. Завданням кросворда є знаходження слів-відповідей, що можуть розташовуватися вертикально, горизонтально або «ламатися» під прямим кутом, проте не перетинатися з іншими. Залежно від правил деякі літери залишатимуться зайвими і їх потім потрібно скласти в слово.

е) *Англійський кросворд* є схожим на філворд. Він також складається з поля, заповненого літерами, проте слова розташовані лише горизонтально, вертикально чи діагонально і вони можуть перетинатися між собою.

ж) *Японський кросворд*. На відміну від інших кросвордів його завданням є отримати не слова, а зображення. У комірках допоміжних полів розташовуються числа-підказки, які вказують на кількість суміжних клітин. Між групами клітин має бути принаймні одна порожня. Завданням гравця є дізнатися, скільки таких порожніх клітин між групами.

и) *Американський кросворд* схожий на японський. У такому кросворді замість сітки – прямокутне поле клітинок. Питання прив’язані до конкретних горизонталей і вертикалей, але точне положення відповідей невідоме. Зазвичай зазначена довжина і порядок відповідей знаходяться на лінії, тож вихідна сітка кросворда може бути визначена методом, аналогічним рішенням японської головоломки.

к) *Естонський кросворд*. Сітка цього кросворда не містить порожніх клітинок. Клітинки, що не належать одній відповіді, розмежовуються товстою лінією. В англомовних виданнях цей варіант називається barred crossword – «кросворд з перегородками».

л) *Ключовий кросворд (кейворд)* – кросворд, у якому букви замінені числами. Одним і тим самим літерам відповідають однакові числові позначення. Потрібно розгадати, якому числу відповідає яка буква. Підказкою може бути відкрите слово чи кілька літер.

м) *Алфавітними* є кросворди, у яких слова мають спільну ознаку: складаються з однакової кількості літер, або починаються з однакової літери, або мають спільну літеру на перетині рядків.

Розв'яжіть чейнворд (г), відгадавши математичні терміни, що ми туди вклали, та придумайте власні питання до нього. На зображенні (д) – філворд із математичними термінами та підказкою, які букви є зайві (якщо будете задавати це завдання учням, задайте без підсвітки) і утворюватимуть слово *геометрія*, що є темою філворда. А також (е) – англійський кросворд, що містить математичні й фізичні поняття.

## Завдання для самоконтролю

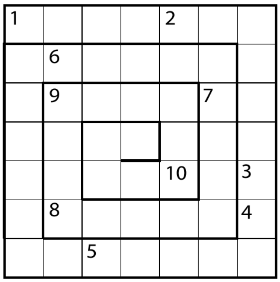
1. Що із запропонованого допускається у класичному кросворді?
   а) незаповнені клітини;
   б) дволітерні слова;
   в) загадане слово – прислівник;
   г) абревіатури.

2. Що із запропонованого не є кросвордом?
   а) кейворд;
   б) чекворд;
   в) циклокросворд;
   г) сканворд.

3. Скільки відомо видів кросвордів?
   а) 9;
   б) 10;
   в) 11;
   г) 12.

## Завдання до підрозділу

1. Розв’яжіть чейнворд, відгадавши математичні терміни, що ми туди вклали, та придумайте власні питання до нього.



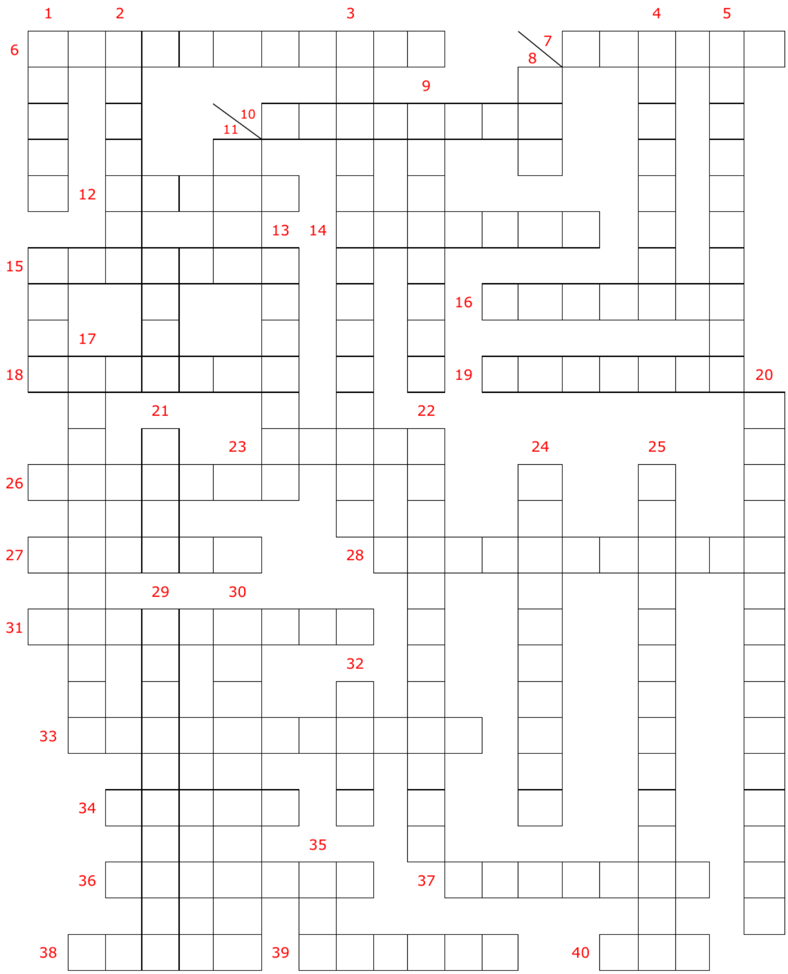
2. Розв’яжіть математичний філворд із підсвіченими літерами, які є зайвими в головоломці. Для ускладнення завдання розглядайте поле кросворда без виділення літер.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Г | І | С | Г | І | П | Р | О | М |
| А | П | У | Р | А | Т | І | Б | І |
| Н | О | Д | А | З | Е | С | А | Н |
| А | Т | Е | Н | У | К | И | С | Ь |
| І | Я | Т | Р | О | Т | Р | А | Н |
| Д | М | Е | Р | С | Н | Ч | И | Ч |
| Е | А | Н | О | Т | А | І | Т | О |
| М | Г | О | Р | Е | М | С | Е | Д |

3. Розв’яжіть англійський кросворд, що містить математичні й фізичні поняття.

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Т | М | М | И | Т | Ь | А | Т | І | Т | Т | Ц | Е | О | А | П | М |
| Р | Н | П | І | Н | В | Е | Р | С | І | Я | И | І | А | Д | Р | Т |
| А | И | А | А | К | Т | К | И | Т | А | А | К | В | А | Ї | И | — |
| Є | Ц | Р | В | Р | Р | Х | Г | И | Н | С | Л | К | И | О | К | Н |
| К | Г | С | А | К | Т | О | О | Н | А | Е | И | А | Е | С | Л | М |
| Т | О | Е | П | Е | Е | Р | Н | А | М | Т | Ц | Т | З | Н | А | К |
| О | Д | К | О | Л | О | Д | О | Б | А | В | Н | Е | А | Е | Д | М |
| Р | П | Р | З | М | Р | А | М | М | Л | Е | Ь | Т | Л | Г | Ю | С |
| І | І | Д | И | Ф | Е | Р | Е | Н | Ц | І | Ю | В | А | Н | Н | Я |
| Я | К | У | Т | Е | М | Т | Т | О | Р | Д | Т | Ш | К | А | Л | А |
| Р | О | В | И | Р | А | З | Р | П | О | В | О | Р | О | Т | З | Д |
| Ш | А | Р | В | М | У | П | І | І | Т | А | Н | Г | Е | Н | С | М |
| С | П | А | Д | А | Н | Н | Я | Р | Я | Д | О | К | С | У | М | А |

4. Розв’яжіть кросворд.

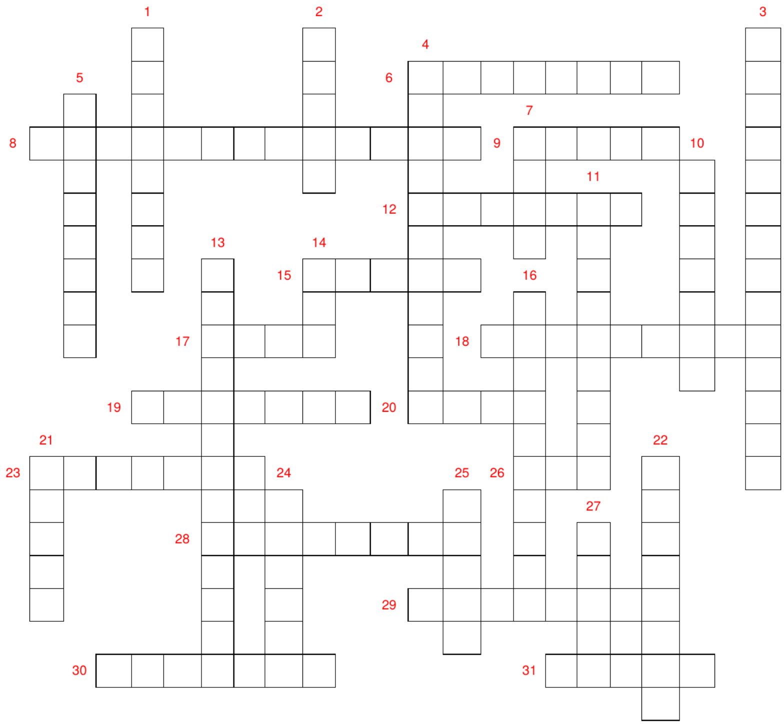


**Питання:**

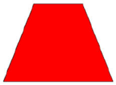
1. Міра множини точок, які займають поверхню або якусь її частину.
2. Розділ математики, у якому вивчають дії над величинами, незалежно від їхніх числових значень.
3. Трикутник, усі сторони якого рівні.
4. Вільно поширюване (GPL) динамічне геометричне середовище, яке дає можливість створювати «живі креслення» для використання в геометрії, алгебрі, планіметрії, зокрема для побудов за допомогою циркуля і лінійки.
5. Одне з чисел, якими визначають положення точки у просторі.
6. Розділ елементарної геометрії.
7. Наука про закони і форми мислення.
8. Старовинна французька міра довжини.
9. Математичний метод, коли на підставі знання про окреме робиться висновок про загальне.
10. Алгебраїчний вираз із двох рівних між собою частин.
11. Значення випадкової величини, що трапляється найчастіше в сукупності спостережень.
12. Сума або різниця двох алгебраїчних виразів.
13. Твердження, правильність якого встановлюється доведенням.
14. Ранжує наукових і науково-педагогічних працівників у визначених галузях знань.
15. Добуток двох однакових множників.
16. Прямий відрізок, проведений між вершиною кута трикутника та серединою протилежної сторони.
17. Ненульовий вектор, який лежить на одній або паралельній прямій до іншого.
18. Тіло, обмежене вісьма трикутниками.
19. Сукупність певних об’єктів довільної природи.
20. Знаходження похідної або диференціала в математичному аналізі.

21. Походить від грецької літери тета, має таке ж саме числове значення – 9 (хоча в абетці традиційно стоїть не на 9-му місці, а в кінці).
22. Наука про властивості просторових фігур.
23. Знак для позначення дії віднімання та від'ємних чисел.
24. Промінь, проведений з вершини кута, який поділяє його навпіл.
25. Виділення і визначення основних, істотних параметрів і розрахунок їхніх чисельних значень у системному аналізі.
26. Інструмент для креслення прямих ліній.
27. Інструмент для викреслювання кривих ліній.
28. За його допомогою будують і вимірюють кути на кресленнях.
29. Сторона трикутника, яка лежить навпроти його прямого кута.
30. Те, що повністю відповідає чому-небудь, може його замінювати або виражати.
31. Ряд чисел, які збільшуються або зменшуються так, що різниця або відношення між кожними двома сусідніми числами зберігає сталу величину.
32. Автор теореми про залежність між коренями квадратного рівняння та його коефіцієнтами.
33. Розділ математики, що вивчає закономірності, які випливають із великої кількості випадкових явищ, процесів.
34. Футляр для зберігання ручок, олівців тощо.
35. Система умовних знаків або сигналів для передавання відомостей.
36. Інструмент зі скрученою стрічкою для вимірювання довжини.
37. Неправильний дріб, у якому чисельник та знаменник рівні.
38. Науково-популярний фізико-математичний журнал для школярів і студентів.
39. Логічне судження з двома виставленими протилежними положеннями, що суперечать одне одному і виключають можливість третього.
40. Сукупність величин, розташованих у певній послідовності.

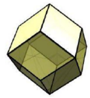
5. Розв'яжіть кросворд.



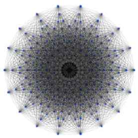
## Завдання до кросворда 5:

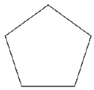

1


2

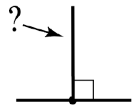

3


4

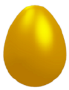

5
*опукла оболонка з 1024 точок*

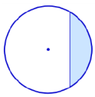

6

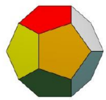

7

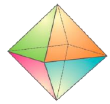


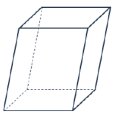
8

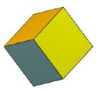

9

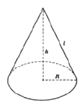

10

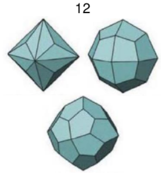

11


12


13


14

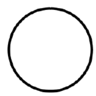

15

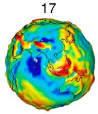

16

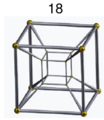

17


18

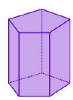

19

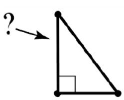

20


21


22
*зображення є проєкцією (перспективою) чотиривимірного куба на тривимірний простір*

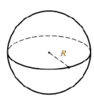

23
*координаційний многогранник*


24

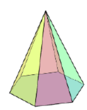


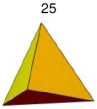
25

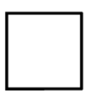

26

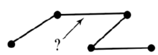


27


28

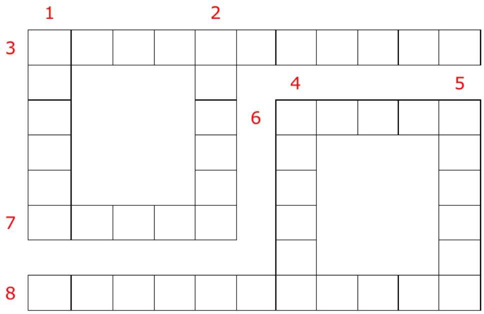

29


30



31

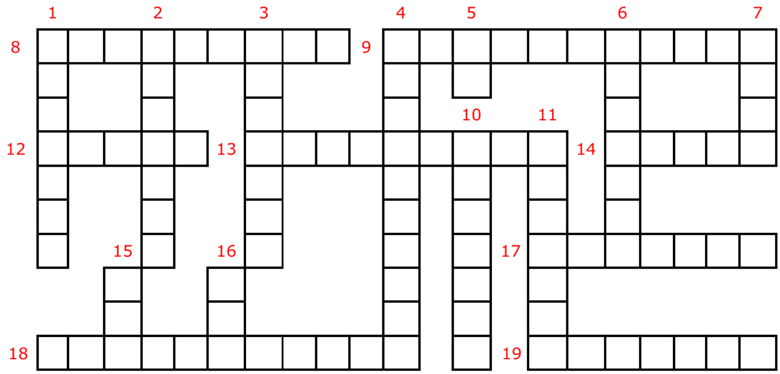
6. Розв'яжіть кросворд.




**Питання:**

1. Предмет, переважно циліндричної форми, що має аверс та реверс. Титул римської богині Юнона.
2. Число, яке пишеться як індекс логарифма.
3. Замкнена зв'язана послідовність відрізків без перетину по внутрішніх точках.
4. Половина діаметра.
5. З нею ділення можливе завжди.
6. Воно з'єднує, розділяє, є відрізком, опорою, стороною та місцем перетину.
7. Ринкова площа (давньогрецькою).
8. Графік функції, що на певному проміжку дорівнює відношенню катета до гіпотенузи.

7. Розв'яжіть кросворд.




**Питання:**

1. Задається базисними векторами, ми живемо в тривимірному.
2. Несхожість, відмінність у чомусь, невідповідність, результат арифметичної дії.
3. Висновок, який можна зробити з основних положень логіки, справедливість якого встановлюється за допомогою міркувань. Твердження, для якого в теорії, що розглядається, існує доведення.
4. Рівність, що дійсна за будь-яких числових значень змінних, які входять до неї.
5. Міра земельної площі.
6. Тіло, обмежене вісьмома трикутниками.
7. Рух транспортного засобу від початкового до кінцевого пункту маршруту.
8. Різниця значень функції у двох точках.
9. Для побудови і виміру кутів на папері.
10. Спосіб задання функції набором значень на скінченній множині аргументів.
11. Координата, яку прийнято називати *x*.
12. Пряма, яка перетинає криву в більше ніж одній точці.

13. Пласка фігура, склеївши яку по сторонах, можна отримати заданий тривимірний об'єкт.
14. Схематичний кресленик, межі ділянок окремих кольорів багатокольорового зображення, загальна характеристика явищ, огляд подій, контурний малюнок.
15. Префікс давньогрецького походження, що вказує на відношення до Землі.
16. Замкнута поверхня, яка визначається як добуток двох кіл.
17. Цей креслярський інструмент буває дерев'яний, з металу або пластику, штанговий, пропорційний, землемірний.
18. Буває спільна, умовна, довірча, геометрична, повна, абсолютна, елементарна, частотна, класична, суб'єктивна. Має амплітуду, густину та міру в одиничному інтервалі. Є відношенням числа сприятливих випадків до числа усіх можливих випадків.
19. Вихідне положення в науці, яке приймається без доказів.

## 3.3.3. Шифри і коди

Тема шифрування викликає захват у учнів. Тому, незважаючи на алгоритмічність пошуку розв'язків, ця тема є частиною посібника з головоломками. Бо сама умова задачі у вигляді шифру викликає здивування та потяг до знаходження ключа. Шифри є допоміжним інструментом у створенні шуканок, для подачі задач на заняттях у гуртках та математичних конкурсах.

*Криптографія* – наука про математичні методи забезпечення конфіденційності, цілісності й автентичності інформації. Вона виникла через потребу людей передавати важливі повідомлення надійним способом. Криптографія займається тим, що перетворює зрозумілу інформацію в незрозумілу і навпаки. Все для того, аби випадкові люди без секретного ключа не змогли прочитати повідомлення. Шифр – це система, яка, використовуючи ключ, допомагає перетворити текст і зберегти секретність переданої інформації. Ключ є важливою складовою будь-якого шифру, він є параметром шифрувального алгоритму, що забезпечує вибір одного конкретного перетворення із можливих для цього алгоритму.

Найпростіші шифри – це *шифри заміни*, коли букви в реченні заміняються на інші букви за заздалегідь визначеним правилом або на каракулі чи позначки, світлові чи звукові сигнали. Прикладом є шифр із відомого твору Артура Конан-Дойля «Чоловічки в танці», а також широковідома абетка Морзе, мова жестів, сигнальна мова моряків. Англомовну «морзянку» та міжнародне прапорне кодування можете знайти в підрозділі 8.4 і використовувати для створення своїх зашифрованих повідомлень!

*Перестановочні* та *підстановочні шифри* – це основні типи класичних шифрів. Перестановочні змінюють порядок літер в повідомленні, а *підстановочні* – замінюють літери (групи літер) іншими літерами (групами літер) за певним правилом. Ми розглянемо обидва, а також поговоримо про механічні інструменти, які вигадали спеціально для шифрування повідомлень.

Мабуть, одним із найдавніших шифрувальних приладів вважається скитала. Її, як відомо, використовували у стародавній Спарті як перестановочний шифр. Цей прилад має вигляд циліндра чи палиці, на яку намотувалася стрічка *(рис. 23)*. Після створення повідомлення її розмотували і передавали інформацію одержувачу.

Ключем до цього пристрою є діаметр циліндра. Тобто у того, хто хоче розшифрувати повідомлення, палиця має бути такою ж самою за діаметром, як і в того, хто робив повідомлення. Ви можете зробити скиталу з олівця або циліндричних фломастерів.


Рис. 23. Скитала

Ще один відомий з історії підстановочний шифр – це *шифр Цезаря*. За його допомогою кожна літера повідомлення замінюється літерою через декілька позицій із абетки. Кажуть, римський імператор Юлій Цезар використовував цей шифр для приватного листування зі зсувом на три позиції, тобто замість літери А підставляв D, замість В – Е тощо.

Для української абетки зсув на три літери можна представити так:

| А | Б | В | Г | Ґ | Д | Е | Є | Ж | З | И | І | Ї | Й | К | Л | М | Н | О | П | Р | С | Т | У | Ф | Х | Ц | Ч | Ш | Щ | Ь | Ю | Я |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Г | Ґ | Д | Е | Є | Ж | З | И | І | Ї | Й | К | Л | М | Н | О | П | Р | С | Т | У | Ф | Х | Ц | Ч | Ш | Щ | Ь | Ю | Я | А | Б | В |

На уроці разом із учнями розшифруйте відомий український вірш.

Криптотекст:

Фгжсндйюрздймнсосшгхй,
Шуцякргждйюрвпйецжцха,
Тоцєгхгукітоцегпймжцха,
Фткдгбхакжцьйжкдьгхг,
Гпгхзукдзьзувхаіжцха.

Природним узагальненням шифрів зсуву є *шифр Віженера*. Це потоковий шифр, заснований також на принципі зсуву, де ключем є слово-блок, що визначає період та відповідні зсуви літер залежно від їхнього порядкового номера в повідомленні. Зламати шифри Цезаря та Віженера нескладно, як і звичайний підстановочний шифр, Відповідь до криптотексту:

Садок вишневий коло хати,
Хрущі над вишнями гудуть,
Плугатарі з плугами йдуть,
Співають ідучи дівчата,
А матері вечерять ждуть

у зв'язку з тим, що частота появи кожної літери в шифротексті збігається з частотою появи у відкритому тексті. Якщо припустити, що частота появи літер у відкритому тексті приблизно відповідає середньостатистичній відносній частоті появи літер в текстах мови, якою написано повідомлення, тоді ключ знаходиться шляхом зіставлення перших декількох літер, що трапляються найчастіше у відкритому та зашифрованому текстах. Тобто за допомогою методу частотного криптоаналізу.

На уроці можна розглянути ще один історичний шифр, запропонований грецьким істориком, полководцем та державним діячем III століття до н. е. Полібієм.

Для цього в кожній мові складається таблиця шифрування із пронумерованими рядками та стовпцями, параметри якої залежать від кількості букв в абетці. Взявши два числа, добуток яких найближчий до кількості букв у мові зверху, отримується потрібна кількість рядків і стовпців. Потім усі букви алфавіту поспіль вписуються в таблицю – по одній у кожну клітину.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | А | Б | В | Г | Ґ | Д |
| 2 | Е | Є | Ж | З | И | І |
| 3 | Ї | Й | К | Л | М | Н |
| 4 | О | П | Р | С | Т | У |
| 5 | Ф | Х | Ц | Ч | Ш | Щ |
| 6 | Ю | Я | Ь | – | – | – |

Для шифрування у табличці знаходимо букву і замінюємо її в тексті на нижню від неї в тому ж стовпці. Якщо буква була в нижньому рядку, то брали верхню з того ж стовпця. Наприклад:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| К | О | Б | З | А | Р |
| Р | Ф | Є | Л | Е | Ц |

Або можна записати «координати» кожної букви в квадраті:

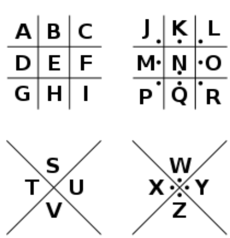
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| К | О | Б | З | А | Р |
| 3 | 1 | 2 | 4 | 1 | 3 |
| 3 | 4 | 1 | 2 | 1 | 4 |

А потім переписати ці пари цифр у іншому порядку (по парах у рядку):

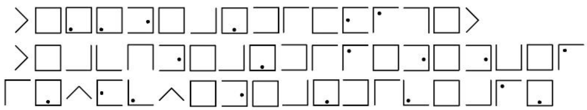
31, 24, 13, 34, 12, 14

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 2 | 1 | 3 | 1 | 1 |
| 1 | 4 | 3 | 4 | 2 | 4 |
| В | П | Ї | Р | Е | О |

І ще один шифр, вартий того, щоб присвятити йому час на уроці, – *pigpen*. Цей шифр іноді ще називають шифром масонів (тому що саме вони його використовували) або шифром «хрестики-нулики». Він є геометричним шифром підстановки, у якому для кожної букви алфавіту визначається місце в одній з чотирьох сіток. Ключем, зокрема, слугуватиме те, яке місце в одній з чотирьох сіток ми визначимо для кожної букви алфавіту. Наприклад:



Розшифруємо цитату Бенджаміна Франкліна:



Відповідь: «Tell me and I forget. Teach me and I remember. Involve me and I learn».

## Завдання для самоконтролю

1. До яких шифрів відноситься шифр «Чоловічки в танці»?
   а) перестановочні;
   б) підстановочні;
   в) заміни;
   г) зсуву.

2. Який перестановочний шифр використовували в стародавній Спарті?
   а) скитала;
   б) шифр масонів;
   в) «Чоловічки в танці»;
   г) енігма.

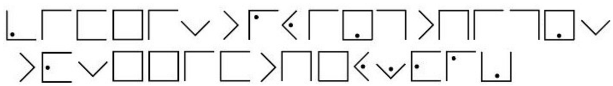
3. Ім’ям якого давньоримського імператора названий один із шифрів зсуву?
   а) Цезаря;
   б) Октавіана Августа;
   в) Тиберія;
   г) Калігули.

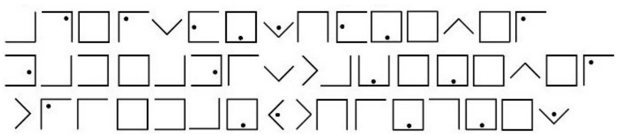
4. Узагальненням яких шифрів є шифр Віженера?
   а) масонів;
   б) зсуву;
   в) заміни;
   г) підстановочних.

5. Використовуючи наведений вище ключ до шифру pigpen, вкажіть, якій літері відповідає позначка 
   а) K;
   б) N;
   в) W;
   г) Q.

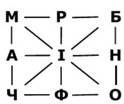
## Завдання до підрозділу

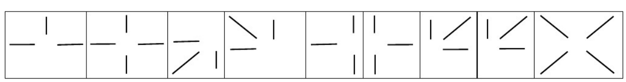
1. Розшифруйте відомі цитати Рея Бредбері та Альберта Айнштайна, користуючись ключем із прикладу.

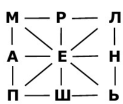
   а) 

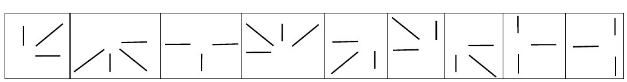
   б) 

2. Розшифруйте прізвища відомих математиків.

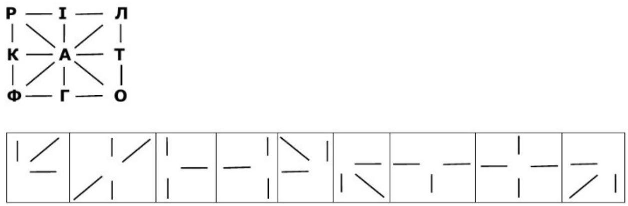
   а) 

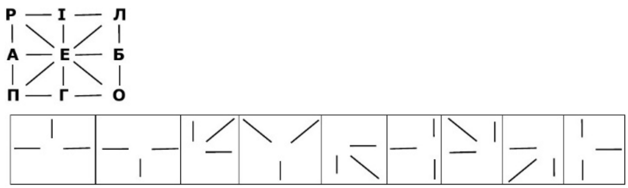



   б) 

3. Розшифруйте математичні поняття.

а) 


б) 


## Корисні відео

«Гра в імітацію» – фільм 2014 року.

## 3.3.4. Головоломки на співбесідах

Логічні головоломки, загадки, контрінтуїтивні гіпотези і дискусійні питання – усе це застосовується під час співбесід кандидатів на посади в IT-індустрії. Така практика мотивується тим, що кожен співробітник компанії має бути високовмотивованим і здатним до чіткого логічного мислення, а також в окремі моменти часу має виступати новатором. Оскільки високотехнологічні галузі значно відрізняються від традиційної економіки (вони менш стабільні, менш прогнозовані, швидко змінюються), то працівники мають ставити під сумнів класичні підходи і знаходити нові. Здатність людини до новаторського мислення перевіряють саме тим, наскільки вдало вона розв'язує головоломки та загадки.

Інтерв'ю з використанням завдань та головоломок на сьогодні проводять і Microsoft, і компанії зі списку Fortune 500 (рейтинг 500 найбільших корпорацій у всьому світі за розміром доходу, що складається та публікується щорічно журналом «Fortune» [1]). А ще нам усім доводиться у житті проходити випробування, які не завжди адекватні та справедливі. Легенди про людей, які доводять свою мужність, відгадуючи загадки, зустрічаються у різних народів світу. Наприклад, історія про Едіпа і Сфінкса. Сфінкс з'їдав мандрівників, які не могли розгадати його загадку: «Яка істота вранці ходить на чотирьох ногах, опівдні – на двох, а ввечері – на трьох?». Едіп відгадав загадку Сфінкса, відповівши: «Людина». Немовля повзає на чотирьох, дорослий ходить на двох ногах, а люди похилого віку при ходьбі спираються на ціпок.

Задачі в посібнику схожі на загадки Сфінкса і мають родзинку. Вони точно не спрямовані на запам'ятовування алгоритмів, математичних таблиць або формул, а є такими, що вимагають особливих нестандартних і креативних підходів.

Розглянемо деякі питання з інтерв'ю для прийому на роботу в таку компанію, як Microsoft.

---

**Задача:**
Чому кришки каналізаційних люків круглі, а не квадратні?

---

На думку інтерв'юєрів, найкращою відповіддю на це запитання є така: квадратна кришка може впасти в люк і травмувати людей, що працюють внизу, або потонути. Так може статися, оскільки діагональ квадрата є більшою за його сторону.

Наступна задача є однією з типових задач на зважування, які детальніше описано в підрозділі 5.4.1.

---

**Задача:**
У вас є 8 більярдних куль. Одна з них важча за інші.
Як за два зважування на звичайних терезах (без гирь) знайти цю кулю?

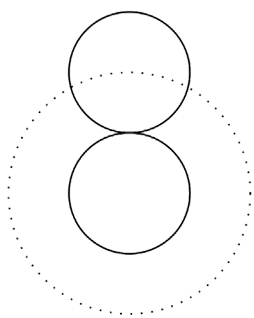
---

Розв'язання задачі наступне. Спочатку покладіть по три кулі на шальки терезів. Якщо вони мають однакову вагу, то шукана куля знаходиться серед інших двох, і, зваживши ці дві кулі, ми одразу знаходимо важчу. Якщо ж після першого зважування одна з трійок куль виявилася важчою за іншу, то шукана куля знаходиться у важчій трійці. Зваживши будь-які дві кулі з цієї трійки, знаходимо важчу.

Наступна задача є гарною ілюстрацією того, як інтуїція заважає побачити правильну відповідь.

---

**Задача:**
Є дві монети однакового радіуса, покладені на стіл так, що дотикаються. Одна монета залишається нерухомою, а друга обертається навколо першої без проковзування, як показано на рисунку (пунктиром позначена траєкторія руху монети).



**Питання:**
Скільки обертів навколо своєї осі зробить друга монета, коли повністю обернеться навколо першої?

---

На перший погляд здається, що друга монета прокрутиться рівно один раз, оскільки з рівності радіусів випливає рівність довжин відповідних кіл. Тому, зробивши оберт навколо першої монети, друга рівно один раз обійде своїм «бортиком» по «бортику» першої.

Але насправді, якщо зафіксувати вектор (позначений червоним на *рис. 24*) і подивитися, скільки разів при обертанні він повернеться в початкове положення, то виявиться, що друга монета прокрутиться 2 рази.

Це називається парадоксом обертання монети. Детальніше про парадокси йтиметься в підрозділі 4.3.1. Задача про обертання монет була використана на американському іспиті SAT (аналог українського ЗНО) 1982 року, і серед тестових варіантів не було правильного, адже інтуїція підвела навіть авторів завдань!

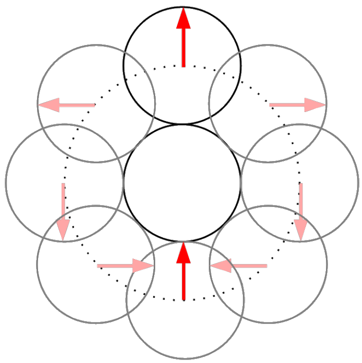


Рис. 24. Якщо простежити за фіксованим вектором на монеті, то видно, що монета прокрутиться 2 рази

## Завдання до підрозділу

1. Скільки на земній кулі є таких місць, де, пройшовши 1 км на південь, потім 1 км на схід, потім 1 км на північ, ви повернетеся в ту ж саму точку, звідки вийшли?

2. У Майка і Тодда на двох 21 долар. У Майка на 20 доларів більше, ніж у Тодда. Скільки грошей у кожного з них? У відповіді не можна використовувати дроби.

3. Доведіть, що якщо в парадоксі обертання монети друга монета матиме радіус $r$, а перша – $kr$, $k$ – натуральне число, то, прокрутившись навколо першої монети, друга монета зробить рівно $k + 1$ оберт.

# 4.

# Головоломки як засіб опанування наукового методу

У Давній Греції були розроблені правила логіки, тому перевагу надавали результатам, отриманим унаслідок міркувань, порівняно зі спостережуваною практикою. Найвідомішим прикладом є твердження про те, що швидконогий Ахілл ніколи не наздожене черепаху (див. підрозділ 4.3.1). Так зародилася софістика.

Французький математик Анрі Пуанкаре писав: «Наука будується з фактів, як будинок будується з цегли; але сума фактів – це не наука, так само, як купа цегли – ще не будинок». Наука – це поєднання наукових фактів, які відображають сучасне розуміння природи, процесу наукового дослідження, наукового методу (вміння будувати з цих цеглин конструкції). Розвиток науки сприяє тому, що наукові факти постійно уточнюються, узагальнюються й переглядаються в межах різних наукових дисциплін, однак у цьому складному процесі є один незмінний компонент – науковий метод.

З метою розвитку навичок застосування наукового методу необхідно навчати учнів логічно та структурно мислити, створювати моделі явищ, формулювати гіпотези, проводити експерименти і дослідження для спростування чи підтвердження попередніх гіпотез. Головоломки – актуальний засіб для формування таких навичок.

Модель наукового методу виглядає як послідовність таких етапів:
1) спостереження і досвід;
2) осмислення проблеми;
3) постановка питань;
4) формування гіпотези;
5) перевірка гіпотези.

# 4.1. Постановка питань

Розв'язування головоломок іноді змушує ризикувати – робити помилки на публіці. Педагогу вкрай важливо створити таке середовище, у якому і учні, і вчитель могли б помилятися, але це не викликало б негативних емоцій.

Будь-яка головоломка передбачає, що учні розв'язують її, висловлюючи власне припущення, що спонукає до більшої активності не лише в освітній діяльності, а й у житті. Може статися так, що активні учні є мовчазними в іншій ситуації. Бо учні дуже чутливі до середовища та контексту. Якщо ніхто не бажає відповідати, можна сказати: «Важко бути першою людиною в класі, яка дала відповідь, тому я збираюся попросити другу людину, щоб вона була першою. Хто хоче відповісти другим?». Іноді такий метод може не лише зняти напруження, але й підсилити бажання брати активну участь в процесі розв'язування головоломки.

Для того, щоб під час розв'язування головоломки учні ставили запитання, вони мають знати, що вчитель очікуватиме від них формулювання запитань і знаходження правильного розв'язання. Якщо їм це не вдасться, тоді варто перейти до іншої задачі, залишивши невирішене на домашнє опрацювання. Для залучення учнів до навчання педагогу не варто заохочувати їх за бездіяльність.

З метою недопущення побоювання учнів дати неправильну відповідь можна застосовувати розв'язування головоломок, що мають жарт у їх змісті, не передбачають єдиної правильної відповіді тощо. Наприклад, друдли (підрозділ 4.1.1), задачі «так – ні» (підрозділ 4.1.2), які не лише активізують зацікавлення, а й навчають формулювати запитання, необхідні для розв'язання головоломок.

## 4.1.1. Друдли

**Друдли** – це нематематичні візуальні головоломки, що не мають єдиного правильного розв'язання.

Назва «droodle» походить від слів: «doodle» – каракуль та «riddle» – загадка. Тобто «абстрактні каракулі». Друдли придумав американський гуморист Роджер Прайс. У 1953 році він видав книгу, у якій їх описав.

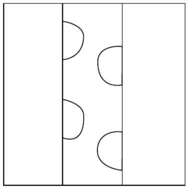
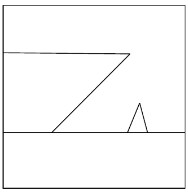
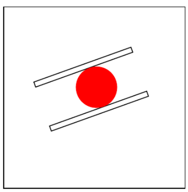
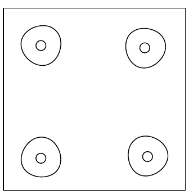
Друдл – це мінімалістична картинка у квадратній рамці. Вона містить абстрактні геометричні фігури з одним або кількома смішними підписами-поясненнями. Один із найвідоміших друдлів – удав, який проковтнув слона, із твору Антуана де Сент-Екзюпері «Маленький принц».

Друдли використовуються для розвитку уяви, навчають бачити незвичайне у звичайному. Це саме ті вправи на розфокусування мислення, про які написано в книзі Барбари Оклі [7]. Мозок має обробляти багато інформації, щоб зіставити образ із тим, що людина бачить на картинці. Такі головоломки бувають смішними й абсурдними. Вони сприяють актуалізації знань, дають можливість змінити вид діяльності, налаштовують учнів на активну роботу, а за необхідності забезпечують створення атмосфери, що знімає напруження. Щоб використовувати друдли, вони мають бути роздруковані заздалегідь чи намальовані на дошці.

Досвід роботи дає можливість стверджувати, що учням більше подобається розгадувати друдли на визначений час. Учні працюють або в командах, або індивідуально. Вони змагаються, хто швидше напише по 4 варіанти опису однієї картинки. Важливо звернути увагу учнів на те, що можна розглядати картинку з різних ракурсів, щоб мати якомога більше варіантів.

Аби ускладнити завдання, зазначте, що перевертати зображення не можна. Так учні вмотивуються до більшої креативності й фантазування. Інший спосіб ускладнити головоломку – запропонувати домалювати геометричні фігури, що перетворять зображення на предмет побуту, якийсь об'єкт тощо.

Ось деякі приклади. *Що це?*

| Картинка | Можливі варіанти |
|---|---|
|  | Ведмідь, що лізе на дерево |
|  | Корабель прибув занадто пізно, щоб рятувати відьму, що тоне |
|  | 1. Сендвіч із помідором<br>2. Вишенька, яку взяли паличками<br>3. У літери Н болить живіт |
|  | Три мушкетери та д’Артаньян |

Більше друдлів можна знайти на таких інтернет-ресурсах:

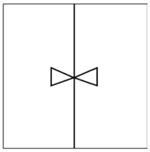
## Завдання
## для самоконтролю

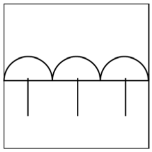
1. Слово «droodle» походить від:
   а) слів «doodle» і «riddle»;
   б) слів «double» і «roodly»;
   в) слів «draw» і «round»;
   г) слів «dould» і «rodley».

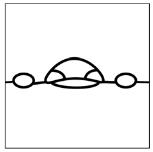
2. Роджер Прайс був:
   а) математиком;
   б) популяризатором науки;
   в) гумористом;
   г) учителем.

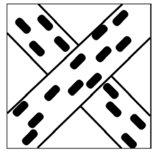
## Завдання до підрозділу

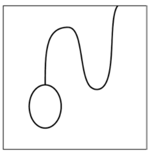
1. Придумати якомога більше пояснень того, що зображено на картинці:

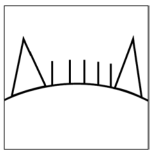

а

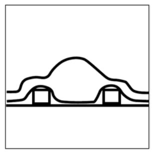

б

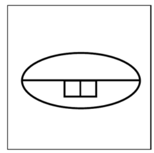

в

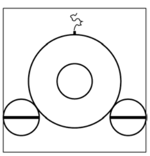

г

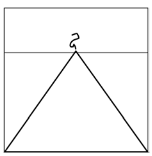

д

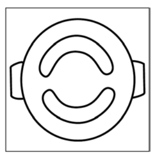

е

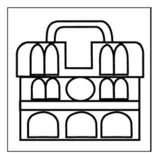

ж

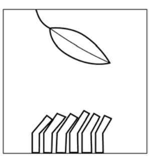

и

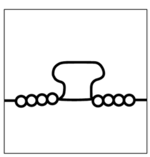

к

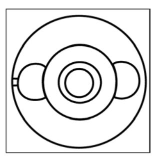

л

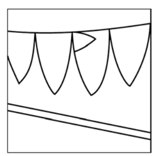

м


н


п


р


с


т

2. Придумати якомога більше власних друдлів.

## 4.1.2. Задачі «так – ні»

Англійська назва задач «так – ні» – «lateral thinking puzzle» – досить влучно відображає її зміст: головоломка для тих, хто вміє нестандартно мислити, щоб її розв'язати. Часто їх використовують як словесні ігри. Але, попри розважальну складову, ці задачі поєднують у собі математичні принципи пошуку правильної відповіді. Суть головоломки така: ведучий коротко повідомляє кінець історії – незвичайну або дивну ситуацію, а всю історію потрібно відгадати за допомогою запитань, що формулюються так, щоб відповіді були «так», «ні» або «не має значення». Важливе правило – якщо на запитання неможливо відповісти однозначно, можна відповідати будь-як, тобто на власний розсуд. Це додаткова мотивація для учасників: формулювати запитання так, щоб на них не можна було відповідати двояко. Відповідь не можна підказувати в жодному разі.

Такі задачі є невід'ємною складовою теорії розв'язання винахідницьких задач[5]. Вони корисні й ефективні для навчання формулювання запитань таким чином, щоб відповідь містила максимальну кількість інформації.

---

**Задача:**
Перед сном жінка сховала туфельку в сейф.

**Питання:**
Навіщо?

---

Розв'язати це завдання означає пояснити ситуацію. Учні ставлять вам запитання. Часто вони намагаються розгадати весь сюжет одразу.

Спершу наведемо нижче приклади «неправильних» запитань, що не дадуть змоги швидко розв'язати головоломку.

1. Жінка живе в гуртожитку і переймається, що туфлю без дозволу візьме її сусідка. А вона не може цього допустити, бо завтра йде на побачення. Правильно?

[5] Теорія розв'язання винахідницьких задач (ТРВЗ) – це методика, розроблена для винахідництва. Вона формалізована у вигляді алгоритму розв'язання винахідницьких задач. Основна ідея ТРВЗ полягає у тому, що всередині технічної системи існують певні протиріччя, які треба усунути. Розроблено низку технік і понять для класифікації винахідницьких задач та їх розв'язання. Слід зазначити, що методики ТРВЗ є контраверсійними та не отримали підтвердження своєї ефективності.

2. Туфлю виготовлено із золота й діамантів і вона коштує більше мільйона доларів. Жінка боїться, що її вкрадуть. Так?

Чому ці запитання невдалі? Учасники намагаються розгадати всю ситуацію одразу, а не розділяти проблему на частини. Наприклад, якщо туфля дійсно золота і коштує понад мільйон доларів, але не має діамантів, вимушена відповідь ведучого «Ні». Так учасник не отримує нової інформації, щоб формулювати запитання, і продовжує вгадувати сюжети далі.

Більш ефективна стратегія – розділити проблему на важливі складові та з'ясовувати деталі поступово. Для цього варто використати математичний алгоритм ділення навпіл, описаний у розділі 5.

Припустімо, ведучий загадав число від 1 до 100, і потрібно його відгадати. Застосовуючи алгоритм ділення навпіл, треба щоразу ділити множину чисел на рівні частини, тоді відповідь відкидає половину чисел, які не підходять. За допомогою цього алгоритму максимум за 7 запитань можна вгадати задумане число.

Аналогічний підхід варто застосувати і в задачі про туфлю. Завдання учнів – не зменшувати кількість гіпотез одна за одною, а одразу відхиляти більшу частину потенційних сценаріїв. Замість гіпотез про гуртожитки чи діаманти краще формулювати запитання так: «*Чи хтось хоче забрати туфлю жінки?*».

Відповідь буде «Ні», бо розгадка цієї ситуації криється зовсім в іншому. Насправді жінка працює стюардесою і перед сном вона кладе свої документи у сейф. Щоб згадати про них вранці, вона залишає в сейфі ще й одну туфлю, бо її вона точно не забуде. Тут важлива логіка постановки запитань. Такі запитання дають одразу змогу відкинути величезну кількість сюжетів-гіпотез. У момент, коли учні відкинуть більшість нереалістичних сценаріїв і з'ясують основну інформацію, розгадка сюжету буде легкою.

Ще одна важлива навичка для тих, хто розв'язує задачу «так – ні», – знаходити й зосереджуватися на дійсно важливій інформації. Потрібно розуміти, чи кожен елемент умови задачі важливий для її розв'язання. Наприклад, чи важлива туфля? Відповідь – так. Чи має значення, що жінка кладе до сейфа саме туфлю? Ні. А чи важлива ціна цього предмета? Ні. Цей предмет має бути одягом? Ні. Тобто важливо для початку виділити ключові елементи задачі і визначити зайве.

З'ясовувати роль деталей можна по черзі. Якщо ви не знаєте, що ще можна запитати про туфлю, рухайтеся далі. Дізнайтеся про жінку. Чи важлива стать персонажа? Ні. А професія? Так. Навчайте учнів користуватися принципом ділення навпіл.

Задачі «так – ні» можна використовувати для того, щоб учити учнів аналізувати, розвивати уважність, правильно формулювати запитання.

## Завдання для самоконтролю

1. Який алгоритм покладено в основу загадок «так – ні»?
   а) алгоритм ділення навпіл;
   б) алгоритм пошуку в ширину;
   в) алгоритм пошуку в глибину;
   г) алгоритм Дейкстри.

2. Визначте, яке з питань буде найбільш вдалим до такої загадки «так – ні»: «Один чоловік живе на дев'ятому поверсі. Але щоразу, коли він повертається додому сам, він доїжджає лише до сьомого поверху і далі йде пішки. Чому?»:
   а) «Чи він втомлюється, коли йде пішки на свій поверх?»;
   б) «Якби він жив на сьомому поверсі, він би доїжджав до п'ятого і потім ішов далі пішки?»;
   в) «Чи має значення, що він повертається додому один?»;
   г) «На дев'ятому поверсі двері застрягають, і чоловік витрачає багато часу на виклик ліфтерів?».

3. Визначте, яке з питань буде найбільш вдалим до такої загадки «так – ні»: «Чоловік ішов по залізничних рейках і раптом побачив, що на нього їде поїзд. Тоді він щодуху побіг назустріч цьому поїзду. Якою була його мета?»:
   а) «Машиністом був його друг, і вони грались, хто швидше?»;
   б) «Чоловік хотів, щоб його збив поїзд?»;
   в) «Це було кіно, у якому був іграшковий поїзд?»;
   г) «Це був конкурс на самогубця?».

## Завдання до підрозділу

1. Один чоловік живе на дев'ятому поверсі. Але щоразу, коли він повертається додому сам, він доїжджає лише до сьомого поверху і далі йде пішки. Чому?

2. У кімнаті були Джон і Білл. Джон вийшов з кімнати. Коли через деякий час він повернувся, у кімнаті було відчинене вікно, на підлозі лежала розбита банка, а біля неї лежав мертвий Білл. Хто вбив Білла?

3. Людина вистрибнула з літака без парашута. Але залишилася живою. Як таке могло статися?

4. Чоловік заходить у бар і просить у бармена склянку води. Бармен різко дістає пістолет і наставляє його на чоловіка. Чоловік дякує барменові та йде. Що відбулося?

5. Посеред галявини були знайдені 5 вуглин, морквина і шарф. Ніхто їх туди не клав, але є логічна причина, як ці речі там опинилися. Яка?

6. Чоловік штовхав свою машину, зупинився біля готелю й зрозумів, що збанкрутів. Чому?

7. Чоловік помер і потрапив до раю. Там були тисячі інших людей. Усі вони були голі і всі вони виглядали так, начебто були 21-річні. Він придивився, чи є хтось, кого він знає, і, побачивши одну пару, одразу зрозумів, що це Адам і Єва. Як він дізнався?

8. Чоловік ішов по залізничних рейках і раптом побачив, що на нього їде поїзд. Тоді він щодуху побіг назустріч цьому поїзду. Яка була його мета?

9. Жінка просить водія відвезти її додому. Усю дорогу вона базікає. Водій каже їй: «Перепрошую, але я глухий і нічого не чую з того, що ви говорите». Жінка замовкла, але потім, коли вийшла з автомобіля, зрозуміла, що водій все ж не був глухим. Як?

# 4.2. Формування гіпотези

*Я знаю те, що я нічого не знаю.*
*Сократ*

**Правило 2** (підрозділ 2.3) розв'язання головоломок містить твердження, що не варто довіряти своїй інтуїції. Лише завдяки математичним обчисленням можна бути впевненим у правильності відповіді. Для демонстрації цієї тези потрібні вагомі аргументи, які б заохотили учнів більш активно проводити аналіз тверджень, шукати нестандартні рішення. Парадокси, у яких необхідний аналіз тверджень, розвивають уяву, демонструють відмінність інтуїції та формальної логіки, важливість чіткої постановки задачі та математичного підходу до розв'язання як головоломок, так і життєвих задач. Те, наскільки мозок може нас дурити, демонструють оптичні ілюзії. Вони є для учнів найкращим наочним прикладом того, що наш попередній набутий досвід і наш зір можуть нас обманювати. Це ще один із аргументів на користь занять головоломками – вони роблять нас більш стійкими до оман.

## 4.2.1. Розпізнавання закономірностей

Однією з важливих навичок у житті є здатність розпізнавати закономірності для передбачення майбутніх подій. Ураховуючи досвід минулого щодо закономірностей, стає легко передбачити майбутнє. Наприклад, послідовність із чисел, фігур, слів або реальних подій. Коли маємо знайти рішення, ми спираємося на дані, що в нас уже є (будуємо модель), для того, щоб зробити висновки й запропонувати найбільш вдалий варіант. Ми шукаємо закономірності всюди. Ось приклад:

*Ящко вриіти доліднесжню Кеджмирксьобго усірвитенету,
нам не валижво, у якмоу подякру йтудь бвуки у солві.
Єидне нажвашилвійе – це щоб пшреа й онсатня леріти
в солві блуи на соївх мяцсіх. Ішні мутожь бтуи в помонву
балдезі, і ви все ондо зожтмее все пичраотти без полебрм.
Це вітьваєубдся чреез те, що лиськдюй мзоок чатиє не
кжону леріту окермо, а все солво як онду стінусть.*

Запропоновані тут задачі є схожими на завдання з тестів IQ. Хоча може здатися, що тести на визначення рівня інтелекту лишилися у XX столітті, проте сьогодні у сфері освіти й бізнесу вони все ще використовуються, лише називаються по-іншому. Найбільш поширений приклад – американський іспит SAT (Scholastic Aptitude Test), який використовується для визначення рівня здібностей до навчання та який ми вже згадували у підрозділі 3.3.4.

У компаніях, для яких важливий рівень кмітливості, креативності, критичного мислення, здатності до аналізу та далекоглядності співробітників (наприклад, IT-компанії, див. підрозділ 3.3.4), на співбесідах кандидату на посаду пропонують розв'язати кілька задач на розпізнавання закономірностей.

Розв'язання таких головоломок сприяє розвитку здібностей до аналізу послідовності чисел, фігур, слів, реальних подій та формуванню вмінь і навичок застосування їх для передбачення й розв'язування різних проблем. Задачі на пошук таких закономірностей тренують уважність та аналітичне мислення.

**Задача:**
Чотиризначним числам ставляться у відповідність цифри за певним правилом. Ось вибірка з такого зіставлення:

$$5711 \to 0$$
$$7411 \to 1$$
$$9037 \to 2$$
$$7289 \to 3$$
$$6666 \to 4$$
$$9986 \to 5$$

**Питання:**
Яка цифра відповідає числу 5670?

Ця задача є набагато легшою, ніж здається. Звісно, прочитавши умову, не зрозуміло, як взагалі підійти до вирішення. З'являються припущення про суму цифр, подільність, іншу систему числення. Але в цій задачі абсолютно не потрібні глибинні знання математики. Достатньо лише поглянути на кількість «дірок» у записі числа.

Наступна нестандартна задача також потребує кмітливості:

**Задача:**
Дано послідовність літер A ? D F G H J K L.

**Питання:**
Яка літера має стояти замість знака питання?

Кількість можливих рішень безмежна, але є просте пояснення, звідки ця послідовність взялася. Подивіться на другий ряд англійської клавіатурної розкладки.

**Важливо:**
На жаль, ми схильні помічати закономірності навіть там, де їх немає. Наприклад, якщо попросити нас продовжити ряд «ОЧЧЧОЧЧЧОЧЧЧ», то ми з великою впевненістю скажемо «О», але продовження ряду «ООЧОЧЧОЧОООЧ» здасться нам складнішим. Проте якщо подати ці послідовності як результати підкидання монети («Ч» – число, «О» – орел), то ймовірності отримати в продовженні «О» або «Ч» однакові в обох випадках.

## Завдання для самоконтролю

1. Якщо ви бачите послідовність літер «АБВАБВАБВАБВ», то яка літера має продовжити ряд?
   а) А;
   б) Б;
   в) В;
   г) визначити неможливо.

2. Яку здатність не тренує навичка розпізнавання закономірностей?
   а) створювати прогнози щодо майбутніх подій;
   б) моделювати процеси;
   в) бути спритним;
   г) бути уважним.

3. Дано послідовність чисел і зазначено, що вона має певну закономірність. Визначте цю закономірність, якщо послідовність така: «2, 4, 6, 8, 10, 12, ...».
   а) парні числа;
   б) попередньо «парні числа», але потребує додаткового дослідження за можливості;
   в) степені двійки;
   г) неможливо визначити.

4. Яке з явищ ілюструє закономірність?
   а) після трикутника іде чотирикутник, після чотирикутника іде п’ятикутник, після п’ятикутника – шестикутник, ...;

б) після яблука з'їм апельсин, після апельсина – ківі, після ківі – банан, …;
в) якщо після ходу суперника на поле е4 я піду с6, то партія може перерости в Каро-Канн;
г) наступною нотою після «до» буде «ре».

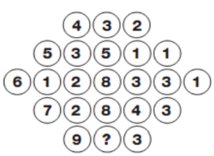
## Завдання до підрозділу

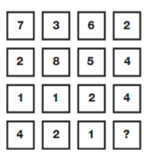
1. Ця послідовність є широко відомою головоломкою під назвою «M-heart-8 sequence» і має цікаве рішення:

Рис. 25. Головоломка «M-heart-8 sequence»

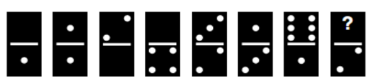
**Питання:** Яка фігура має продовжити ряд?

2. Наступні задачі взято з архіву конкурсів головоломок [28], що проводилися в Русанівському ліцеї міста Києва.
Продовжіть ці логічні послідовності необхідною буквою чи цифрою:
а) А, Б, В, Д, О, …
б) К, К, А, Р, Я, …
в) П, Ц, Л, П, Н, Б, …
г) 1, -1, 1, 0, 1, 0, …
д) J, Q, K, …
е) 2, 9, 3, 1, 8, 4, 3, 6, 5, 7, …
ж) Визначте закономірність і вставте пропущене число.

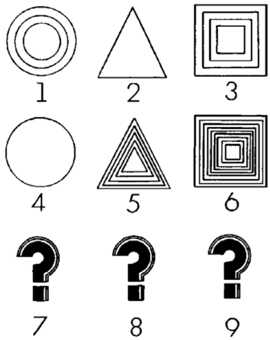






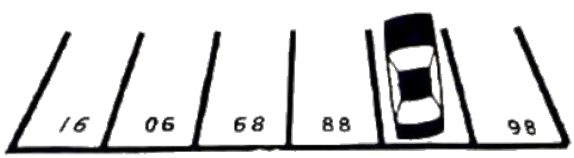
и) На рисунку зображено шість фігур, що складаються з кіл, трикутників і квадратів. Знайдіть закономірність і визначте, яких трьох фігур не вистачає.



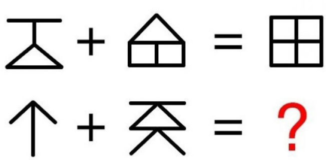

к) Виявіть закономірність і знайдіть значення останнього виразу.

| | | |
|---|---|---|
| 3 + 1 = 12 | 5 + 8 = 1 | 5 + 3 = 35 |
| 2 + 9 = 22 | 8 + 9 = 5 | 8 + 2 = 72 |
| 5 + 3 = 40 | 11 + 7 = 6 | 4 + 6 = 36 |
| 10 + 11 = 9 | 7 + 8 = 98   8 + 8 = 4 | 3 + 7 = 27 |
| 4 + 7 = __ | 6 + 7 = __ | 8 + 5 = __ |

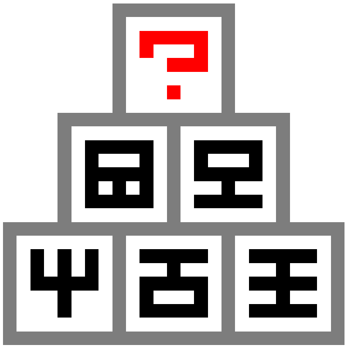
3. Цю головоломку містив тест на вступ до першого класу в Китаї.
**Питання:** Який номер місця для паркування, де стоїть автомобіль?




4. Задача на визначення закономірності.



5. Хто впорався із попереднім завданням, точно знайде ключ і до цього:



## Корисні відео

числові цікаві закономірності

головоломні абстрактні закономірності

# 4.3. Перевірка гіпотези

Перевірка гіпотези потребує використання формальної логіки або обчислення, бо наші відчуття можуть нас обманювати. Для опанування логічних викладок дуже корисно потренуватися знаходити помилки у таких міркуваннях. Отже, пропонуємо обговорити з вихованцями логічні парадокси та навчитися знаходити там помилки.

## 4.3.1. Парадокси як головоломки

**Парадокс** – це твердження, що призводить до суперечності, ігнорує звичайні наукові уявлення; демонструє, як логічні міркування можуть призвести до абсурдних або неприродних наслідків. Найбільші труднощі з парадоксами відбуваються саме через те, що їх формулювання часто не можна однозначно зрозуміти. У **правилі 1** стверджується, що для початку треба зрозуміти зміст головоломки.

Формулювання парадоксів стимулює до нових досліджень, більш глибокого осмислення теорії, її постулатів, що призводить до перегляду теоретичних фактів. Отже, за допомогою парадоксів на занятті можна створювати не лише атмосферу зацікавленості, а й спонукати до дослідження, перевірки й доведення нових теоретичних фактів, стимулювати розумову діяльність учнів.

Парадокси змушують застосовувати філософський аналіз до математичних проблем і математичний аналіз до філософських. З метою залучення учнів до активної дослідницької діяльності педагог може зацікавити емоційним початком заняття. Він пропонує розглянути питання, що не розв’язуються протягом кількох століть.

Парадокси відомі з античних часів. Безліч із них були популярними, але стали розв’язними з розвитком науки останніми століттями. Аналіз різних тверджень формує вміння й навички використання інтуїції; навчає застосовувати математичний підхід, розуміти різницю між інтуїцією та формальною логікою.

### Апорії Зенона

*Зенон Елейський* – давньогрецький філософ елейської школи, автор слів «парадокс» і «апорія», «безвихідне становище». Він був учнем Парменіда та став дуже відомий своїми апоріями. Зенон намагався довести розбіжності концепцій руху, простору і множини. Наукові дискусії, спричинені цими парадоксальними міркуваннями, істотно поглибили розуміння таких фундаментальних тем, як роль дискретного і неперервного у природі, адекватність фізичного руху та його математичної моделі тощо. Ці дискусії тривають і досі.

До нашого часу дійшло дев'ять апорій, із яких ще в давнину найбільш популярними стали лише чотири, що стосуються руху.

---

Нехай певний об'єкт хоче рушити з місця й пройти відстань $a$. Для того, щоб це зробити, він має для початку пройти відстань $a/2$. Для того, щоб це зробити, він має пройти відстань $a/4$. Тобто він щоразу має пройти половину тієї відстані, яку має пройти, половину половини, половину половини половини і так до нескінченності. Отже, він взагалі не може почати свій рух.

---

### Дихотомія

Інший варіант цього ж самого явища такий: нехай певний об'єкт хоче пройти відстань 1. Для цього він за скінченний час проходить половину шляху, потім за скінченний час половину половини шляху (тепер знаходиться на $3/4$), потім половину половини половини шляху і так до нескінченності. Отже, він ніколи не прийде в точку призначення.

Організуйте обговорення дихотомії. Запитайте, скільки часу потрібно об'єкту для проходження відстані 1 км. Дізнайтеся в учнів, чому, на їхню думку, така нескінченна сума скінчених проміжків часу має бути скінченною. Потім обґрунтуйте правильну відповідь математично, надавши геометричну ілюстрацію *(рис. 26)*.

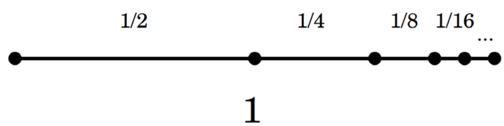



Рис. 26. Ділення відрізка навпіл

## Ахілл і черепаха

Нехай Ахілл змагається з черепахою, швидкість якої значно менша за швидкість Ахілла *(рис. 27)*. Ахілл починає біг із точки $A$, а черепаха трохи попереду нього, з точки $B$. Поки Ахілл добіжить від $A$ до $B$, черепаха проповзе від $B$ до $C$. Поки Ахілл добіжить від $B$ до $C$, черепаха проповзе від $C$ до $D$, так само і з іншими точками. Отже, Ахілл ніколи не зможе наздогнати черепаху.

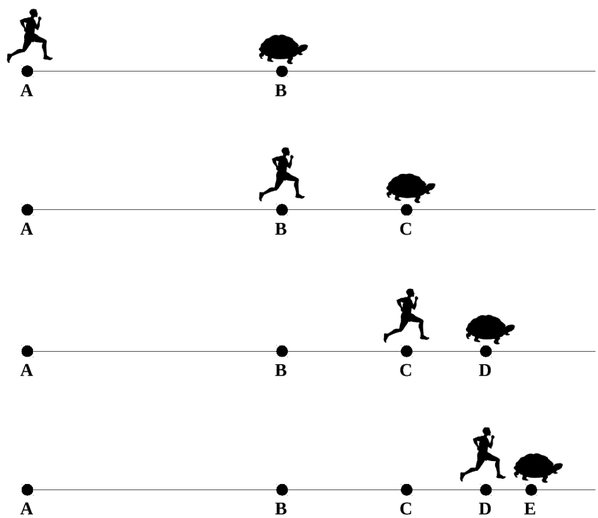


Рис. 27. Ілюстрація парадокса «Ахілл і черепаха»

Суперечності в цих двох апоріях виникають із припущення, що час і простір можна ділити нескінченно. Насправді, як би там не було, тут виникає нескінченна спадна геометрична прогресія, а сума нескінченної спадної геометричної прогресії є скінченним числом.

### Стадіон

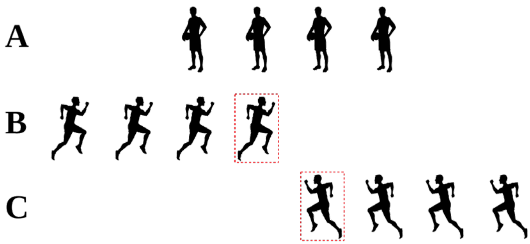


Рис. 28. Ілюстрація парадокса «Стадіон»

Цей парадокс схожий на попередні два. Нехай домашнім завданням буде знайти в інтернеті опис і візуалізацію цієї апорії, щоб потім висловити свою думку про такі поняття, як «швидкість» і «відстань».

Стадіоном повз групу однакових тіл $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ рухаються в протилежні сторони з однаковими швидкостями ще дві такі самі групи – $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$ і $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$ *(рис. 28)*. Оскільки вони рухаються з однаковими швидкостями, то за однаковий час пройдуть однакову відстань. Якщо за певний час перше з тіл $B$ пройде повз усіх $C$, то за цей самий час перше з тіл $C$ пройде повз половину тіл $A$, а значить, воно пройде лише половину тієї відстані, яку пройшло тіло $B$, а значить, унаслідок того, що $B$ і $C$ рухаються з однаковими швидкостями, воно пройшло і половину того часу, за який тіло $B$ пройшло всі тіла $C$. З іншого боку, за один і той самий час перше з тіл $C$ пройде повз усі $B$, а перше з $B$ пройде лише половину тіл $A$, тобто у два рази меншу відстань, витративши удвічі менше часу, ніж тіло $C$, яке пройшло повз усі тіла $B$. Отже, один і той самий час і вдвічі довший, і вдвічі коротший за самого себе.

Розгадка полягає в тому, що відносна швидкість об’єктів, які рухаються один назустріч одному, дорівнює сумі їхніх швидкостей. Не дивно, що $B$ і $C$ пройдуть одне повз іншого вдвічі швидше, ніж повз $A$.

### Стріла

Стріла, що летить, є нерухомою в кожен момент часу, отже, вона нерухома завжди.

Оскільки стріла, що летить, у кожен момент часу займає різне положення відносно всього, що її оточує, і, крім того, на неї діють різні фізичні сили, то жодним чином не можна стверджувати, що стріла постійно знаходиться у стані спокою.

### Парадокс Рассела

Цей парадокс посідає важливе місце серед усіх відомих парадоксів, тому вартий детального обговорення. Неформально він називається «парадоксом цирульника» (цю інтерпретацію придумав Рассел) і звучить так:

---

В одному містечку цирульник мусить голити всіх тих і тільки тих чоловіків містечка, хто не голиться сам.
Чи мусить цирульник голити себе?

---

Це яскрава ілюстрація ситуації, коли одночасно мають виконуватися дві протилежні або несумісні події. Як жарт можна сказати, що парадокс перестає бути суперечністю, якщо цирульник – жінка, але тоді втрачається зміст, який намагається донести Рассел.

Наведемо ще кілька інтерпретацій парадокса Рассела, які також можна обговорити:

- В одній країні вийшов указ: «Мери всіх міст мають жити не в своєму місті, а в спеціальному Місті мерів». Де повинен жити мер Міста мерів?

- Бібліотека вирішила скласти бібліографічний каталог, до якого входили б усі ті бібліографічні каталоги, що не містять посилань на самих себе. Чи буде такий каталог включати посилання на себе?

- Називатимемо прикметник рефлексивним, якщо цей прикметник має ту властивість, яку визначає. Наприклад, прикметники «український», «багатоскладовий» – мають властивості, які вони визначають (прикметник «український» є українським, а прикметник «багатоскладовий» є багатоскладовим), тому вони є рефлексивними, водночас прикметники «німецький», «односкладовий» — є нерефлексивними. Чи є прикметник «нерефлексивний» рефлексивним?

Хоч які виправдання ми знаходили б тій чи іншій відповіді, виникатиме протиріччя. Щодо останнього парадокса, то не можна відсторонитися від відповіді, сказавши, що прикметника «нерефлексивний» не існує (як у випадку з цирульником: ми стверджуємо, що не існує такого цирульника). Адже ми придумали таке слово і тепер маємо дати відповідь. Парадокс виникає саме через некоректне означення цього прикметника, що створює хибну рекурсію.

Обговоріть інші можливі інтерпретації цього парадокса. Запропонуйте учням висловити свої ідеї. Про можливі варіанти парадокса Рассела в житті йдеться в розділі з відповідями до вправ.

### Парадокс Тесея

Що є справжнє, а що – підробка? Над цим питанням міркували древні римляни. Воно дійшло до нас у вигляді наступного парадокса.

---

Грецький герой Тесей прибув до берегів острова Крит і переміг мінотавра. Коли повернувся до Афін, місцеві жителі вирішили зберегти його корабель як пам’ятник у порту. Але згодом корабель почав гнити, і в ньому одна за одною почали замінювати дошки. Згодом у кораблі не залишилося жодної з початкових дошок.

**Питання**: чи є цей корабель кораблем Тесея? Якщо ні, то коли він перестав бути собою? Коли замінили першу дошку? Чи останню? Чи половину дошок? Становище стає ще більш парадоксальним, якщо взяти всі старі дошки й зібрати з них такий самий корабель. Який із двох кораблів є кораблем Тесея? Чи вони обидва є справжніми? Тоді у світі є два ідентичні в усьому предмети? Парадокс.

---

Річ у тім, що ми самі (чи власник того, про що парадокс) вирішуємо, коли що вважати чим. Наприклад, клітини людського тіла постійно регенерують, то чи означає це, що ми щодня стаємо іншою людиною? Чи означає це те, що наше дитинство не є нашим? Буває таке і з музичними колективами: початковий склад потроху замінюється, аж доки від гурта не залишиться нічого, окрім пісень. Якщо вважати справжнім лише об'єкт, у якому нічого не замінено, наприклад, корабель Тесея після заміни однієї дошки стає іншим, то й людину вже за хвилину не можна вважати тією ж самою. Якщо дозволити заміну дошок корабля Тесея, то виникає питання безмежного клонування корабля Тесея, що також не є припустимим. Те ж саме стосується людей, гуртів тощо.

Для юристів цей парадокс вирішили древні римляни, коли винайшли *юридичну особу*. Уявіть, римські легіони завойовували одні території за іншими і дійшли до Британії. Однак у битвах бійці гинули, і на їхні місця приходили інші. Отже, особовий склад легіонів постійно змінювався, але вони вважалися тими самими легіонами – юридичними особами, що зберігають свою силу, навіть коли їх склад змінюється. Невдовзі цей підхід поширився на весь світ: люди домовилися вважати речі справжніми, якщо в них зберігається початкова суть чи ідея.

Поясніть учням, що парадокс виникає через відсутність чіткого означення ідентичності, «того самого» предмета. Акцентуйте увагу, що точність означення є дуже важливою і в повсякденному житті, і в математиці зокрема. Розгляньте задачі, де визначення відіграє ключову роль. Наприклад, що можна сказати про паралелограм, якщо в нього один кут дорівнює 90°? А якщо замінити слово «паралелограм» на «ромб»? Пригадайте, що таке квадратне рівняння. Чому воно квадратне? Точно не тому, що його члени розташовані на сторонах чи в кутах квадрата.

## Завдання для самоконтролю

1. Яке визначення відповідає поняттю «парадокс»?
   а) явище, що водночас може і відбутись, і не відбутись;
   б) теоретичний факт, що стимулює розумову діяльність учнів;
   в) аналіз нерозв'язних тверджень;
   г) твердження, що поєднує в собі дві суперечливі тези, але виглядає правдоподібно.

2. Коли з'явилися парадокси?
   а) в античності;
   б) 1000 років тому;
   в) неможливо визначити.

3. Яке зі слів вибивається з логічної сукупності?
   а) парадокс;
   б) дискусія;
   в) апорія;
   г) софізм.

## Завдання до підрозділу

1. Наведіть приклади парадокса Рассела в повсякденному житті.
2. Наведіть приклади парадокса Тесея в повсякденному житті.

# 4.3.2. Ілюзії та неможливі фігури

*Малювати – значить обманювати.*
*Мауріц Корнеліс Ешер*

Цікавим об'єктом є оптичні ілюзії. Це один із видів «обману» мозку. Око бачить зображення якогось об'єкта, проте мозок сприймає його по-своєму. Тому оптичні ілюзії є яскравим прикладом того, що треба користуватися **правилом 2** і не довіряти інтуїції, адже ілюзії працюють саме на інтуїтивне сприйняття та перше враження. Необхідно пояснити учням, що попередній набутий досвід і мозок можуть нас обманювати. Запитайте в учнів, який відрізок довший $AB$ чи $BC$ у паралелограмі Зандера *(рис. 29).*

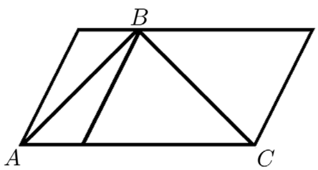



Рис. 29. Ілюзія.
Паралелограм Зандера

**Відповідь:** вони рівні, але за рахунок перенесення властивостей цілого на його частини нам здається, що $BC$ більший за $AB$.

Ілюзія виникає, якщо точка на верхній стороні паралелограма, у якій сходяться діагоналі, розташована якраз над серединою нижньої сторони паралелограма. Численні експерименти, пророблені з цією фігурою, показують, що ілюзія посилюється, коли в фігурі прокреслені не всі лінії, і спостерігачеві доводиться ці діагоналі уявляти.

Або зверніть увагу на ілюзію сприйняття, яка пов'язана з переоцінкою вертикальних ліній *(рис. 30).*

Лінії на малюнку рівні, але вертикальна лінія сприймається як більш довга. Якщо ж дивитися на малюнок одним оком, то ефект трохи зменшується.

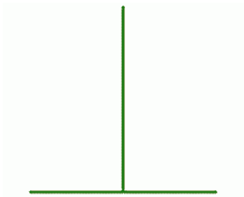


Рис. 30. Вертикальна лінія
здається довшою
за горизонтальну

Неможливі фігури – це один із видів оптичних ілюзій. На відміну від попередніх прикладів, що ґрунтуються на властивостях зору та нашого сприйняття, ці види ілюзій стосуються сприйняття простору та нашої логіки. Такі фігури називають неможливими, тому що в реальному світі вони не можуть існувати. Неможливу фігуру можна намалювати на папері. Кожна її деталь виглядатиме, як реальний об'єкт, але уважно дослідивши рисунок, стає очевидним, що його елементи з'єднані суперечливо.

Ось приклади найвідоміших неможливих фігур *(рис. 31)*: неможливий трикутник Пенроуза, неможливий тризуб, нескінченні сходи, неможливий куб.

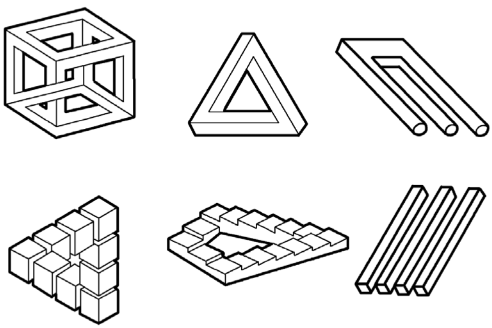
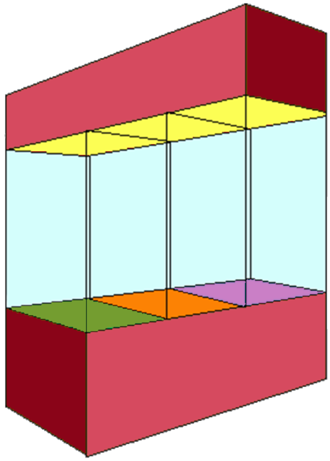


Рис. 31. Неможливі фігури

Запропонуйте учням закрити на малюнку один із кутів неможливого трикутника. Подивіться, як поєднані бруски у двох інших кутах. Бачимо, що вони поєднані під прямим кутом. У цьому немає нічого незвичайного, але, якщо ми подивимось та проаналізуємо весь трикутник, то зрозуміємо, що в реальності так бруски поєднати не можна. Якщо ми спробуємо з'єднати ці бруски, то з цього нічого не вийде.

Неможливі фігури відомі людству вже давно. Вони зображуються на витворах мистецтва. Прикладом є картина нідерландського художника Мауріца Корнеліса Ешера «Бельведер» *(рис. 32 а)*. Секрет картини «Бельведер» полягає у тому, що в ній комбінується дві перспективи з різних боків картини, що неможливо у реальному світі. Схематичне пояснення ілюзії зображено на *рис. 32 б*.

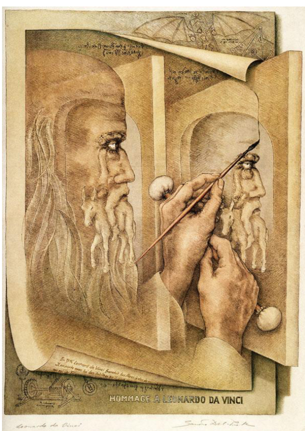
а
М. Ешер. «Бельведер»



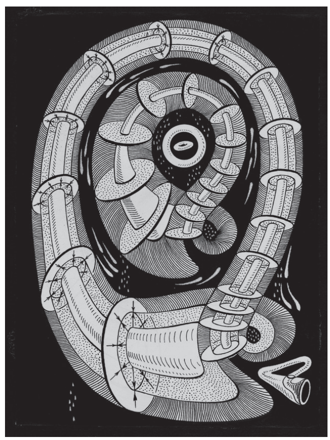
б
Пояснення ілюзії

Рис. 32. Картина «Бельведер» та її схема

Інші неймовірні картини цього митця ви можете знайти в інтернеті. Роботи не менш талановитих майстрів Сандро дель Пре та Анатолія Фоменка зображено на *рис. 33*.




а
Сандро дель Пре.
«Hommage a Leonardo da Vinci»



б
А. Фоменко. Ілюстрація до книги
«Курс гомотопической топологии»

Рис. 33. Картини з неможливими елементами

Запропонуйте учням зробити ілюзію «Неможливий трикутник» власноруч із паперу. Для цього роздрукуйте схему з додаткових матеріалів (підрозділ 8.3). Якщо у вас є 3D-принтер, роздрукуйте її за моделлю:

## Завдання для самоконтролю

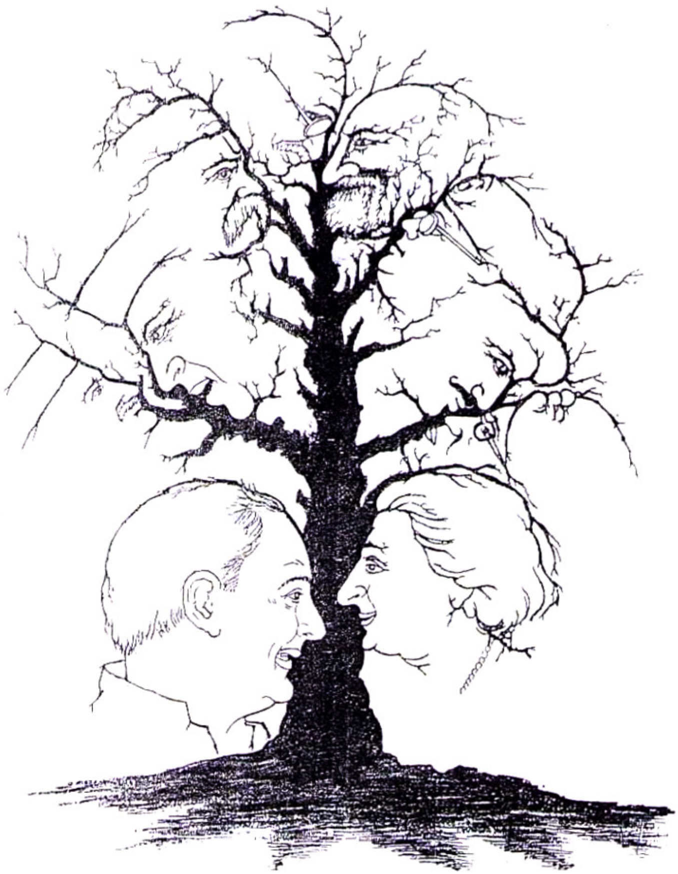
1. Що таке *оптичний обман*?
   а) спотворення геометричної фігури;
   б) помилка зорового сприйняття дійсності;
   в) зміна кута зору;
   г) різниця в кольорі деталей зображення.

2. Що є причиною хибного відчуття розмірів діагоналей у паралелограмі Зандера?
   а) відносне сприйняття;
   б) поєднання в одному зображенні перспектив із різних точок;
   в) спотворення геометричної фігури;
   г) різниця в кольорі деталей зображення.

3. Що є причиною неможливості фігури на картині «Бельведер»?
   а) помилка зорового сприйняття;
   б) різниця в кольорі деталей зображення;
   в) поєднання в одному зображенні перспектив із різних точок;
   г) спотворення геометричної фігури.

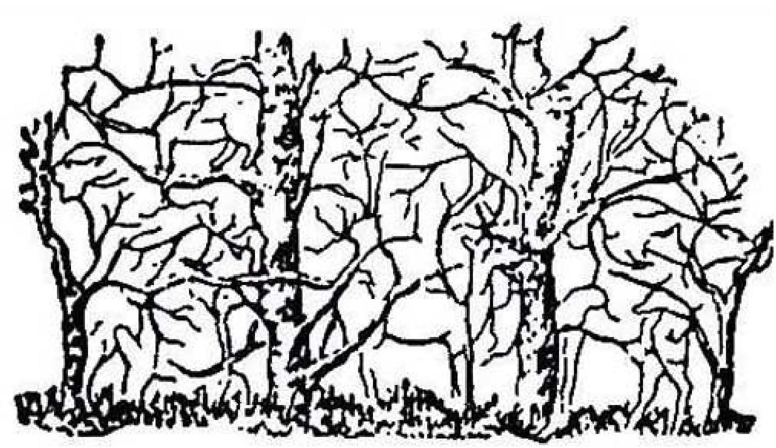
## Завдання до підрозділу

Скільки облич ви бачите тут?



NATIONAL LEADERS TREE

2. Порахуйте тварин на цьому малюнку:



**Корисні відео**

# 5.

# Цікава математика: головоломки і задачі

# 5.1. Методи та підходи до розв'язання цікавих задач

*Предмет математики настільки серйозний, не треба втрачати можливості зробити його трохи цікавим.*
*Б. Паскаль*

Одна із цілей математичних головоломок – зацікавити вивченням математики. Багато математичних головоломок надруковані в таких книгах, як «Математичні ігри» Мартіна Гарднера, «Математична кмітливість» Бориса Кордемського.

Математичні головоломки – задачі цікавої математики з елементами гри, які вимагають не лише кмітливості, нестандартних кроків, а й певних математичних знань. Більшість головоломок так чи інакше мають математичний зміст. Наприклад, у головоломці *пентаміно* важлива форма й розташування фігур, а в *судоку* – властивості графів і магічних квадратів. Для їх розв'язання використовуються математичні методи перебору, ділення навпіл, розфарбування, вузьких місць, рішення задачі з кінця, виключення, а також перехід до доповнення, зв'язність множини, застосування відповідної математичної теорії (елементи теорії графів, топології, алгебри логіки), принцип крайнього елемента, принцип Діріхле. Іноді для впорядкування даних використовується метод таблиць.

1. *Метод перебору.* Найбільш простий і дієвий метод для пошуку відповіді. З набору ймовірних правильних відповідей встановлюється правильна шляхом перевірки логічної умови для кожного з варіантів.
2. *Метод ділення навпіл.* Математичний підхід для швидкого пошуку правильного рішення. Застосовується в задачах, що передбачають логічну умову, за якою є сенс розділити сукупність відомих даних на дві частини: які задовольняють умову, і які – ні. Іноді більш ефективним є метод ділення не на 2, а на 3 і більше частин (див. підрозділ 5.4).

3. *Розфарбування*. Математичний метод знаходження інваріантів (величин, які не змінюються) і перевірки гіпотез. Застосовується в задачах про покриття та пакування, полягає у знаходженні влучного розфарбування для перевірки логічної умови.
4. *Метод вузьких місць*. Узагальнений принцип крайнього елемента. Застосовується в задачах, у яких є «вузькі місця» – частини задачі, що обмежують пошук правильної відповіді.
5. *Рішення задачі з кінця*. Алгоритм рішення – здійснення зворотного розрахунку для обчислення будь-яких невідомих даних на основі відомого кінцевого результату.
6. *Метод виключення*. Заснований на перевірці логічних умов і відкиданні відомих варіантів, які не задовольняють умови. Застосовується для задач, у яких даються варіанти відповідей і ставиться питання про існування та єдиність правильної серед них.
7. *Перехід до доповнення*. Розв'язання задачі полягає у визначенні властивостей чи значень оберненої задачі, що забезпечить розв'язання початкової.
8. *Зв'язність множини*. Математичне поняття зв'язності вказує напрям розв'язання завдяки визначенню можливості досягнення правильної відповіді.
9. *Метод таблиць*. Упорядкування даних на етапі первинного опису й аналізу задачі. Він має універсальне значення і використовується у різних сферах діяльності.
10. *Принцип крайнього елемента*. Застосовується для доведення тверджень, для яких доцільно розглянути найбільший чи найменший (крайній) об'єкт. Дуже часто такими об'єктами можуть бути числа або відстані.
11. *Принцип Діріхле* можна проілюструвати таким твердженням: якщо в $n$ клітках розсадити $n+1$ кроликів, то знайдеться клітка, у якій знаходиться принаймні два кролики.

# 5.2. Популярні задачі цікавої математики

Для зацікавлення учнів вивченням математики, формування в них логічного, комбінаторного, евристичного мислення, розвитку вмінь і навичок узагальнювати, виявляти закономірності й відмінності, шукати нестандартні підходи використовуються задачі, зміст яких є цікавим і незвичайним.

---

**Задача про рудого сина**

Діалог двох математиків.
– Я чув, що в тебе є діти.
– Так, троє синів.
– І скільки їм років?
– Ну... У сумі – тринадцять.
– Ну добре. Що ще можеш сказати?
– Якщо перемножити їх вік, вийде стільки ж, скільки вікон у тому будинку.
Математик рахує вікна і підбирає варіанти.
– Але цього недостатньо для відповіді!
– Можу додати, що мій старший син рудий.
– Ну, тепер зовсім інша справа!

**Питання:**
Скільки років синам математика?

---

Розглянемо приклади математичних задач, використовуючи три правила розв'язання головоломок (підрозділ 2.3), які допоможуть досягти розв'язку.

За **правилом 1** необхідно зрозуміти головоломку і всі терміни, які вона містить. Головоломка полягає в тому, щоб із загадкових реплік двох математиків визначити конкретні числа. Математики знаходяться в місці, у яке не можна зазирнути і порахувати вікна будинку, тож треба діяти інакше. **Правило 2** у цій задачі не зовсім актуальне, оскільки для інтуїтивного розв'язування занадто мало інформації. Тому скористаємося **правилом 3**, побудуємо математичну модель.

Позначимо вік синів за $x, y, z$. Без втрати загальності, припустимо, $x \leq y \leq z$. Також із умови задачі відомо, що $x + y + z = 13$, тому кожна зі змінних не перевищує 13. Щоб зрозуміти подальший діалог, перемножимо всі комбінації чисел, сума яких дорівнює тринадцять, і подивимося, які припущення чи висновки можна із цього зробити.

$1 \times 1 \times 11 = 11$
$1 \times 2 \times 10 = 20$
$1 \times 3 \times 9 = 27$
$1 \times 4 \times 8 = 32$
$1 \times 5 \times 7 = 35$
$1 \times 6 \times 6 = 36$
$1 \times 2 \times 9 = 36$
$2 \times 3 \times 8 = 48$
$2 \times 4 \times 7 = 56$
$2 \times 5 \times 6 = 60$
$3 \times 3 \times 7 = 63$
$3 \times 4 \times 6 = 72$
$5 \times 5 \times 5 = 75$
$4 \times 4 \times 5 = 80$

Якби математик, порахувавши вікна будинку, сказав, що знає вік кожного сина його друга, то головоломка не мала б розв'язку. Але оскільки він стверджує, що, знаючи добуток шуканих трьох чисел, він не може дати однозначної відповіді, то це означає, що цей добуток повторюється у складеній таблиці. Бачимо, що це $1 \times 6 \times 6 = 36$ і $2 \times 2 \times 9 = 36$. Тому остання репліка про старшого сина дає єдину правильну відповідь: це 2, 2 і 9. Використані для розв'язання цієї задачі математичні методи – це метод перебору і метод виключення.

Розглянемо наступну задачу. Для її розв'язання застосовується інший математичний метод.

---

**Задача:**

В озері ростуть лотоси. За добу кожен лотос ділиться навпіл, тобто замість одного лотоса з'являються два. Через добу кожен ще раз ділиться навпіл і так далі. Відомо, що через 30 діб озеро повністю вкрилося лотосами.

**Питання:**

Через який час озеро було заповнено наполовину?

---

Перевіримо **правило 1**. Усі терміни задачі є зрозумілими. За **правилом 2**, інтуїція може підказати нам швидке «інерційне» неправильне рішення – 15 діб, що може випливати з неправильного розуміння швидкості заростання озера лотосами. Вона не є лінійною відносно площі, яку займають лотоси. Як стверджується у **правилі 2**, розрахунки набагато надійніші. Тому за **правилом 3** створюємо математичну модель задачі.

1 день – 1 лотос
2 день – 2 лотоси
3 день – 4 лотоси
4 день – 8 лотосів тощо.

Тобто бачимо, що збільшення кількості лотосів на поверхні ставка відбувається за показниковим законом (а не за лінійним): $2^{n-1}$.

Застосуємо метод розв'язання задачі з кінця. Маємо за умовою: на 30 день стало $2^{29}$ лотосів, і вони вкрили все озеро, а на 29 день лотосів було $2^{28} = 2^{29} : 2$. Тобто саме половина озера.

Отже, відповідь: на 29 день.

Наступна задача є трохи більш заплутаною.

---

**Задача:**
Данило не встиг потрапити до ліфта на першому поверсі, тому побіг сходами. До третього поверху він добігає за 1 хвилину.

**Питання:**
Скільки хвилин потрібно Данилу, щоб дістатися на дев'ятий поверх, якщо він бігтиме з однаковою швидкістю?

---

За **правилом 2** інтуїція знову підказує неправильне рішення: якщо на третій поверх за 1 хвилину, то на дев'ятий поверх, відповідно, за 3 хвилини. Виявляється, проблема з дотриманням **правила 1** – коректністю розуміння того, як визначити шлях, який Данило подолає до третього поверху. Отже, треба не покладатися на інтуїцію, а за **правилом 3** зробити модель задачі й побачити, що з першого до третього поверху – два сходові прольоти, а не три. А з першого до дев'ятого поверху – 8 прольотів. Тому розрахунки дадуть відповідь $8 : 2 = 4$ хвилини.

Наступна задача дає вам можливість побачити, чи учні розуміють і вміють використовувати відсотки.

**Задача:**
Екологи висловили протест проти занадто великого обсягу лісозаготівлі. Директор лісового господарства заспокоїв їх так: «У лісі 99% сосен. Будуть вирубувати тільки сосни, і після вирубування їх відсоток майже не зміниться – сосен буде 98%».

**Питання:**
Яка частина лісу відведена під вирубку?

**Правило 2** працює і тут. Здається, що відповідь – 1%. Але якщо створити математичну модель (**правило 3**) і позначити кількість усіх дерев до вирубки за $x$, то дерева, які не є соснами, становлять $100\% - 99\% = 1\%$, тобто $0.01x$. Нехай $y$ – кількість дерев після вирубки. Тоді кількість дерев, які не є соснами – 2%, тобто $0.02y$. За умовою вирубують тільки сосни, а кількість інших дерев залишається однаковою, тому $0.01x = 0.02\,y$; $y = 0.5x$, тобто загальне число дерев планують зменшити у два рази.

А тепер перейдемо до задачі, що має незвичну умову, яка видається недостатньою для розв'язання. Ця задача 11 квітня 2015 року була озвучена телеведучим із Сінгапура. Вона зі шкільної олімпіади SASMO – Singapore and Asean Schools Math Olympiads.

**Задача «День народження Шеріл»:**
Альберт і Бернард нещодавно подружилися із Шеріл. Вони хочуть дізнатися, коли в неї день народження. Шеріл дала їм список з десяти можливих дат: 15 травня, 16 травня, 19 травня, 17 червня, 18 червня, 14 липня, 16 липня, 14 серпня, 15 серпня, 17 серпня.
Потім Шеріл назвала Альберту тільки місяць, а Бернарду тільки число дня свого народження.
**Альберт:** «Я не знаю, коли день народження в Шеріл, але я знаю, що і Бернард цього не знає».
**Бернард:** «Спочатку я не знав, коли день народження Шеріл, але тепер я його знаю».
**Альберт:** «Тоді я теж знаю, коли в Шеріл день народження.

**Питання:**
Так коли ж день народження в Шеріл?

За **правилом 1** розв’язання головоломок, умова, терміни й обмеження зрозумілі. За **правилом 2** інтуїція не схиляє до жодної відповіді. Керуючись **правилом 3**, побудуємо математичну модель, використовуючи метод таблиць.

Оскільки задача полягає у визначенні правильної відповіді серед запропонованих, то найбільш правильним математичним методом для її розв’язання є метод виключення. Запишемо відому інформацію в таблицю.

| | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| травень | | × | × | | | × |
| червень | | | | × | × | |
| липень | × | | × | | | |
| серпень | × | × | | × | | |

Першим говорить Альберт, який знає тільки місяць. Він каже: «Я не знаю, коли в Шеріл день народження», тобто знання тільки місяця не дає можливості визначити день народження. Дійсно, у списку дат немає жодного місяця, для якого була би вказана тільки одна дата (для травня і серпня вказано по 3 дати, для червня і липня – по 2). Значить, нам підходять усі варіанти. Позначатимемо такі варіанти хрестиками.

«Але я знаю, що і Бернард цього не знає». Що це означає? Бернард знає тільки число, а Альберт може спиратися на знання про місяць. Він бачить, які числа є для відомого йому місяця. Одне із цих чисел було сказано Бернарду. Говорячи, що Бернард теж не знає дату, Альберт ніби натякає нам на те, що всі числа з відомого йому місяця такі, що є і в інших місяцях. Аналізуючи таблицю, можемо визначити, які місяці підходять під такий опис.

У списку травневих дат є 19-те число, якого немає в інших місяцях, значить, травень не може бути місяцем народження Шеріл. Аналогічно у червні є 18-те число, якого немає в інших місяцях, отже, червень теж не підходить. А ось дати липня і серпня зустрічаються і в інших місцях, значить, поки що ми їх не відкидаємо.

| | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| травень | | | | | | |
| червень | | | | | | |
| липень | × | | × | | | |
| серпень | × | × | | × | | |

Бернард знає число, але не знає місяць. Він каже, що тепер знає дату точно. Це означає, що число, яке він знає, однозначно вказує на місяць, тобто зустрічається лише в липні або лише в серпні. У таблиці число 14 зустрічається в обох місяцях, а решта тільки в одному. Значить, 14 не підходить. Виключаємо його.

| | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| травень | | | | | | |
| червень | | | | | | |
| липень | | | × | | | |
| серпень | | × | | × | | |

«Тепер і я знаю», – каже Альберт. Це означає, що, знаючи місяць, із решти дат він може точно вибрати одну. Тобто у відомому йому місяці залишилася лише одна дата. Під такий опис підходить липень.

Отже, відповідь: день народження Шеріл – 16 липня.

## Завдання для самоконтролю

1. У вольєр посадили двох кроликів. Через тиждень їх стало уже четверо, ще через тиждень – восьмеро: щотижня їх кількість подвоювалася. Через півроку вольєр був повністю зайнятий кроликами. За скільки тижнів кролики займали половину вольєра, якщо в році 52 тижні?
   а) 21;
   б) 25;
   в) 20;
   г) 26.

2. 100 кг грибів вологістю 99% висушили до вологості 98%. Скільки стали важити гриби?
   а) 99 кг;
   б) 98 кг;
   в) 50 кг;
   г) 49 кг.

3. Яким методом розв’язується задача «День народження Шеріл»?
   а) виключення;
   б) поділу навпіл;
   в) від супротивного;
   г) перебору.

## Завдання до підрозділу

1. З’єднайте 9 точок без відриву олівця від паперу чотирма прямими лініями.

2. Побудуйте рівносторонній трикутник із трьох сірників. Побудуйте два рівносторонні трикутники з 5 сірників, чотири рівносторонні трикутники із 6 сірників.

3. У двох гаманцях лежать дві монети, причому в одному гаманці монет удвічі більше, ніж в іншому. Як таке може бути?

4. У ставку плаває гарбуз, 0.2 частина якого знаходиться над водою, а 0.8 – під водою. Під водою його починають їсти риби зі швидкістю 120 грамів за хвилину. Ту частину, що над поверхнею, одночасно з ними починають їсти птахи зі швидкістю 60 грамів за хвилину. Яка частина гарбуза дістанеться рибам, а яка – птахам?

# 5.3. «Лицарі і брехуни»

«Лицарі і брехуни» – тип логічних загадок, які придумав Реймонд Смалліан. У різних варіаціях умови можуть використовуватися слова «аборигени» і «дикуни», «ельфи» і «гноми» тощо. Основна ідея в тому, що одні говорять лише (або частково) правду, а інші – лише (або частково) брехню. Для таких загадок **правила 1**, **2** не є актуальними, бо умова є цілком однозначною, а основи для інтуїтивного розв'язання немає через специфіку логічної постановки питань. Тому маємо скласти перелік висловлювань і за допомогою методу перебору та математичної логіки визначити їх істинність.

Наведемо приклади розв'язування таких задач без математичної формальності.

---

**Задача:**
На острові живуть два племені: лицарі, які завжди говорять правду, і брехуни, які завжди брешуть. Мандрівник найняв острів'янина провідником. Дорогою вони зустріли чоловіка. Мандрівник попросив провідника дізнатися, до якого племені належить ця людина. Провідник повернувся й повідомив, що чоловік назвався лицарем.

**Питання:**
Ким був провідник: лицарем чи брехуном?

---

Як розв'язати таку задачу? Спершу поміркуємо разом. Якщо чоловік, якого зустріли наші герої, – лицар, то він скаже провідникові, що він лицар. Якщо ж він брехун, то він не скаже, що він брехун. Отже, він у будь-якому випадку назве себе лицарем. Оскільки саме це й повідомив мандрівникові провідник, то провідник був лицарем.

Розглянемо іншу задачу, у якій є деякі нюанси щодо того, хто коли говорить правду, а коли бреше.

**Задача:**
У Лісогорії живуть лише ельфи і гноми. Гноми завжди брешуть, коли говорять про своє золото, а в інших випадках говорять правду. Ельфи брешуть, коли говорять про гномів, а в інших випадках говорять правду. Одного разу два лісогорці сказали:
А: Усе моє золото я вкрав у дракона.
Б: Ти брешеш.

**Питання:**
Визначте, ким були співрозмовники А і Б?

Припустімо, що А – ельф. Тоді він сказав правду, а Б збрехав. Але ні гноми, ні ельфи не брешуть, говорячи про ельфів. Значить, А – гном. Говорячи про золото, він збрехав. Тому Б сказав правду про А, отже, він також гном.

І наостанок ще одна текстова головоломка – відома задача про мудреців і капелюхи.

**Задача:**
Три древні мудреці засперечалися, хто з них розумніший. У суперечку втрутився перехожий, який запропонував їм розв'язати задачу.
– У мене 5 капелюхів: три чорних і два білих. Заплющте очі.
Із цими словами він надів кожному по чорному капелюху, а два білих сховав.
– Можете розплющити очі. Хто вгадає, якого кольору капелюх у нього на голові, той має право вважати себе наймудрішим.
Мудреці довго дивилися один на одного, і зрештою один із них вигукнув:
– На мені чорний!

**Питання:**
Як він здогадався?

Переможець міркував: «Припустімо, на мені білий. Як тоді має поводитися мудрець по праву руку від мене? Він може висловити два припущення:

1) "на мені білий капелюх";
2) "на мені чорний капелюх".

Як має розглядати свої два припущення цей мудрець? Розглядаючи своє перше припущення, він робить висновок, що третій наш мудрець бачить перед собою два білі капелюхи. Отже, він вигукне: “На мені чорний капелюх!”. Але він цього не зробив. Значить, перше припущення мудреця праворуч хибне. Тоді він має подумати: “Оскільки перше припущення неправильне, то має виконуватися друге припущення, як заперечення першого. Значить, на мені чорний капелюх!”. Отже, мудрець, який стоїть праворуч, має вигукнути: “На мені чорний капелюх!”. Але він цього не робить. Тому припущення про те, що на мені білий капелюх, хибне. Значить, на мені чорний».

## Завдання для самоконтролю

1. Чи може брехун сказати, що він брехун?
   а) так;
   б) ні;
   в) неможливо визначити.

2. Чи може лицар сказати, що він лицар?
   а) так;
   б) ні;
   в) неможливо визначити.

3. Чи може лицар сказати, що він брехун?
   а) так;
   б) ні;
   в) неможливо визначити.

4. Гноми завжди брешуть, коли говорять про своє золото, а в інших випадках говорять правду. Ельфи брешуть, коли говорять про гномів, а в інших випадках говорять правду. Які з наведених фраз ми не почуємо від гнома?
   а) «я – ельф»;
   б) «я – гном»;
   в) «у мене золота більше, ніж у мого друга»;
   г) «цей ельф бреше про своє золото»;
   д) «якби я був ельфом, я би розділив своє золото між дітьми».

5. Гноми завжди брешуть, коли говорять про своє золото, а в інших випадках говорять правду. Ельфи брешуть, коли говорять про гномів, а в інших випадках говорять правду. Які з наведених фраз ми не почуємо від ельфа?
   а) «я – ельф»;
   б) «я – гном»;
   в) «у мене золота більше, ніж у гнома»;
   г) «цей гном бреше про своє золото»;
   д) «якби цей гном був ельфом, він би не брехав про своє золото».

## Завдання до підрозділу

1. На острові живуть лицарі і брехуни. Лицарі завжди говорять правду, а брехуни зажди брешуть. Ви зустріли двох друзів – А і Б. А сказав: «Ми обидва брехуни». Хто є хто?

2. На острові перед вами роздоріжжя. Праворуч стоїть А, ліворуч – Б. Відомо, що один із них – лицар, а другий – брехун, але невідомо, хто є хто. Лише одна дорога веде до міста, інша заведе в хащі, де можна загубитись. Як за допомогою лише одного запитання визначити, яка з доріг веде до міста?

3. Троє жителів острова – А, Б і В розмовляли між собою в саду. До них підійшов незнайомець і запитав у А: «Ви лицар чи брехун?». Той відповів, але так нерозбірливо, що незнайомець нічого не зрозумів. Тоді він запитав у Б: «Що сказав А?». Б відповів: «А сказав, що він брехун». У розмову втрутився В: «Не вірте Б! Він обманює!».
Хто такі Б і В?

4. За круглим столом сидять 10 осіб – брехуни і лицарі. Відомо, що серед них є хоча б один брехун і хоча б один лицар. Яка найбільша кількість із тих, хто сидить за столом, може сказати: «Один з моїх сусідів – брехун, а інший – лицар»?

5. Одного разу на острів Лицарів і Брехунів приїхав мандрівник. Вийшовши на берег, він зустрів чотирьох острів’ян, які несли 12 червоних і 4 сині кульки (по 4 кожен). Кожен із них висловив одне твердження. Перший сказав: «Червоних кульок у мене менше, ніж синіх». Другий сказав: «Синіх кульок у мене не менше, ніж червоних». Третій сказав: «Синіх і червоних кульок у мене порівну». Четвертий: «Червоних у мене не більш ніж одна». Чи можна визначити, скільки лицарів могло бути серед них?

6. У кімнаті троє. Кожен із них може бути або лицар, який завжди говорить правду, або брехун, який завжди бреше, або хитрун, який може і говорити правду, і брехати. Один із присутніх сказав: «Серед нас є брехун». Другий сказав: «Серед будь-яких двох із нас є брехун». І третій сказав: «Усі ми – брехуни». Чи є серед присутніх хитрун?

7. Гуляючи островом Лицарів і Брехунів, ви зустріли трьох місцевих жителів і спитали в кожного: «Скільки лицарів серед твоїх супутників?». Перший відповів: «Жодного». Другий сказав: «Один». Яку відповідь дав третій?

8. У парламенті острова Лицарів і Брехунів 101 депутат. Через скорочення бюджету було прийняте рішення звільнити одного з депутатів. Але кожен із депутатів заявив, що якщо його виключать, то серед решти більшість буде брехунами. Скільки лицарів і скільки брехунів у парламенті острова?

9. На острові Лицарів і Брехунів мешкає 1234 жителі. Одного разу всі острів'яни сформували пари. Кожен сказав про свого напарника: «Він – лицар» або «Він – брехун». Чи могло так статися, що кожна із цих фраз прозвучала однакову кількість разів?

10. Одного разу ви опинилися на острові Лицарів і Брехунів, де є лише два міста: місто Лицарів і місто Брехунів. Лицарі живуть у місті Лицарів, а Брехуни – у місті Брехунів, але вони можуть їздити в гості один до одного. Чи можете ви, поставивши єдине запитання будь-якому зустрічному, визначити, у якому з міст ви перебуваєте?

11. Якось зустрілися кілька жителів острова Лицарів і Брехунів, і кожен із них заявив: «Ви всі – брехуни». Скільки лицарів було серед них?

12. Знайко прийшов у гості до братів-близнюків Якосьбудька і Либонька, знаючи, що один із них ніколи не каже правду. Знайко спитав в одного: «Ти – Либонько?». «Так», – відповів той. Коли Знайко поставив те саме запитання іншому братові, то отримав так само чітку відповідь й одразу визначив, хто є хто.
Кого з братів звати Либонько? Першого чи другого?

# 5.4. Задачі на зважування і переливання

Усі задачі на зважування і переливання належать до задач комбінаторного пошуку. Якщо не вказано умову оптимальності розв'язку, вони мають більше одного розв'язання.

Уміння розв'язувати задачі на зважування і переливання має велике значення для людей будь-якого віку. Людина, яка вміє застосовувати знання про вагу і об'єм, легко здолає відмірювання за відсутності точних вимірювальних приладів. Окрім цього, в олімпіадних завданнях з математики часто використовуються задачі на пошук найважчого, найлегшого, най- якогось іще.

За **правилом 1** умова та всі поняття в задачах зрозумілі. У деяких випадках інтуїція може підказати відсутність оптимального розв'язку, тому за **правилами 1**, **2** найкраще розв'язувати такі задачі, склавши математичну модель.

## 5.4.1. Задачі на зважування

Задачі на зважування можна поділити на дві категорії: задачі на пошук фальшивої монети чи фальшивих монет і задачі на вимірювання певної ваги на терезах (з гирями або без них). Іноді також трапляється формулювання питання про можливість встановлення факту за певну кількість зважувань. Найчастіше така задача еквівалентна пошуку конкретного алгоритму, і таке перефразування є більш доречним.

Розглянемо класичну задачу на пошук фальшивої монети.

---

**Задача:**
Є 9 монет, одна з яких фальшива, причому вона легша за інші.

**Питання:**
Як за два зважування на терезах без гир можна знайти фальшиву монету?

---

Ключова ідея розв'язання таких задач – правильний поділ множини варіантів на три рівні частини. Це називається методом трисекції. Він є оптимальним і застосовується для розв'язання таких задач. Поклавши дві купки з трьох на різні шальки, отримуємо таку інформацію: переважить перша купка, друга купка, або ж вони рівні, що наштовхує на визначення фальшивої монети. У задачі після першого поділу має залишитися не більше трьох «підозрілих» монет, після третього – не більше однієї, яка і є фальшивою. Ділимо монети на три купки: 123, 456, 789. Зважуємо перші дві купки: 123 і 456. Якщо 123 легші, то фальшива монета серед них. Якщо важчі – фальшива серед 456. Якщо ж терези вирівнялися, то фальшива монета серед 789. Визначивши купку, зважуємо дві монети: якщо терези не в рівновазі, то фальшива там, де вони вищі, а якщо ж вони врівноважилися, то фальшивою є та, що не використовувалася для зважування.

Розглянемо складнішу задачу з тої ж серії, але «з хитрістю».

---

**Задача:**

Серед 100 однакових на вигляд монет є кілька фальшивих. Усі фальшиві монети важать однаково, усі справжні – теж, але фальшива монета легша за справжню. Є також терези (з двома чашами без стрілки), на кожній чаші вміщується тільки одна монета. Терези злегка зіпсовані: якщо монети різної ваги, переважує більш важка монета, а якщо однакової – переважити може будь-яка чаша.

**Питання:**

Як за допомогою цих терезів знайти хоча б одну фальшиву монету?

---

Спробуйте разом із учнями поміркувати, на які ж купки треба ділити монети. У випадку зі зламаними терезами найоптимальніше зробити 33 купки по 3 монетки, одна монетка залишиться окремо. До кожної трійки монет застосовуємо однакові логічні міркування: зважуємо попарно всі монетки (для зручності позначимо їх А, Б, В). Результат попарного зважування може бути такий, що кожна з монеток переважає одну, і переважається іншою, тобто А > Б > В > А (існує така «нумерація» монеток, що ця схема справедлива). Такий результат нам особливої інформації не дає, бо кожна з монет однаково ймовірно є фальшивою. Отже, ми беремо довільну монету і відкладаємо в окрему купку. Окрім схеми А > Б > В > А, при попарному зважуванні може виникнути інша ситуація, а саме: А < Б > В > А, тобто одна з монеток виявиться легшою за кожну з двох інших (А). Які варіанти для цих трьох монеток у нас виникають?

1. В – справжня. Тоді Б обов'язково справжня, а А може бути як справжньою, так і фальшивою.
2. В – фальшива, тоді А обов'язково фальшива, а Б може бути як справжньою, так і фальшивою.

Бачимо, що найімовірніше А є фальшивою, тому ми відкладаємо її в окрему купку.

Таким чином, проробивши всі ці кроки для 33 купок, ви отримаєте окрему купку з 11 «підозрілими» монетами, плюс іще одна монетка, яку не чіпали. Ці 12 монет розділяємо на 4 купки по 3 монетки, повторимо такі самі дії й отримуємо 4 «підозрілі» монети. Беремо три з них, визначаємо, яка з них легша за інші (або схема А > Б > В > А), і порівнюємо її з останньою монетою. Яка легша, та і фальшива.

Більш поширеними є задачі на відому вагу. Для їх розв'язання потрібно визначити необхідну комбінацію зважувань.

---

**Задача:**

Після роботи Сергій проходив повз свою улюблену кавову крамничку і вирішив купити кави собі й тещі.

– Добрий день, – привітався Сергій.

– Добрий день, – відповів продавець. – Тільки не кажіть, що Ви прийшли купити кави.

– Як Ви здогадалися? – спантеличено, але з цікавістю запитав Сергій.

– Розумієте… – на обличчі продавця з'явилася винувата усмішка, – усі наші ваги з гирями віддали на перевірку, тому кави зважити не можу.

– А он ті шалькові терези працюють? – Сергій не хотів іти без кави.

– Так, працюють. Це наші перші терези, але вони вже стоять тут як прикраса. До них не залишилося комплектів гир.

– Але ж у вас точно є товар з позначеною вагою?

– Так, але вага вказується нетто, а товар в упаковках.

– Гаразд, – Сергій твердо вирішив піти з магазину з кавою. – У мене є з собою фотоапарат, і я точно знаю, його вага – 650 грамів. Також на мені капелюх, вага якого 300 грамів.

– Ну що ж, скільки Вам кави? 300 грам? 650? 950?

– Два по 500, мені і тещі, – сказав Сергій, знімаючи капелюх.

– Але як я зважу рівно 500?..

– Прошу, швидше, мені ще горішків треба встигнути купити.

**Питання:**

За яку мінімальну кількість зважувань можна відміряти дві порції кави по 500 г?

---

Підхід до розв’язання такої задачі доволі зрозумілий: необхідно визначити, які суми та різниці ваг ми можемо отримати. Наприклад, 650 – 300 = 350, 650 + 300 = 950, 950 – 350 = 600, 650 + 350 = 1000 тощо. Зазначимо, що одним зі способів отримали 1000 г, що було потрібно. Залишається знайти послідовність дій, що приведе нас до цього результату.

Спочатку необхідно отримати 350 г кави. Для цього ми покладемо на одні шальки фотоапарат, а на інші – капелюх. Щоб вирівняти терези, нам потрібно до капелюха додати 350 г. Вирівняли терези – маємо 350 г. Ці 350 г пересипаємо на шальки з фотоапаратом, що дорівнюватиме гирі вагою 1 кг. На інші шальки насипаємо кави, поки не вирівняється. Відміряли 1 кг кави. Не складно розмістити каву порівну на двох шальках терезів. Задача розв’язана.

Окрім задач на терези, до цього типу належать задачі на вимірювання часу.

---

**Задача:**
Як за допомогою піскових годинників, що відмірюють 4 і 7 хвилин, відміряти 9 хвилин?

---

Необхідно звернути увагу на різницю у проміжках. Складність задачі: необхідно відміряти 9 хвилин *безперервно*. Тобто 4 + 4 – 7 = 1, і нібито можна 9 разів по 1 і буде 9 хвилин. Насправді така задача складніша за задачу про терези. Проте все ж таки 4 + 4 – 7 = 1 знадобиться. Розв’язання таке: перевертаємо обидва годинники. Коли в 4-хвилинному закінчиться пісок, перевертаємо його (пройшло 4 хвилини). Коли закінчиться пісок у 7-хвилинному, перевертаємо його (пройшло 7 хвилин, і в 4-хвилинному залишилося піску на 1 хвилину). Коли пройде ще 1 хвилина, 4-хвилинний спорожніє, а в 7-хвилинному знизу буде піску на 1 хвилину (пройшло 8 хвилин). Перевертаємо 7-хвилинний годинник, який відміряє нам одну хвилину. Задача розв’язана.

Звісно, треба розв’язати багато задач, щоб навчитися швидко бачити й відзначати суттєві та несуттєві залежності.

## Завдання для самоконтролю

1. Чим треба користуватися для розв'язання задач на знаходження фальшивої монети за допомогою терезів?
   а) поділом усіх монет на купки;
   б) властивістю фальшивої монети;
   в) виглядом фальшивої монети.

2. Чим треба користуватися для розв'язання задач про вимірювання часу за допомогою піскових годинників?
   а) комбінаціями суми і різниці проміжків часу, які можна отримати;
   б) вагою піскових годинників;
   в) тим, що пісковий годинник можна перевертати;
   г) тим, що можна годинники перевернути одночасно.

3. За яку найменшу кількість зважувань на терезах можна знайти одну фальшиву монету (вона важча) із 27 однакових на вигляд монет?
   а) 2;
   б) 3;
   в) 4;
   г) 5.

4. Яку вагу може мати кожна із чотирьох гир, щоб за їх допомогою можна було зважити довільну цілочисельну вагу від 1 до 15 кг на шалькових терезах (гирі можна ставити лише на одну шальку)?
   а) 1 кг, 2 кг, 5 кг, 7 кг;
   б) 2 кг, 3 кг, 5 кг, 8 кг;
   в) 1 кг, 2 кг, 5 кг, 10 кг;
   г) 1 кг, 2 кг, 4 кг, 8 кг.

## Завдання до пункту

1. Є 80 монет, одна з них фальшива і легша за інші. За яку найменшу кількість зважувань на терезах без гир можна знайти фальшиву монету?

2. Є 68 однакових на вигляд монет, усі вони різні за вагою. Як за 100 зважувань знайти найлегшу і найважчу?

3. Є 14 куль. З них 2 радіоактивні. Є лічильник Гейгера. Його можна піднести до купи куль і дізнатися, чи є в ній радіоактивні (але невідомо, скільки їх). За яку мінімальну кількість вимірювань (і як саме?) можна знайти обидві радіоактивні кулі з-поміж 14 куль?

4. У мішку міститься 24 кг горіхів. Як на шалькових терезах без гир відміряти 9 кг горіхів?

5. Ви маєте шалькові терези та дві гирі – 10 кг і 2 кг. Як з їх допомогою зважити 3 кг яблук?

6. Є два піскових годинники – на 7 хв і на 11 хв. Як з їх допомогою відміряти 15 хвилин?

## 5.4.2. Задачі на переливання

Задачі на переливання подібні до попередніх, але підхід до їх розв'язання інший.

Загальний зміст задач такий: маючи кілька посудин різного об'єму, одна з яких наповнена рідиною, необхідно розділити рідину у певному співвідношенні або ж відділити якусь частину за допомогою інших посудин за найменшу кількість переливань. Виокремлюють два типи задач на переливання:

1) «відкрита система» – необхідно отримати певну кількість рідини за допомогою кількох порожніх посудин і (умовно) нескінченного джерела, з якого можна набирати рідину і в яке можна її заливати;

2) «замкнена система» – необхідно розподілити рідину по кількох посудинах і отримати певний об'єм в одній із них, а рідину можна переливати лише з однієї посудини в іншу.

Потрібно вказати послідовність дій, за якої виконується необхідне відмірювання рідини і виконані всі умови задачі. Якщо немає уточнень, то вважається, що:

– усі посудини без поділок;

– не можна переливати рідини «на око».

Визначити, скільки рідини в посудині, можна лише у разі, якщо:

– посудина порожня;

– посудина повна, і в задачі вказано її об'єм;

– у задачі задана наповненість даної посудини, і вона не використовувалася в переливаннях;

– для переливання використано дві посудини, у кожній з яких була відома кількість рідини, і після переливання вся рідина помістилася в одній із них;

– для переливання використано дві посудини, у кожній з яких була відома кількість рідини, відомий об'єм посудини, у яку переливали, і після переливання рідина помістилася в цій посудині; тоді можна визначити, скільки рідини залишилося в іншій.

Найчастіше для розв'язання таких задач використовується метод зображення даних у вигляді таблиць, де в першому рядку (стовпці) вказуються об'єми заданих посудин, а в кожному наступному – результат чергового переливання. Отже, кількість рядків (стовпців), окрім першого, є кількістю необхідних переливань.

Проілюструємо на прикладі адаптованої задачі Пуассона.

**Задача Пуассона:**
Ви маєте 12 л виноградного соку і хочете подарувати половину другові, але є лише дві порожні посудини: одна – на 8 л, інша – на 5 л.

**Питання:**
Як налити в більшу посудину 6 л виноградного соку?

Це задача замкненого типу. Складемо таблицю, у якій в першому рядку вказані посудини, що є в задачі:

| | 12 літрів | 8 літрів | 5 літрів |
|---|---|---|---|
| До переливання | 12 | 0 | 0 |
| 1-ше переливання | 4 | 8 | 0 |
| 2-ге переливання | 4 | 3 | 5 |
| 3-тє переливання | 9 | 3 | 0 |
| 4-те переливання | 9 | 0 | 3 |
| 5-те переливання | 1 | 8 | 3 |
| 6-те переливання | 1 | 6 | 5 |
| 7-ме переливання | 6 | 6 | 0 |

7-ме переливання можна не виконувати, адже умову задачі виконано вже на 6-му кроці: у 8-літровій посудині стало 6 л соку.

Задачі відкритого типу розв'язуються аналогічно, тільки допускають наливання із джерела і виливання в нього.

**Задача:**
У вас є дві посудини об'ємом 5 л і 7 л.

**Питання:**
Як з їх допомогою відміряти 6 л води з крана?

Знову складемо таблицю:

| | 5 літрів | 7 літрів |
|---|---|---|
| 1-ше переливання | 0 | 7 |
| 2-ге переливання | 5 | 2 |
| 3-тє переливання | 0 | 2 |
| 4-те переливання | 2 | 0 |
| 5-те переливання | 2 | 7 |
| 6-те переливання | 5 | 4 |
| 7-ме переливання | 0 | 4 |
| 8-ме переливання | 4 | 0 |
| 9-те переливання | 4 | 7 |
| 10-те переливання | 5 | 6 |

Бачимо, що за 10 кроків у 7-літровій ємності є необхідні 6 л води.

Окрім методу таблиць, для розв'язування задач на переливання, у яких необхідно із заповненої посудини злити певний об'єм за допомогою двох інших посудин, використовується так званий «більярдний» метод, описаний Я. Перельманом. Метод полягає в тому, що будується паралелограм («більярдний стіл») із рівносторонніх трикутників, і сторони паралелограма мають довжини, рівні об'ємам двох допоміжних посудин. Із гострого кута цього столу запускається кулька, яка за законом віддзеркалення (кут падіння дорівнює куту відбивання) зіштовхуватиметься зі стінками столу, показуючи послідовність переливань. На бортиках столу нанесена шкала, поділка якої відповідає обраній одиниці об'єму. У результаті такого руху кулька або вдариться у стінку в потрібній точці (тоді задача має розв'язок), або не вдариться ніколи (тоді задача розв'язку не має). Більярдна кулька може рухатися лише вздовж прямих, що утворюють сітку на паралелограмі. Після удару об стінку паралелограма кулька відбивається і продовжує рух, визначаючи для спостерігача, скільки рідини знаходиться в якій із посудин, і яке з переливань відбувається.

Розв'яжемо задачу Пуассона, застосовуючи «більярдний» метод.

**Задача:**

Ви маєте 12 л виноградного соку і хочете подарувати половину другові, але є лише дві порожні посудини: одна – на 8 л, інша – на 5 л.

**Питання:**

Як налити в більшу посудину 6 л виноградного соку?

Побудуємо більярдний стіл у вигляді паралелограма. Покладемо сторони рівними 5 одиниць і 8 одиниць, відповідно для кожної з посудин. По горизонталі матимемо координати для 8-літрової, а по вертикалі – для 5-літрової. Запустимо кульку по горизонталі (наповнимо 8-літрову посудину) і подивимося, чи опиниться вона в точці А, що відображає рівно 6 л у 8-літровій посудині (що і треба отримати в задачі), і 0 л у посудині об'єму 5 л *(рис. 34)*.

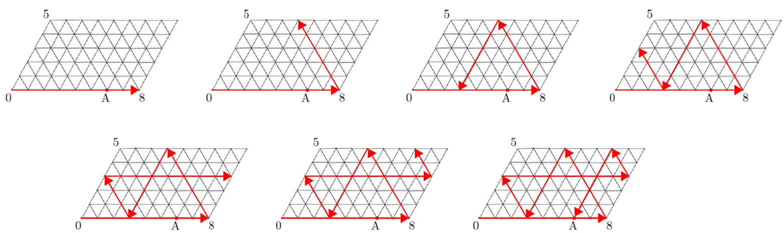



Рис. 34. Розв'язання задачі Пуассона методом «більярду»

Переконайтеся, що, запустивши кульку із самого початку по вертикалі, відповідь отримаєте за 18 кроків.

## Завдання для самоконтролю

1. На які типи поділяють задачі на переливання?
   а) «відкрита система»;
   б) «циклічна система»;
   в) «замкнена система»;
   г) «однорідна система».

2. Які є методи розв'язання задач на переливання замкненого типу?
   а) метод перебору;
   б) табличний метод;
   в) метод «більярду»;
   г) метод «боулінгу».

3. Що означає розв'язати задачу на переливання?
   а) змоделювати процес переливання на комп'ютері;
   б) визначити, до якого типу належить задача;
   в) створити модель більярдного столу і визначити, чи кулька потрапить у необхідну точку;
   г) вказати послідовність дій, яка приведе до необхідного результату.

4. Для якої кількості посудин доцільно застосовувати «більярдний» метод?
   а) 2;
   б) 3;
   в) 5;
   г) для довільної кількості посудин.

### Завдання до пункту

1. Є три відра ємністю 6 л, 3 л і 7 л. У першому і третьому наразі є відповідно 4 і 6 л води. Потрібно, користуючись тільки цими трьома відрами, розділити воду на 5 л у першому відрі та 5 л у третьому.

2. Дві особи мають розділити порівну 8 л квасу, що міститься у 8-літровому відрі. Але в них є тільки дві порожні банки: 5-літрова та 3-літрова. Як можна розділити квас, користуючись тільки цими трьома ємностями?

3. Є два відра ємністю 4 л і 9 л. Як з їх допомогою набрати рівно 6 л води з річки?

4. Є дві банки ємністю 3 л і 5 л. Як з їх допомогою набрати рівно 4 л води з крана?

5. Є два бідони ємністю 5 л і 17 л. Як з їх допомогою відлити із цистерни 13 л води?

# 5.5. Магічні квадрати. Судоку. Кен-кен

Багато людей люблять проводити час за розв'язуванням логічної головоломки судоку. Її класичний варіант складається з поля 9 × 9, у яке потрібно вписувати цифри від 1 до 9 за різними правилами. Деякі цифри вже мають фіксоване початкове розташування. Під час розв’язання судоку активізується й розвивається пам’ять, логічне мислення і загалом стимулюється розумова діяльність.

За **правилом 1** розв’язання головоломок необхідно правильно зрозуміти умову головоломки, особливо у випадках нестандартних типів судоку. Керуючись **правилами 2** і **3**, ставити питання інтуїтивного розв’язку чи математичного моделювання не дуже доцільно, адже судоку не вимагає глибоких знань математики, але й не є простою загадкою. Розв’язання судоку базується на математичних методах перебору та виключення.

**Як грати в класичне судоку?** Поле судоку – це таблиця 9 × 9 із виділеними квадратами 3 × 3. У кожну клітинку має бути вписана цифра (від 1 до 9), щоб заповнити таблицю. На початку в деяких із клітинок уже є цифри, і їх змінювати не можна (вони гарантують однозначність розв’язку конкретного судоку). Кожен рядок, стовпець і виділений квадрат 3 × 3 має містити всі цифри від 1 до 9, і в жодному рядку, стовпці і виділеній області цифри не мають повторюватися.

Підхід до розв’язання судоку *(рис. 35)*. Знаходимо квадрат, у якому із самого початку найбільше цифр (це лівий верхній квадрат, обведений блакитним кольором). Цифри, яких не вистачає, це 5 і 6. Помітивши, які числа відсутні в кожному квадраті, рядку або стовпці, можна використовувати дедуктивне мислення, щоб визначити цифри, що мають розташуватися в кожній клітинці.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 7 | 2 | | | 4 | 9 | | |
| 3 | | 4 | | 8 | 9 | 1 | | |
| 8 | 1 | 9 | | | 6 | 2 | 5 | 4 |
| 7 | | 1 | | | | | 9 | 5 |
| 9 | | | | | 2 | | 7 | |
| | | | 8 | | 7 | | 1 | 2 |
| 4 | | 5 | | | 1 | 6 | 2 | |
| 2 | 3 | 7 | | | | 5 | | 1 |
| | | | | 2 | 5 | 7 | | |

Рис. 35. Підхід до розв’язання судоку

Судоку завжди складається так, щоб після того як заповняться деякі клітинки, наступним кроком було неочевидне, але єдине правильне рішення, або два варіанти, один з яких за кілька ітерацій приведе в глухий кут, тому треба буде шукати інший спосіб. Рекомендуємо використовувати олівець і гумку. Найпростіший спосіб розв'язання судоку – метод виключення. Для кожної клітинки розглядати варіанти цифр, викреслюючи ті, що не підходять (наявні у тому самому рядку / стовпці / квадраті, але не забуваємо аналізувати сусідні).

Можна помітити, що у верхньому лівому та центральному лівому квадратах уже є число 1 *(рис. 36)*. Це означає, що в крайньому лівому стовпчику є тільки одне місце, у яке можна вставити 1 (обведено зеленим).

Застосовуючи цей підхід, ви прийдете до відповіді *(рис. 37)*.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 7 | 2 | | | 4 | 9 | | |
| 3 | | 4 | | 8 | 9 | 1 | | |
| 8 | 1 | 9 | | | 6 | 2 | 5 | 4 |
| 7 | | 1 | | | | | 9 | 5 |
| 9 | | | | | 2 | | 7 | |
| | | | 8 | | 7 | | 1 | 2 |
| 4 | | 5 | | | 1 | 6 | 2 | |
| 2 | 3 | 7 | | | | 5 | | 1 |
| | | | | 2 | 5 | 7 | | |

Рис. 36. Підхід до розв'язання судоку

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 7 | 2 | 1 | 5 | 4 | 9 | 8 | 3 |
| 3 | 5 | 4 | 2 | 8 | 9 | 1 | 6 | 7 |
| 8 | 1 | 9 | 7 | 3 | 6 | 2 | 5 | 4 |
| 7 | 2 | 1 | 6 | 4 | 3 | 8 | 9 | 5 |
| 9 | 4 | 8 | 5 | 1 | 2 | 3 | 7 | 6 |
| 5 | 6 | 3 | 8 | 9 | 7 | 4 | 1 | 2 |
| 4 | 8 | 5 | 3 | 7 | 1 | 6 | 2 | 9 |
| 2 | 3 | 7 | 9 | 6 | 8 | 5 | 4 | 1 |
| 1 | 9 | 6 | 4 | 2 | 5 | 7 | 3 | 8 |

Рис. 37. Підхід до розв'язання судоку

Наведемо ще приклад розв'язання калькудоку (*кен-кен*) – одного з варіантів судоку. Це квадрат-сітка з незаповненими блоками. У лівому верхньому кутку кожного блоку є число й арифметичний знак. Потрібно заповнити сітку так, щоб у рядках і стовпцях числа не повторювалися. Усередині блоку результатом арифметичної дії є відповідь, що розташована зліва від знака. Кількість різних чисел дорівнює кількості рядків. Це означає, що у квадраті 3 × 3 будуть розташовані цифри від 1 до 3, а в 4 × 4 – цифри від 1 до 4.

## Як розв'язувати кен-кен

*Крок 1*. Спочатку заповнимо блок з єдиною цифрою без арифметичного знака *(рис. 38).*

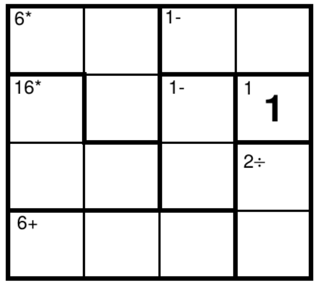



Рис. 38. Крок 1

*Крок 2.* Розглянемо блок під цією одиницею. Позначка «2÷» говорить про те, що в цьому блоці числа дадуть 2. У проміжку від 1 до 4 таких комбінацій може бути дві: 4 ÷ 2 = 2 і 2 ÷ 1 = 2.

Другий варіант нам не підходить, бо одиницю в цьому стовпці ми вже використали. Розташування чисел у блоці нам поки невідоме, але запам'ятаємо, що там мають бути 2 і 4. Методом виключення отримуємо 3 в першому рядку, оскільки 1, 2 і 4 в цьому стовпці вже використані *(рис. 39).*

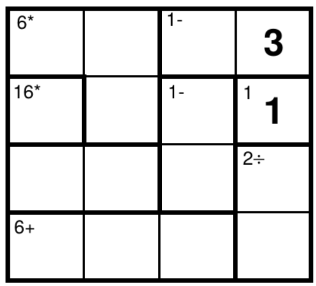



Рис. 39. Крок 2

*Крок 3.* Розглянемо блок «16×». Результатом множення яких трьох чисел буде 16? Варіант один: 4 × 4 × × 1 = 16. Пам'ятаємо, що числа в рядках і стовпцях не повторюються, тому вписуємо 4 і 1 посередині. У третьому рядку 4 виключає появу 4 в блоці «2÷», який ми розглядали раніше *(рис. 40).*

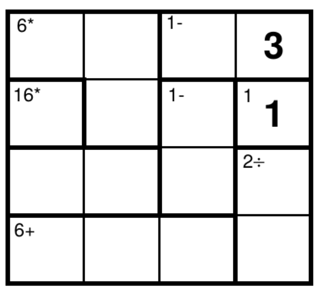



Рис. 40. Крок 3

| | | | |
|---|---|---|---|
| 6 | | 1- 4 | 3 |
| 16* 4 | | 1- 2 | 1 1 |
| 1 | 4 | 3 | 2÷ 2 |
| 6+ | | | 4 |

Рис. 41. Крок 4

*Крок 4.* Розглянемо два блоки «1–». З умови верхнього блоку «1–», з 3 може бути сусідами 2 або 4 ($3 - 2 = 1$ або $4 - 3 = 1$). У другому рядку 4 вже є, тому ставимо 2. У блоці посередині в першому рядку маємо те саме, але оскільки двійку ми в цей стовпець уже вписали, ставимо 4 *(рис. 41).*

| | | | |
|---|---|---|---|
| 6* 2 | 1 | 1- 4 | 3 |
| 16* 4 | 3 | 1- 2 | 1 1 |
| 1 | 4 | 3 | 2÷ 2 |
| 6+ | | | 4 |

Рис. 42. Крок 5

*Крок 5.* Дивимося на блок «6×». У другому рядку пишемо 3, оскільки інші числа використані. Для заповнення блоку підходить тільки одна комбінація чисел: $1 \times 2 \times 3 = 6$. У першому стовпці 1 уже є, тому варіант розташування цифр лише один *(рис. 42).*

| | | | |
|---|---|---|---|
| 6* 2 | 1 | 1- 4 | 3 |
| 16* 4 | 3 | 1- 2 | 1 1 |
| 1 | 4 | 3 | 2÷ 2 |
| 6+ 3 | 2 | 1 | 4 |

Рис. 43. Крок 6

*Крок 6.* Заповнюємо числами останній блок «6+». Не вдаємося до обчислень, а лише впишемо в стовпці потрібні цифри *(рис. 43)*. Головоломка розв’язана.

## Види судоку

Усі наведені нижче завдання можна вирішити та звіритися з відповідями в кінці книги.

*Класичне (рис. 44):*

1. У кожному рядку і в кожному стовпчику цифри не мають повторюватися.

2. У кожному відокремленому блоці 3 × 3 цифри не мають повторюватися.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 3 | | | 7 | | | | |
| 6 | | | 1 | 9 | 5 | | | |
| | 9 | 8 | | | | | 6 | |
| 8 | | | | 6 | | | | 3 |
| 4 | | | 8 | | 3 | | | 1 |
| 7 | | | | 2 | | | | 6 |
| | 6 | | | | | 2 | 8 | |
| | | | 4 | 1 | 9 | | | 5 |
| | | | | 8 | | | 7 | 9 |

Рис. 44. Класичне судоку

*Нерегулярне (нестандартне) судоку (рис. 45):*

1. У кожному рядку і в кожному стовпчику цифри не мають повторюватися.

2. У кожній області, виділеній жирною лінією, цифри не мають повторюватися.

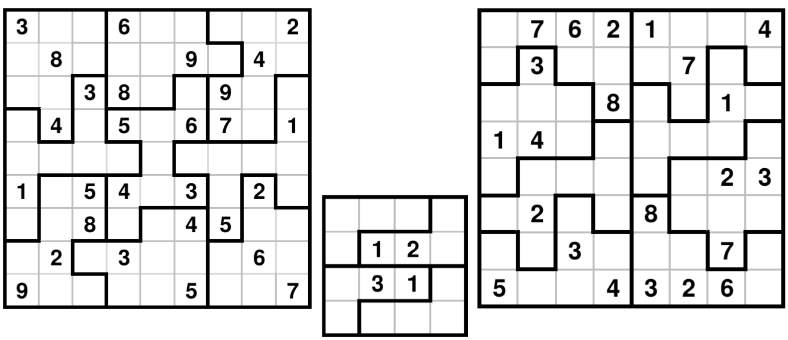


Рис. 45. Нестандартні судоку

*Судоку з додатковими областями (рис. 46)*. До класичного варіанта додаються нові області, які мають умови. Найпоширеніші – «Х-судоку» і гіперсудоку. У «Х-судоку» цифри не можуть повторюватися на діагоналях, а гіперсудоку (англійською «window sudoku») містять додаткові чотири виділені області 3 × 3.

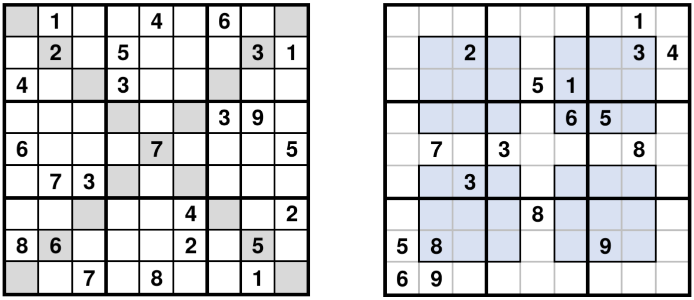


Рис. 46. «Х-судоку» та гіперсудоку

У *судоку з додатковими умовами* додаються умови щодо цифр у комірках. До таких головоломок належать:

- арифметичні судоку: «Суми», «Добуток», «Різниця», *кен-кени*, або калькудоку. У таких судоку є додатково вказані числа для виділених областей поля;
- квадросудоку: на деяких вузлах сітки поля розміщено по 4 цифри – це ті цифри, які розташовані навколо цього вузла (порядок не важливий);
- судоку «парне-непарне»: деякі клітини поля зафарбовані одним кольором, бо на них мають стояти лише парні або лише непарні цифри;
- судоку «більше-менше»: зазвичай порожнє поле, між комірками якого встановлені значки «>» або «<»;
- судоку «точки»: між деякими сусідніми комірками є біла або чорна точка. Біла — якщо відповідні цифри відрізняються на 1, чорна – якщо одне із чисел удвічі більше за інше. Між цифрами 1 і 2 колір точки обирається навмання;
- судоку «перегородки»: між сусідніми клітинками перегородка є лише тоді, коли відповідні цифри відрізняються на 1;
- «шахові» судоку: деякі клітини, які відповідають маршруту шахового коня по полю, не можуть містити однакових цифр;
- інші авторські судоку.

Кожен із цих варіантів може бути різного розміру.

*Судоку незвичної форми (рис. 47)*: може бути трикутна, шестикутна чи іншої форми сітка.

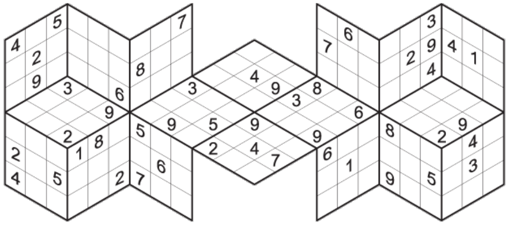


Рис. 47. Судоку незвичної форми

*Комбіновані судоку (рис. 48)* є комбінацією двох чи більше видів судоку.

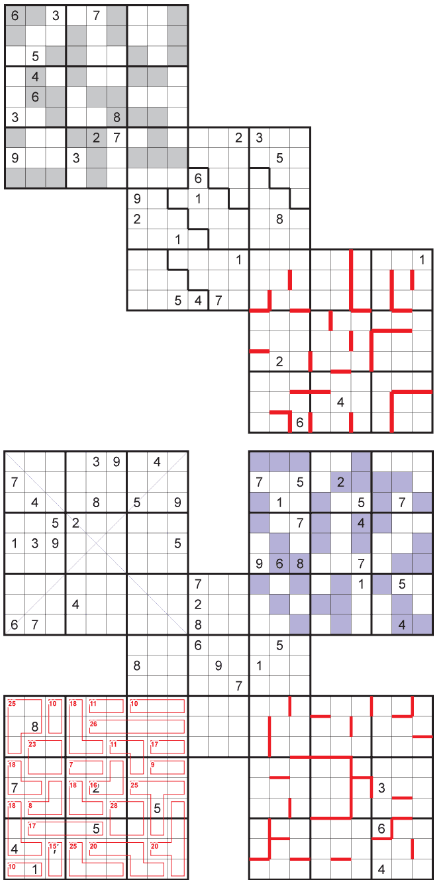


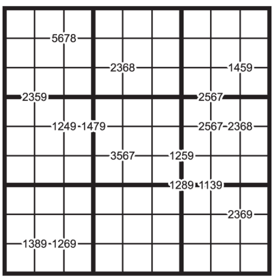
Рис. 48. Комбіновані судоку

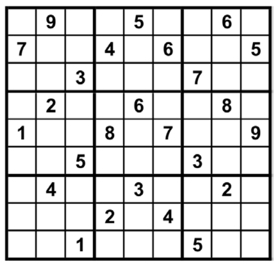
## Завдання для самоконтролю

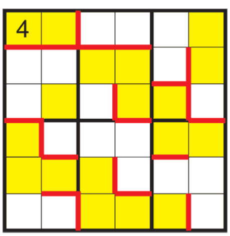
1. На гравюрі якого художника зображено магічний квадрат $4 \times 4$?
   а) Леонард Ойлер;
   б) Леонардо да Вінчі;
   в) Альбрехт Дюрер;
   г) Сальвадор Далі.

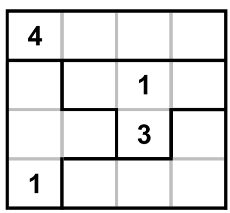
2. Що означає абревіатура «судоку»?
   а) «кожен рядок унікальний»;
   б) «цифра входить лише раз»;
   в) «не допускати порожніх клітинок»;
   г) це не абревіатура.

3. Установіть відповідність між зображенням судоку та його видом:

1. 

2. 

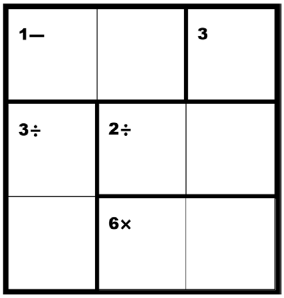
3. 

4. 

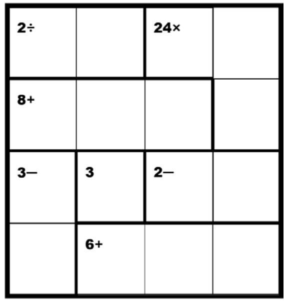
а) комбіноване;
б) судоку з додатковими умовами;
в) нестандартне;
г) класичне.

## Завдання до пункту

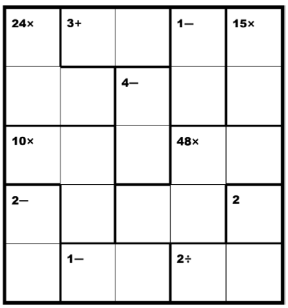
1.



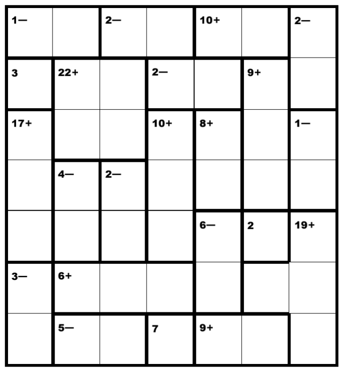

2.



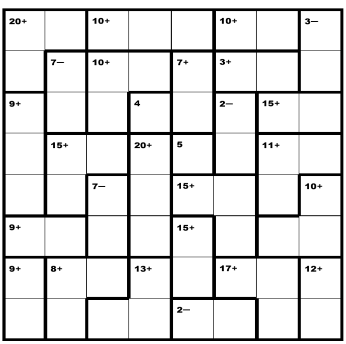

3.



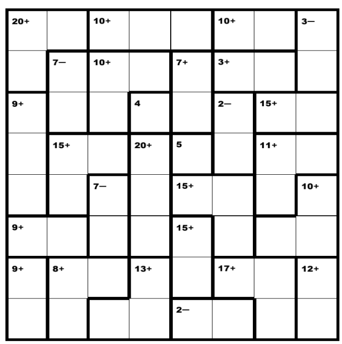

4.



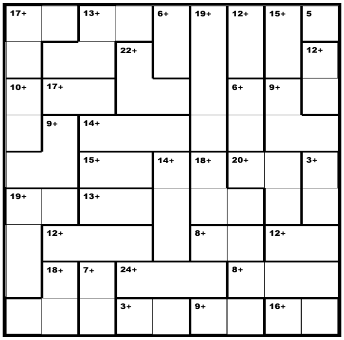

5.



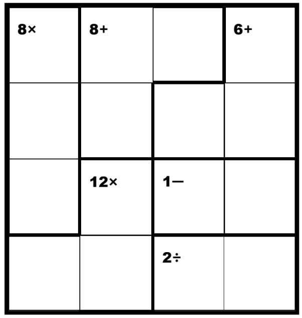

6.



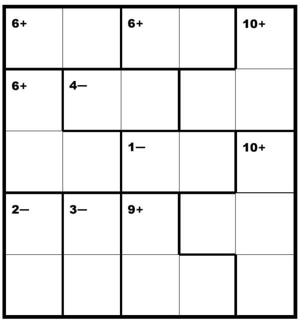
7.


17+
13+
6+
19+
12+
15+
5
22+
12+
10+
17+
6+
9+
9+
14+
15+
14+
18+
20+
3+
19+
13+
12+
8+
12+
18+
7+
24+
8+
3+
9+
16+

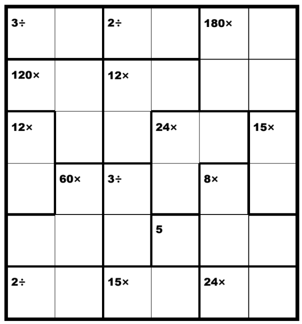
8.


8×
8+
6+
12×
1–
2÷

9.


6+
6+
10+
6+
4–
1–
10+
2–
3–
9+

10.


3÷
2÷
180×
120×
12×
12×
24×
15×
60×
3÷
8×
5
2÷
15×
24×

# 5.6. Числові ребуси з квадратиками

Навички, набуті під час розв'язання судоку, будуть корисними в інших математичних головоломках – числових ребусах із квадратиками. У таких ребусах кожен квадратик означає певну цифру, жодне число не дорівнює нулю і не починається цифрою нуль (проте на нуль числа можуть закінчуватися). За **правилом 1** необхідно правильно зрозуміти умову задачі, знати правила і принципи, інакше розв'язати таку головоломку буде неможливо. Для розв'язування не доцільно ставити питання інтуїтивного розв'язку чи використовувати математичне моделювання за **правилами 2**, **3**. Розв'язання числового ребуса з квадратиками ґрунтується на математичних методах перебору, виключення та принципі крайнього елемента.

Ребуси складені так, що сума чисел першого вертикального рядка дорівнює результату, отриманому від дій, виконаних у першому горизонтальному рядку, сума чисел другого вертикального ряду однакова з результатом другого горизонтального рядка тощо.

$$\square + \boxed{2} \times \square \times \boxed{5} = \boxed{3}\square$$

$$\square + \square - \square\boxed{6} \times \square = \square\square$$

$$\square\boxed{7} + \square : \boxed{5} \times \boxed{8} = \square\square$$

$$\square + \square \times \square - \square\square = \square\square$$

$$\square\square + \square\boxed{6} + \square\square + \square\square = \square\square\square$$

У порожні квадратики поставимо цифри, підібравши їх так, щоб, виконуючи зазначені арифметичні дії послідовно над числами в кожному рядку ребуса, можна було отримати число, що стоїть після знака рівності.

Послідовно – значить так, якби кожен рядок ребуса мав такі дужки, які показують послідовність арифметичних дій:

$$[(\square + \square) \times \square] - \square\square = \square\square$$

Перепишемо ребус, використовуючи додаткову умову: сума чисел відповідного вертикального рядка дорівнює результату, отриманому від дій у відповідному горизонтальному рядку. Ребус набуде такого вигляду:

$$
\begin{array}{rcccccccc}
\square & + & \boxed{2} & \times & \square & \times & \boxed{5} & = & \boxed{3}\square \\
\square & + & \square & - & \square\boxed{6} & \times & \square & = & \square\boxed{6} \\
\square\boxed{7} & + & \square & : & \boxed{5} & \times & \boxed{8} & = & \square\square \\
\square & + & \square & \times & \square & - & \square\square & = & \square\square \\
\hline
\boxed{3}\square & + & \square\boxed{6} & + & \square\square & + & \square\square & = & \square\square\square
\end{array}
$$

Розглянемо другий рядок ребуса. Оскільки сума першого і другого чисел рядка не може бути більше 18 (бо вони одноцифрові), то третє число рядка починається із цифри 1. Отже, третє число рядка – 16, а тому сума чисел може набувати значення 17 або 18. При першому значенні суми (17) отримуємо рівність одноцифрового числа двоцифровому, тобто протиріччя. Значить, сума чисел дорівнює 18; перше число рядка 9, друге – теж 9. Тобто виходить, що четверте число дорівнює 8, п’яте (а також друге число п’ятого рядка) – 16.

Тепер ребус має такий вигляд:

$$
\begin{array}{rcccccccc}
\square & + & \boxed{2} & \times & \square & \times & \boxed{5} & = & \boxed{3}\square \\
\boxed{9} & + & \boxed{9} & - & \boxed{1}\boxed{6} & \times & \boxed{8} & = & \boxed{1}\boxed{6} \\
\square\boxed{7} & + & \square & : & \boxed{5} & \times & \boxed{8} & = & \square\square \\
\square & + & \square & \times & \square & - & \square\square & = & \square\square \\
\hline
\boxed{3}\square & + & \boxed{1}\boxed{6} & + & \square\square & + & \square\square & = & \square\square\square
\end{array}
$$

Розглянемо другий вертикальний ряд ребуса. На суму третього й четвертого чисел ряду припадає 5 одиниць (16 – 2 – 9 = 5). Отже, кожне із цих чисел менше 5. Третє число ряду може набувати значення 3 або 8 (до цього висновку приводить нас аналіз третього рядка). Отже, третє число другого рядка – 3, четверте число може бути лише 2.

У першому рядку п’яте число починається цифрою 3 і ділиться на 5. Тому це число може набувати значення 30 або 35. Це стосується і першого числа п’ятого рядка. У першому вертикальному рядку третє число може бути 17, 27, 37 тощо. Припустімо, що воно дорівнює 27. Тоді сума чисел ряду перевищить 36 (= 9 + 27), а вона дорівнює 30 або 35. Із цього робимо висновок, що третє число першого рядка дорівнює 17, а третій рядок буде таким: (17 + 3) : 5 × 8 = 32.

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
\boxed{\phantom{0}} & + & \boxed{2} & \times & \boxed{\phantom{0}} & \times & \boxed{5} & = & \boxed{3}\boxed{\phantom{0}} \\
\boxed{9} & + & \boxed{9} & - & \boxed{1}\boxed{6} & \times & \boxed{8} & = & \boxed{1}\boxed{6} \\
\boxed{1}\boxed{7} & + & \boxed{3} & : & \boxed{5} & \times & \boxed{8} & = & \boxed{3}\boxed{2} \\
\boxed{\phantom{0}} & + & \boxed{2} & \times & \boxed{\phantom{0}} & - & \boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}} & = & \boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}} \\
\hline
\boxed{3}\boxed{\phantom{0}} & + & \boxed{1}\boxed{6} & + & \boxed{3}\boxed{2} & + & \boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}} & = & \boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}}
\end{array}
$$

Нехай п’яте число першого рядка дорівнює 35. Тоді сума двох перших чисел рядка дорівнює 7, третім числом є 1. Отже, у третьому вертикальному рядку перше число – 1, друге – 16, третє – 5. На частку четвертого числа припадає 10 (= 32 – 1 – 16 – 5). Однак це число одноцифрове. Із суперечності, якої ми дійшли, робимо висновок, що п’яте число першого рядка не може бути 35. Отже, це число 30.

Уже визначено, що третє число першого рядка – не 1. Тому відтворюємо перший рядок: (1 + 2) × 2 × 5 = 30. Відтак заповнюється четвертий рядок: (3 + 2) × 9 – 12 = 33.

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
\boxed{1} & + & \boxed{2} & \times & \boxed{2} & \times & \boxed{5} & = & \boxed{3}\boxed{0} \\
\boxed{9} & + & \boxed{9} & - & \boxed{1}\boxed{6} & \times & \boxed{8} & = & \boxed{1}\boxed{6} \\
\boxed{1}\boxed{7} & + & \boxed{3} & : & \boxed{5} & \times & \boxed{8} & = & \boxed{3}\boxed{2} \\
\boxed{3} & + & \boxed{2} & \times & \boxed{9} & - & \boxed{1}\boxed{2} & = & \boxed{3}\boxed{3} \\
\hline
\boxed{3}\boxed{0} & + & \boxed{1}\boxed{6} & + & \boxed{3}\boxed{2} & + & \boxed{3}\boxed{3} & = & \boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}
\end{array}
$$

## Завдання для самоконтролю

1. Задано числовий ребус:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\square\square & : & \boxed{9} & + & \square & \times & \square & = & \boxed{5}\square \\
\boxed{6} & + & \square & : & \square & \times & \square\boxed{1} & = & \square\square \\
\square & - & \boxed{7} & + & \square & \times & \square & = & \square\square \\
\square & + & \boxed{4} & : & \boxed{6} & \times & \square\square & = & \square\square \\
\hline
\end{array}$$

$$\square\square + \square\square + \square\square + \square\boxed{4} = \square\square\square$$

Яка цифра має міститися у виділеному квадратику?

а) 1;
б) 2;
в) 3;
г) 4.

2. Задано числовий ребус:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\square\square & : & \boxed{9} & + & \square & \times & \square & = & \boxed{5}\square \\
\boxed{6} & + & \square & : & \square & \times & \square\boxed{1} & = & \square\square \\
\square & - & \boxed{7} & + & \square & \times & \square & = & \square\square \\
\square & + & \boxed{4} & : & \boxed{6} & \times & \square\square & = & \square\square \\
\hline
\end{array}$$

$$\square\square + \square\square + \square\square + \square\boxed{4} = \square\square\square$$

Яка цифра має бути у виділеному квадратику?

а) 1;
б) 2;
в) 3;
г) 4.

3. Задано числовий ребус:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\square\square & : & \boxed{9} & + & \square & \times & \square & = & \boxed{5}\square \\
\boxed{6} & + & \square & : & \boxed{\phantom{0}} & \times & \square\boxed{1} & = & \square\square \\
\square & - & \boxed{7} & + & \square & \times & \square & = & \square\square \\
\square & + & \boxed{4} & : & \boxed{6} & \times & \square\square & = & \square\square \\
\hline
\square\square & + & \square\square & + & \square\square & + & \square\boxed{4} & = & \square\square\square
\end{array}
$$

Яка цифра має міститися у виділеному квадратику?

а) 1;
б) 2;
в) 3;
г) 4.

4. У якому порядку мають узгоджуватися дії в рядках і стовпчиках числового ребуса?

а) за правилами пріоритетності арифметичних операцій;
б) сума чисел у стовпчику записується числом під рискою;
в) у рядку дії виконуються послідовно.

## Завдання до пункту

1.

$$\square + \square : \square\square + \square\square = \square\square$$

$$\boxed{2} \times \square - \square\boxed{6} \times \square\square = \square\square$$

$$\square : \boxed{4} + \square \times \square\boxed{9} = \square\boxed{6}$$

$$\square \times \boxed{7} + \square\boxed{3} - \square = \square\square$$

---

$$\square\boxed{9} + \square\square + \square\square + \square\square = \square\square\square$$

2.

$$\boxed{2} \times \square + \square + \square = \square\square$$

$$\square\boxed{4} : \square + \boxed{7} \times \square = \square\boxed{0}$$

$$\square \times \boxed{4} \times \boxed{5} - \square\boxed{2} = \square\square$$

$$\square + \square : \square \times \square\square = \square\square$$

---

$$\square\boxed{5} + \square\square + \square\square + \square\square = \square\square\square$$

3.

$$\square\boxed{4} : \square - \square \times \boxed{7} = \square\boxed{8}$$

$$\square : \boxed{3} + \square + \square\square = \square\square$$

$$\square + \square : \boxed{5} \times \square\square = \square\square$$

$$\square \times \boxed{8} - \square\boxed{5} \times \square = \square\square$$

---

$$\square\square + \square\boxed{1} + \square\square + \square\square = \square\square\square$$

# 5.7. Криптарифми

Криптарифм (cryptarithm) – числовий ребус – головоломка, у якій із числами виконуються арифметичні дії, але цифри зашифровані літерами. Криптарифм вважають хорошим, якщо в результаті шифрування вийшла якась осмислена фраза. Класичним криптарифмом є приклад на додавання, придуманий Генрі Дьюдені на початку минулого століття й опублікований в журналі «Strand Magazine» у 1924 році:

$$SEND + MORE = MONEY.$$

Існує ще одна вимога до правильного криптарифму: він мусить мати єдиний варіант розшифрування.

Як і для числових ребусів, для розв'язання криптарифму використовуються математичні методи перебору та виключення.

Ось деякі основні правила розв'язування криптарифмів:

- кожна буква шифрує лише одну цифру. Різні цифри зашифровані різними літерами;
- якщо в ребусі є зірочки, то на їх місці може бути будь-яка цифра, не обов'язково всіма зірочками шифрують одну цифру;
- якщо в криптарифмі використано більше десяти різних літер, то його неможливо розв'язати;
- число не може починатися з нуля, це стосується крайніх букв ліворуч;
- розв'язуючи криптарифм, пам'ятаємо основні математичні правила про множення на нуль, на одиницю, перенесення чисел у наступний розряд;
- підказка: якщо ребус – це додавання двох чисел і зашифрована сума складається з більшої кількості символів, ніж доданки, то ця сума починається з одиниці;
- звертайте увагу на послідовність арифметичних дій: якщо числовий ребус складається з кількох рядів знаків, він може розв'язуватися як за вертикаллю, так і за горизонталлю;
- не бійтеся помилятися й застосовувати метод перебору: іноді дійсно необхідно зробити вибір між рівноможливими варіантами (як у судоку).

Розв'язання відомого криптарифму Дьюдені.

$$\begin{array}{r} SEND \\ +\,MORE \\ \hline MONEY \end{array}$$

1. Почнемо з крайнього стовпчика ліворуч. Оскільки $9999 + 9999 < 20000$ і $M \neq 0$, то $M = 1$.

2. Тепер переходимо до другого стовпчика. Так само, $999 + 999 < 2000$, тому ми маємо $1 + S + 1 = O + 10$ або $S + 1 = O + 10$, тобто $S = O + 8$ або $S = O + 9$, і $O = 0$ або 1. Оскільки $S$ – одна цифра і $M = 1$, отримуємо, що $O = 0$.

3. У третьому стовпчику, оскільки $E$ не може бути рівним $N$, ми не можемо мати $E + 0 = N$. Тому $1 + E + 0 = N$. Цифра $N$ не може дорівнювати нулю, також $E$ має бути меншим за 9. Тому переносу розряду в цьому стовпчику не відбувається, проте він відбувається в четвертому стовпці.

4. Повертаючись до другого стовпця (який не має перенесеної одиниці з третього), одержуємо $S + 1 = 10$, що означає, що $S = 9$.

5. Тепер ми знаємо, що $1 + E = N$ і що із четвертого стовпця мусить бути перенос розряду. Отже, маємо два випадки: $N + R = E + 10$ або $N + R + 1 = E + 10$. Замінимо $1 + E = N$ і отримаємо $(1 + E) + R = E + 10$, тому $R = 9$ (але 9 уже зайнята!), або $1 + E + R + 1 = E + 10$, тому $R = 8$. Отже, $R = 8$.

6. В останньому стовпчику $D + E = Y$ і має відбутися перенос розряду. Оскільки $Y$ не може бути 0 або 1, то необхідно $D + E \geq 12$. Оскільки 9 і 8 уже зайняті для літер $S$ і $R$, ми можемо мати $5 + 7 = 12$ або $6 + 7 = 13$. Отже, або $D = 7$, або $E = 7$.

7. Якщо $E = 7$, то $E + 1 = N$ і $N = 8$, що неможливо, адже $R = 8$. Тому $D = 7$, що означає, що $E$ – це 5 або 6.

8. Якщо $E = 6$, то $N = 7$, що неможливо, бо $D = 7$. Отже, $E = 5$ і $N = 6$. І це означає, що $D + E = 7 + 5 = 12$, а значить, $Y = 2$.

Задача розв'язана.

$SEND + MORE = 9567 + 1085 = 10652 = MONEY$

Криптарифми є засобом формування аналітичного і стратегічного мислення, уваги й пам'яті. Можна сміливо давати такі задачі, щоб налаштувати учнів на плідну математичну роботу. Деякі із запозичених в інтернеті криптарифмів наведемо нижче в завданнях.

## Завдання для самоконтролю

1. Оберіть властивості криптарифму:
   а) має єдину розшифровку;
   б) різні букви шифрують різні цифри;
   в) замість цифр можуть використовуватися зображення;
   г) якщо криптарифмом зашифроване додавання двох чотирицифрових чисел, то перша цифра результату буде 1;
   д) перша цифра кожного із чисел ребуса не може бути нулем.

2. Задано такий криптарифм: *Я* + *ЯК* = *КОК*. Яке число ховається за доданком «*ЯК*»?
   а) 99;
   б) 94;
   в) 92;
   г) криптарифм не має рішень.

3. Задано такий криптарифм: *ГНОМ* + *ГНОМ* = *КРУЧА*. Яка цифра зашифрована літерою «*К*»?
   а) 1;
   б) 2;
   в) 5;
   г) криптарифм не має рішень.

4. Задано такий криптарифм: *ДВА* + *ДВА* = *ЧОТИРИ*. Яка цифра зашифрована літерою «*Д*»?
   а) 2;
   б) 9;
   в) 8;
   г) криптарифм не має рішень.

## Завдання до пункту

1. *КНИГА* + *КНИГА* + *КНИГА* = *НАУКА*
2. *КОКА* + *КОЛА* = *ВОДА*
3. *АТАКА* + *УДАР* + *УДАР* = *НОКАУТ*
4. *ДРАМА* + *ДРАМА* = *ТЕАТР*
5. *ВАГ0Н* + *ВАГ0Н* = *П0ТЯГ* (там стоїть 0; відкрите питання із зірочкою: якби там не була зафіксована цифра нуль, скільки варіантів розв'язку мав би цей криптарифм?)
6. *BB* + *BB* = *ABC*
7. *SATURN* + *URANUS* = *PLANETS*
8. *BASE* + *BALL* = *GAMES*
9. *SEVEN* + *SEVEN* + *SIX* = *TWENTY*
10. *BLACK* + *GREEN* = *ORANGE*
11. *MAN* + *WOMAN* = *CH1LD*
12. *EAT* + *THAT* = *APPLE*
13. 

$$
\begin{array}{r}
SEVEN \\
SEVEN \\
SEVEN \\
+\ SEVEN \\
SEVEN \\
SEVEN \\
SEVEN \\
\hline
FORTY9
\end{array}
$$

## Корисні відео

# 5.8. Теорія графів у головоломках

Є головоломки, розв'язання яких передбачає застосування теорії графів. Насамперед це задачі на так звані *ойлерові обходи*, тобто на пошук такого шляху, у якому зустрічаються всі ребра графа лише один раз. Наприклад, чи можна намалювати цю фігуру (*рис. 49*), не відриваючи олівця від паперу й не проводячи поверх уже намальованого (точки перетину не враховуються)?

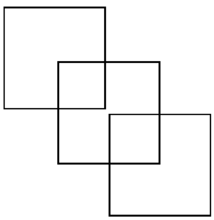
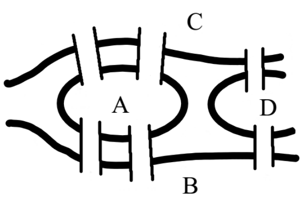


Рис. 49. Фігура, яку можна намалювати, не відриваючи олівця від паперу й не проводячи поверх уже намальованого

У таких задачах зрозуміла умова (**правило 1**), але далеко не інтуїтивне рішення (**правило 2**). Здається, що виконати умови задачі неможливо. Для того, щоб за **правилом 3** зробити математичну модель задачі, нам знадобляться деякі знання з теорії графів.

Теорія графів є, мабуть, єдиним розділом математики, який має як точний рік свого народження – 1736, так і свого «батька» – Леонарда Ойлера. Першою теоретико-графовою задачею вважається задача про мости Кенігсберга (*рис. 50 а*): чи можна, почавши обхід із певної ділянки суші, пройти всіма мостами Кенігсберга лише один раз і повернутися в те саме місце, звідки почали рухатися?



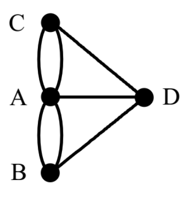




Рис. 50. Умовна схема розташування мостів Кенігсберга (а) та її інтерпретація мовою графів (б)

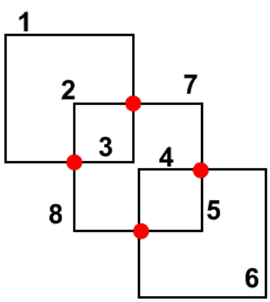
Хоч задача була доволі простою на вигляд, ніхто не міг її розв'язати. І тільки Ойлер строго математично обґрунтував, що виконати це завдання неможливо. Як йому вдалося перейти від задачі реального життя до математичної абстракції? Він позначив частини суші точками (вершинами), а мости – дугами (ребрами): утворилася модель міста – граф, у якому не було нічого зайвого, лише ключові дані для розв'язання задачі (*рис. 50 б*). Граф як математичний об'єкт виявився настільки зручним і корисним для розв'язання теоретичних і практичних завдань, що теорія розвинулася та активно розвивається й до наших днів. Справа в тому, що складність структури графа відповідає можливостям нашого мозку: вона наочна і зрозуміло влаштована, але досить багата, щоб вловлювати багато нетривіальних явищ. Якщо йдеться про їх застосування, то відразу ж на думку спадає інтернет, карта доріг, покриття мобільного зв'язку тощо. В основах пошукових сервісів, таких як Google, лежать алгоритми на графах. Крім Computer Science, графи активно використовуються в біоінформатиці, хімії, соціології та економіці.

Повернімося до задачі.

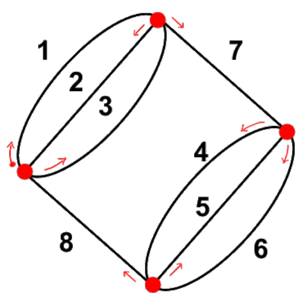
Позначимо точки перетину ліній вершинами графа, тоді лінії, що не перетинаються, є його ребрами (*рис. 51*).

Пронумерувавши їх (*рис. 51 а*) і зобразивши граф більш зручним чином (*рис. 51 б*), бачимо, що ця задача має безліч розв'язків. Один із них – маршрут 1–2–3–7–4–5–6–8. Якщо граф у задачі має замкнений маршрут, що містить кожне ребро лише один раз, то такий граф називається *ойлеровим*. А *зв'язним* графом називається граф, в якому між будь-якою парою вершин існує шлях.

Варто пам'ятати, що граф є не геометричним об'єктом, а парою множин – вершин і ребер, де кожне ребро задається парою вершин, які воно з'єднує. Отже, граф відображає структуру зв'язків між елементами, а не їх взаєморозташування.



а



б

Рис. 51. Фігури з позначеними точками перетину

А що робити, якщо на рисунку дуже багато ліній і дуже багато перетинів (*рис. 52*)?

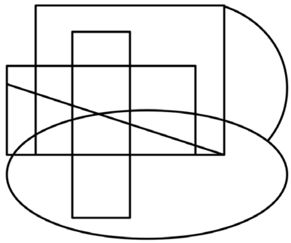


Рис. 52. Заплутана фігура
для задачі про обхід

Для розв'язання задач нам знадобиться теорема Ойлера. Введемо поняття *степеня* вершини графа. Це число, яке ставиться у відповідність вершині графа і дорівнює кількості ребер, що виходять з неї.

---

**Теорема Ойлера**:
Зв'язний граф є ойлеровим тоді й тільки тоді, коли степінь кожної його вершини парний.

---

Цей факт інтуїтивно обґрунтовується тим, що ми маємо з вершини «вийти» стільки само разів, скільки й «зайти». Для того щоб розв'язати задачу малювання фігур із перетинами, необхідно точки перетину позначити вершинами графа, а кути «повипрямляти», щоб одержати справжнісінький граф. Тепер, якщо в ньому є хоч одна вершина непарного степеня, то початкову фігуру неможливо намалювати, не відриваючи олівця від паперу й не проводячи поверх уже намальованого.

Інші головоломні задачі, у яких застосовується теорія графів, – задачі на лему про рукостискання.

---

**Лема про рукостискання**:
Сума степенів вершин графа дорівнює подвоєній кількості його ребер.

---

**Задача:**
У Казковому Королівстві є 29 міст, між деякими з них є дороги. Доведіть, що є місто, сполучене безпосередньо з парною кількістю інших міст.

Наведемо приклади таких задач.

Щоб розв'язати задачу, припустимо, що всі міста сполучені лише з непарною кількістю інших міст. Зобразимо країну як граф, міста – це вершини, дороги – ребра. Оскільки 29 – непарне число, то сума степенів усіх вершин – це сума непарної кількості непарних чисел, що є непарним числом. За лемою про рукостискання такого не може бути. Отже, у Казковому Королівстві обов'язково знайдеться місто, сполучене безпосередньо з парною кількістю інших міст.

Зауважимо, що ми приходимо до протиріччя через те, що кількість міст є непарним числом, отже, ви можете підставити замість 29 будь-яке інше непарне число.

**Задача:**
Міністерству шляхів і мостів Казкового Королівства поставили завдання: з'єднати мостами 17 маленьких островів.

**Питання:**
Чи можна острови з'єднати мостами так, щоб кожний з островів було з'єднано рівно з трьома іншими різними островами?

Відповідь: не можна. Якби ми змогли так з'єднати острови, то, позначивши острови вершинами, а мости – ребрами графа, одержали б суперечність із лемою про рукостискання: сума степенів вершин графа була б непарним числом.

Також відомою є задача Рамсея:

**Задача Рамсея:**
Доведіть, що в будь-якій компанії з шести людей знайдуться або троє попарно знайомих, або троє попарно незнайомих осіб.

Продемонструємо розв'язання задачі. Позначимо шістьох людей вершинами графа і проведемо між ними всі можливі ребра (*рис. 53*).

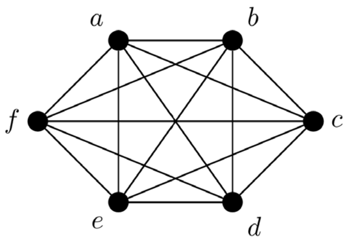



Рис. 53. Повний граф на шести вершинах як модель для задачі Рамсея

Синім кольором будемо позначати ребро між особами, якщо вони не знайомі,червоним – якщо знайомі. Розглянемо довільну особу, наприклад $a$. Від неї відходять 5 ребер. За принципом Діріхле принаймні три ребра мають однаковий колір. Нехай цей колір – червоний. Нехай кінці цих червоних ребер – $c$, $d$, $e$ (*рис. 54*).

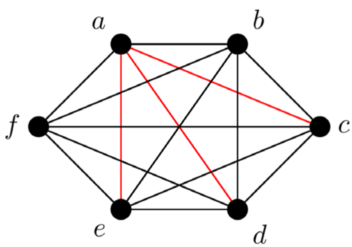



Рис. 54. За принципом Діріхле має бути три червоні суміжні ребра

Якщо $cd$, або $de$, або $ce$ також червоні, то отримуємо червоний трикутник, тобто троє попарно знайомих людей (*рис. 55*).

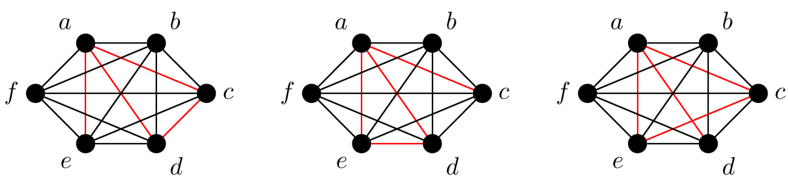


Рис. 55. З'являється червоний трикутник

Якщо ж ні $cd$, ні $de$, ні $ce$ не червоні, то вони сині, і утворюють синій трикутник – троє попарно незнайомих людей (*рис. 56*).

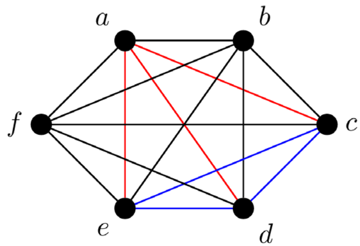



Рис. 56. Якщо ребра не червоні, то вони сині. Маємо синій трикутник

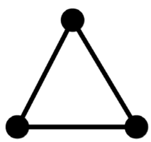
Що і треба було довести.

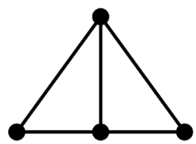
## Завдання для самоконтролю

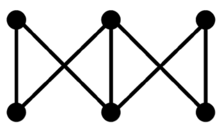
1. Хто з математиків є «батьком» теорії графів?
   а) Карл Фрідріх Гаусс;
   б) Жозеф Луї Лагранж;
   в) Леонард Ойлер;
   г) Френк Рамсей.

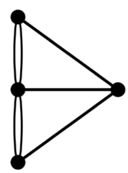
2. Який рік вважається роком народження теорії графів?
   а) 1863;
   б) 1732;
   в) 1736.

3. Що із зображеного – схематичний граф мостів Кенігсберга?

а)


б)


в)


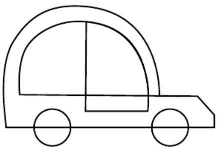
г)


4. Які задачі можна розв'язувати за допомогою теорії графів?
   а) накреслити фігуру без самоперетинів;
   б) накреслити фігуру, не відриваючи олівця від паперу;
   в) текстові задачі на взаємозв'язки;
   г) перевірити фігуру на зв'язність.

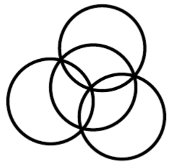
### Завдання до пункту

1. Чи можна намалювати ці фігури, не відриваючи олівця від паперу й не проводячи поверх уже намальованого (точки перетину не рахуються)? Якщо так, то намалюйте.

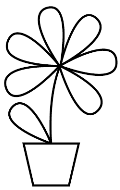
а)



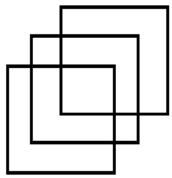
г)



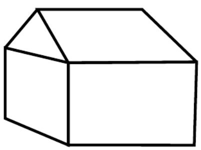
б)



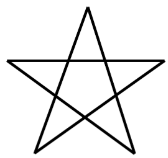
д)



в)



е)



2. Одного дня друзі зібралися пограти в шахи. Було зіграно кілька партій. Доведіть, що кількість осіб, які зіграли непарну кількість партій, парна.

3. Доведіть, що в будь-якому графі з $n$ вершинами $(n > 2)$ завжди знайдуться принаймні дві вершини з однаковими степенями.

4. На Великому озері Казкового Королівства є 7 островів. З кожного острова виходить один, п’ять чи три мости. Чи завжди існує міст, що веде на берег озера?

5. У Казковому Королівстві всього 30 міністрів. І не всі спілкуються один з одним. Чи може бути таке, що 9 з них спілку-

ються з трьома іншими міністрами, 11 – із чотирма міністрами, а 10 – із п'ятьма міністрами?

6. У товаристві з n осіб кожен знайомий рівно з k іншими особами. Чи можливе таке товариство при:
   а) $n = 5,\ k = 2$;
   б) $n = 5,\ k = 3$;
   в) $n = 2m,\ k = 1$;
   г) $n = 2m,\ k = 3$?

7. Серед чотирьох людей немає трьох з однаковими іменами, однаковими прізвищами чи однаковими по батькові, але в будь-яких двох людей збігаються або ім’я, або прізвище, або по батькові. Чи може таке бути?

**Корисні відео**

# 5.9. Математичні ігри

*Математика – це не дотримання правил.*
*Це радше гра, дослідження, боротьба та пошук ключів.*
*Айнштайн називав гру найвищою формою дослідження.*
*Викладач, який дозволяє учням грати з математикою,*
*дарує їм володіння цією наукою.*
*Д. Фінкель*

Ми вже говорили в підрозділі 4.2.1 про вміння формулювати гіпотези, виявляти і передбачувати закономірності навколо нас. У математиці такі патерни та псевдопатерни виникають тоді, коли ми маємо справу з іграми. Ігри навчають бути сміливими і розуміти причинно-наслідкові зв'язки.

Запропонуйте учням пограти в китайську народну гру (а точніше, сім'ю ігор) під назвою *нім* (втім, назва була дана грі аж у XX сторіччі). Мета гри – знайти виграшну стратегію незалежно від ходів суперника. Суть гри така: є два гравці (А і В) та купка камінців. Правилами визначається, скільки камінців може взяти гравець за один хід. Переможцем (чи переможеним) є той, кому дістанеться останній камінець. Сформуйте з учнів дві команди із завданням знайти таку стратегію.

Можна сформулювати завдання гри у вигляді задачі.

---

**Задача:**
Нехай у нас є 100 камінців. Кожен гравець за хід може взяти 1, 2, 3, 4 або 5 камінців. Виграє той, хто забере останній камінець.

---

Найчастіше учні, яким пропонують розв'язати таку задачу, починають розглядати часткові випадки і вказувати ймовірності виграшу, що залежить від ходів суперника. Вони забувають, що суперник також хоче виграти і робить щоразу найкращий хід, а також, що виграшна стратегія має працювати на 100% у будь-якому випадку.

Якщо ж пошуки виграшної стратегії не вдалися, то можна розглянути один із найважливіших методів розв'язання подібних задач:

стратегію міркування назад. Для того щоб першому гравцеві забрати останній камінець, треба, щоб після останнього ходу другого гравця залишився принаймні один камінець. Тобто достатньо того, щоб другому гравцеві на останній хід дісталося 6 камінців. І нам важливо, що саме 6. Якби залишилося 7, другий гравець міг би взяти 1 камінець, і перший би програв. Тому це є і необхідною умовою. А щоб досягти 6, необхідно аналогічним чином забезпечити на попередньому ході залишок у 12 камінців. Така стратегія і є виграшною для першого гравця – тримати кількість камінців кратною 6. Тому першим ходом має бути зменшення початкової кількості – 100 – на 4 камінці, а далі – діяти, залежно від ходів другого, залишаючи в купі число камінців, кратне 6.

Закономірності в іграх є дуже практичним підходом до головоломок, оскільки їх можна застосовувати у багатьох типах задач. Як ми щойно побачили, вони допомогли нам сформувати виграшну стратегію. Після цього можна перейти до ймовірнісних ігор.

---

**Задача:**

У тенісному турнірі беруть участь 512 спортсменів, двоє з яких – близнюки. У першому раунді 256 ігор, оскільки в кожній грі грають по два гравці. Переможці просуваються до другого раунду, який складається зі 128 ігор, тощо.

**Питання:**

Якщо припустити, що кожен гравець має 50/50 шансів виграти будь-яку гру проти будь-якого суперника, яка ймовірність того, що близнюки зіграють один проти одного на якомусь етапі турніру?

---

Коли ми шукаємо закономірність у послідовності, базуючись на певній вибірці, зручно почати з малої вибірки й поступово розширювати її, щоб розпізнати закономірність. Окреслимо нашу задачу, почавши з мінімальної кількості гравців у турнірі – 2. У першому раунді ми випадковим чином розподіляємо, хто з ким гратиме, і після матчу залишаємо лише переможців. Для переходу на наступний раунд необхідно мати парне число гравців, тому бачимо, що в кожному раунді число гравців буде степенем двійки – $2^n$. Як тільки залишиться один гравець, матимемо переможця.

Отже, завданням є знайти ймовірність $p$ зустрічі двох близнюків на турнірі, яка є функцією від $n$, де кількість учасників дорівнює $2^n$. Як же обчислити цю ймовірність? Почнемо з найменшої кількості гравців і будемо збільшувати, щоб знайти яку-небудь закономірність.

- Якщо $n = 1$, то $p = 1$, бо якщо гравців усього двоє – це близнюки.
- Якщо $n = 2$, то $p = \frac{1}{2}$, бо ймовірність, коли один близнюк грає проти іншого, в першому раунді становить $\frac{1}{3}$, проти когось іншого – $\frac{2}{3}$, і в останньому випадку вони зустрінуться в другому раунді з імовірністю $\frac{1}{4}$ (вони обидва мають виграти в першому з імовірністю $\frac{1}{2}$). Отже, загальна ймовірність того, що близнюки зустрінуться на турнірі, становить
$$p = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$
- Якщо $n = 3$, то нам уже необхідно розглянути три випадки:
I. Близнюки грають один проти одного в першому раунді. Оскільки гравців 8, шукана ймовірність дорівнює $\frac{1}{7}$.
II. Близнюки грають один проти одного в другому раунді. Необхідно, щоб трапилися такі події: а) вони не зустрілися в першому раунді; б) вони обоє виграли в першому раунді; в) вони зустрілися в другому раунді.
$$p = \frac{6}{7} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{14}.$$
III. Близнюки грають один проти одного в третьому раунді: а) вони не зустрілися в першому раунді; б) вони обоє виграли в першому раунді; в) вони не зустрілися в другому раунді; г) вони обоє виграли в другому раунді; д) вони зустрілися в третьому раунді.
$$p = \frac{6}{7} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{28}.$$
Додавши ці три ймовірності, одержуємо загальну ймовірність зустрічі близнюків при $n = 3$: $p(3) = \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28} = \frac{1}{4}$.
Отже, $p(1) = 1$; $p(2) = \frac{1}{2}$; $p(3) = \frac{1}{4}$.
Природно припустити, що $p(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. Це дійсно правда, і доводиться за допомогою методу математичної індукції.

**Ремарка:** Цікавим є випадок, коли відомо, що один із близнюків грає краще за іншого, чи коли відомі ймовірності виграшу кожного гравця. Тоді задача переходить із категорії «виявлення закономірностей» у категорію «симуляції».

Наступний приклад більш яскраво демонструє, як наші висновки щодо закономірності можуть змінюватися залежно від того, як багато результатів ми розглядаємо.

**Задача:**
На колі позначено $n$ точок, кожна з яких з'єднана хордами з усіма іншими.

**Питання:**
На скільки частин розбитий круг?

На *рис. 57* показаний результат для $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

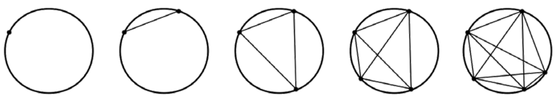


Рис. 57. Поділ круга хордами на частини

| $n$ | Кількість частин |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 2 |
| 3 | 4 |
| 4 | 8 |
| 5 | 16 |

Таблиця натякає нам на те, що кількість частин зростає, як $2^{n-1}$, і додавання 6-ї точки дає 32 частини. Насправді, маючи 6 точок, круг ділиться на 31 частину (*рис. 58*). Для правильного визначення кількості частин круга використовуємо формулу Мосера [51].

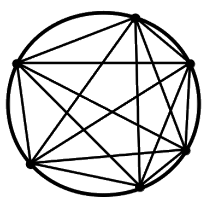


Рис. 58. Проведено всі можливі хорди між 6 точками на колі, круг ділиться на 31 частину

$$\frac{(n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24)}{24}$$

Після розв'язання математичних задач звертаємо увагу на те, що люди зазвичай схильні вигадувати закономірності там, де їх немає. Цю особливість використовують для введення в оману, контррозвідки, розваги, створення конкурентних ситуацій.

Для ілюстрації цієї тези можна згадати кумедну історію, що сталася з «Моцартом шахів» Хосе Раулем Капабланкою, який мав чудове почуття гумору. Одного разу він їхав поїздом, який раптово десь зупинився. Було оголошено, що необхідно почекати кілька годин, щоб рухатися далі. До Капабланки підійшов залізничник і запропонував йому зіграти в шахи. Чемпіон світу заявив, що він не вміє грати, тому залізничник із радістю навчив його правил. Потім він сказав: *«Оскільки Ви – новачок, а я – досвідчений гравець, то буде чесно, якщо я гратиму без свого ферзя»*. Вони зіграли десять разів, і Капабланка спеціально піддавався – програв усі ігри. Після десятої гри він сказав: *«Знаєте, здається, я зрозумів, що найважливіше в шахах! Зіграймо ще 10 разів, але тепер я гратиму без ферзя, а Ви – з повним набором»*. Залізничник дуже здивувався, але погодився. Вони зіграли ще десять партій, і тепер Капабланка виграв їх усі. Він сказав спантеличеному залізничнику: *«Я знав це із самого початку: набагато легше виграти в шахи, якщо грати без ферзя!»*.

Не дивно, що багато головоломок побудовані таким чином, щоб ввести нас в оману «неправильною» закономірністю. Це і є, зрештою, природа головоломки.

## Завдання для самоконтролю

1. Гра нім походить з:
   а) Кореї;
   б) Китаю;
   в) Німеччини;
   г) Греції.

2. Два гравці – А і Б – грають в нім за такими правилами: є дві купки із сірниками. У першій купці 5 сірників, у другій – 7. За один хід дозволяється взяти довільну кількість сірників, але лише з однієї купки. Для якого з гравців є виграшна стратегія, якщо першим ходить А?
   а) А;
   б) Б;
   в) неможливо визначити.

3. Два гравці – А і Б – грають в нім за такими правилами: є три купки з камінцями, у першій купці 2 камінці, у другій – 8, у третій – 13. За один хід дозволяється взяти довільну кількість камінців, але лише з однієї купки. Гравець А починає гру і першим ходом забирає з третьої купки три камінці. Чи зможе він після цього виграти в грі?
   а) так;
   б) ні;
   в) неможливо визначити.

4. Капабланка ввів в оману залізничника, бо:
   а) замінив ферзів;
   б) запропонував залізничнику гроші;
   в) створив штучну закономірність своєю грою;
   г) сказав, що білими грати легше, ніж чорними.

### Завдання до пункту

Як вправу до цього пункту запропонуйте зробити власноруч стратегічну гру – корейські шахи «Коно» і влаштувати турнір. Шаблон ігрового поля ви знайдете в підрозділі 8.5. Мета гри полягає у тому, щоб перемістити всі фішки гравця в початкові місця розташування фішок суперника. Гравці по черзі пересувають свої фішки по діагоналі на сусідню порожню позицію. Перемагає гравець, який першим перемістить всі свої фішки на стартові поля противника. Подивитися на процес гри можна тут:

### Корисні відео

# 5.10. Математичні парадокси

### Парадокс Монті Голла

У цьому розділі ми знов повернемося до парадоксів, але математичних. Формат уроку, як і в підрозділі 4.3.1, також передбачає дискусію, обговорення та спільний пошук причини парадоксу.

Парадокс Монті Голла є не парадоксом, а лише неочікуваним контрінтуїтивним явищем, що було зареєстроване на шоу ведучого Монті Голла. Гра полягає в тому, що глядачеві демонструють троє замкнених дверей і повідомляють, що за одними дверима стоїть новенький автомобіль, а за двома іншими – по козі. Пропонується вибрати одні з дверей. Коли глядач робить свій вибір, ведучий, який знає, за якими дверима що, серед двох дверей, що залишилися, відчиняє двері з козою та питає, чи хоче глядач змінити свій вибір (*рис. 59*). Чи варто глядачеві змінювати свій вибір?

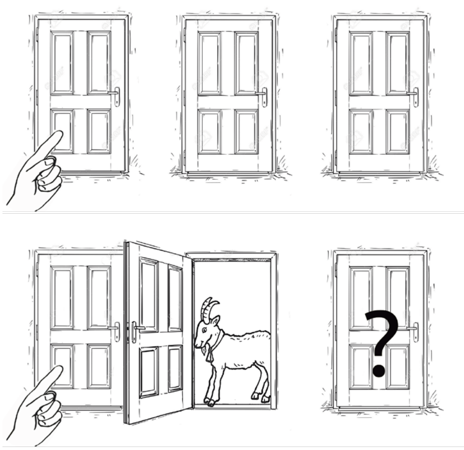



Рис. 59. Парадокс Монті Голла. Чи варто змінювати вибір?

Скористаємося правилами розв’язання головоломок. За **правилом 1** нескладно переконатися, що всі поняття й умова зрозумілі. Оскільки інтуїтивно здається, що немає різниці, змінити свій вибір чи ні, то, керуючись **правилом 2**, перевіряти припущення слід математичними розрахунками. Математична модель (**правило 3**) у цій ситуації є ймовірнісною.

Що підказує інтуїція? Що в будь-якому разі ймовірність виграти є $\frac{1}{3}$. І це і є найбільшою помилкою тих, хто бере участь у грі. Треба запитати себе: а що ж мені дав той факт, що ведучий, *знаючи, де знаходяться кози, а де автомобіль*, відчинив двері з козою? Чи змінило це мої шанси на виграш?

Виявляється, так. Імовірність виграти автомобіль зросла вдвічі, і правильною відповіддю на питання гри є «так, потрібно змінити вибір на інші замкнені двері». Тепер пояснимо, чому.

Логічно, що при виборі дверей навмання ймовірність указати на автомобіль дорівнює $\frac{1}{3}$ (автомобіль один, дверей троє). Значить, імовірність того, що автомобіль за одними з двох інших дверей, дорівнює $\frac{2}{3}$. Коли ведучий відчиняє двері з козою, імовірність $\frac{2}{3}$ припадає на останні двері, на які й потрібно змінити свій вибір глядачеві.

Для того щоб зрозуміти сенс цієї гри і відчути цей несподіваний результат, пограйте в неї на занятті.

1. Озвучте правила гри.

2. Запитайте, яку стратегію гравці вважають правильною.

3. Безпосередньо гра: кожен гравець по черзі стає ведучим – ховає в одній зі шкатулок шматок паперу, а інші залишає пустими. І грає з іншим, хто може або змінити шкатулку, або ні.

4. Результати фіксуються.

5. Гравець, який відгадував, на наступному кроці виконує роль ведучого.

6. Якщо все зроблено відповідно до правил, то за результатами має бути перемога стратегії зміни шкатулки.

## Парадокс очікування

Варто звернути увагу на такий життєвий феномен, як парадокс очікування. Уявімо ситуацію: ви прийшли на зупинку і чекаєте на автобус. Коли саме він прийде, залежить від непередбачуваних дорожніх ситуацій. Нам відомо, що в графіку руху автобусів визначено 10-хвилинний інтервал. Скільки в середньому доведеться чекати на автобус?

На перший погляд здається, що всі поняття зрозумілі (**правило 1**), інтуїція підказує відповідь – 5 хв (**правило 2**), залишається підтвердити свою здогадку математично (**правило 3**).

Якщо ми випадково приходимо на зупинку і не знаємо, коли від'їхав черговий автобус, то в середньому до наступного автобуса залишиться половина часу $\frac{10}{2} = 5$ хвилин. Але це було би правильним, якби автобуси ходили з інтервалом *рівно* 10 хвилин без непередбачуваних дорожніх ситуацій (*рис. 60*).

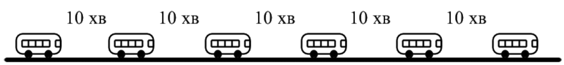



Рис. 60. Реальний інтервал руху збігається із середнім інтервалом

Якщо в середньому графік руху передбачає 10-хвилинний інтервал, то розгляньмо таку ситуацію, коли автобуси приходять «через раз»: то через 1 хвилину, то через 19 (кожен другий потрапляє в затор). Середній час між автобусами – 10 хв (*рис. 61*).

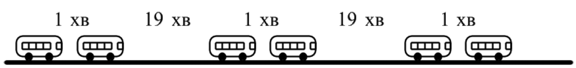



Рис. 61. Реальний інтервал руху не збігається із середнім інтервалом

Імовірність прийти на зупинку під час 19-хвилинного інтервалу в 19 разів вища, ніж під час однохвилинного. Пасажир у 19 разів частіше потраплятиме в інтервал, коли автобус затримується. Тоді середній час очікування для пасажира буде $(9{,}5 \times 19 + 0{,}5 \times 1)/20 = 9$ хвилин. Таке очікування майже вдвічі довше за 5 хвилин, які очікувалися інтуїтивно.

Якщо автобуси ходять нерегулярно, то є інтервали більші та менші за середнє значення. Але ймовірність прийти на зупинку під час довшого інтервалу вища.

Тому для людини, яка приходить на зупинку, довші інтервали між автобусами мають більшу вагу в його «середньому часі очікування». Отже, «парадокс» виникає через різне розуміння середнього значення в людини, яка приходить на зупинку чекати автобус, і у спостерігача, який весь час стоїть на зупинці і записує інтервали між автобусами.

Треба бути впевненим, що **правило 1** дотримане до кінця.

## Парадокс Арістотеля

Парадокс Арістотеля є одним із відомих геометричних парадоксів, що виник на межі геометрії та фізики. Він формулюється так: розгляньмо два з'єднаних колеса, що мають спільну вісь, проте одне розташовується всередині іншого (*рис. 62*). Колеса починають котитися по площині без проковзування (котиться лише зовнішнє, бо воно більше). Коли велике колесо робить повний оберт, тоді й мале робить повний оберт, бо воно міцно з'єднане з більшим. Колеса «пройшли» однаковий шлях, тому довжини їх кіл та їх радіуси рівні.

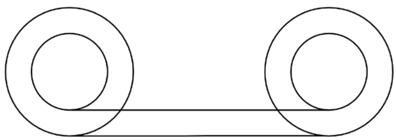


Рис. 62. Парадокс Арістотеля

Насправді ми маємо невідповідність фізичного світу й математичного. Це явище демонструє взаємно-однозначну відповідність між точками двох кіл, а коли ми маємо справу з нескінченністю, то фізика стає врозріз із математикою. Помилка полягає в тому, що ми вважаємо, що колеса котяться без проковзування. Якби ми зробили ще одну колію для малого колеса, то помітили б, що колесо ковзає вперед. Якби ми вимагали, щоб мале колесо котилося без ковзання, то велике прокручувалось би на місці на деяких ділянках свого шляху.

### Парадокс «зникнення клітинки»

Це більше фокус, аніж протиріччя. Для цього заздалегідь зробимо модель цього парадокса-фокуса. Модель – трикутник, складений із кольорових частин, як показано на верхній половині *рис. 63*.

Виявляється, якщо переставити ці частини інакше, вийде той самий трикутник, але без однієї клітинки (див. *рис. 63*)! Ніякої магії тут немає, просто помилкою було вважати «гіпотенузу» гіпотенузою, прямим відрізком. Варто звернути увагу на те, що тангенси менших кутів червоного та блакитного трикутників різні, що створює «вгин», а потім «вигин» псевдогіпотенузи великого трикутника. Така різниця і дає нам «зайву» клітинку.

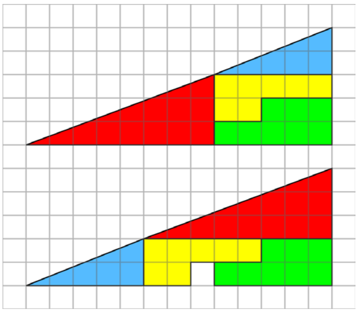


Рис. 63. «Зникнення клітинки»

## Геометричний парадокс Льюїса Керрола (*)

Продемонструємо геометричний парадокс Льюїса Керрола про те, що тупий кут іноді дорівнює прямому.

Нехай $ABCD$ – квадрат (*рис. 64*). Розділимо $AB$ навпіл і проведемо через точку поділу $E$ пряму, перпендикулярну до $AB$. Вона перетне протилежну сторону квадрата $DC$ у точці $F$. При цьому $DF = FC$.

Із вершини $C$ відкладемо відрізок $CG = CB$. З'єднаємо $A$ і $G$ відрізком і поділимо його навпіл точкою $H$. Із точки $H$ проведемо перпендикуляр до $AG$, який перетне $EF$ у точці $K$, бо $AG$ і $AB$ не паралельні, отже, й перпендикуляри до них не паралельні.

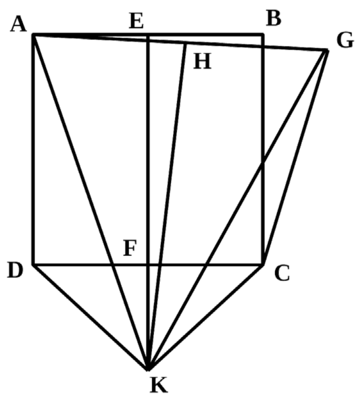



Рис. 64. Кути $GCD$ і $ADC$ рівні

З'єднаємо $K$ з $D, A, G$ і $C$. Трикутники $KAH$ і $KGH$ рівні між собою, оскільки вони мають спільну сторону $HK$, $AH = HG$, а кути при вершині $H$ прямі. Отже, $KA = KG$.

Трикутники $KDF$ і $KCF$ також рівні між собою, оскільки вони мають спільну сторону $FK$, $DF = FC$, а кути при вершині $F$ прямі.

Отже, $KD = KC$ і кут $KDC$ дорівнює куту $KCD$.

Крім того, $DA = CB = CG$. Отже, сторони трикутників $KDA$ і $KCG$ рівні між собою, тому кути $KDA$ і $KCG$ рівні. Віднімемо від них рівні кути $KDC$ і $KCD$. Ці різниці також будуть рівні між собою, тобто кут $GCD$ дорівнює куту $ADC$. Але ж $GCD$ є тупим кутом, а $ADC$ – прямим.

Отже, іноді тупий кут дорівнює прямому, що й треба було довести.

**Розгадка.** Помилка тут полягає в тому, що, якщо правильно побудувати рисунок, точка $K$ виявиться значно нижче від прямої $DC$, і настільки, що, коли ми з'єднаємо $K$ і $G$, то $KG$ повністю лежатиме поза квадратом. Це робить вищенаведене доведення цілком неприйнятним.

Наступна «парадоксальна» **теорема** теж може здивувати.

Якщо в чотирикутнику $ABCD$ кут $A$ дорівнює куту $C$, а сторона $AB$ дорівнює стороні $CD$, то цей чотирикутник – паралелограм (*рис. 65*).

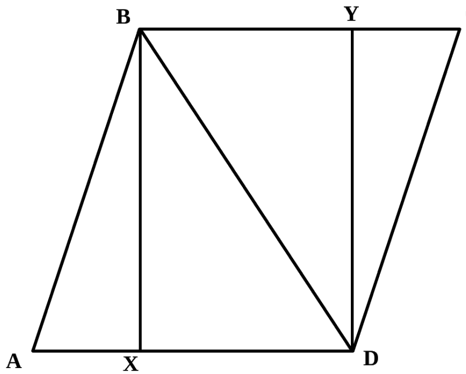



Рис. 65. Паралелограм за двома кутами й сторонами

П. Холсі опублікував доведення цього твердження в лондонській «*The Mathematical Gazette*» (Oct. 1959, p. 200–205). У чотирикутнику на рисунку проведемо відрізки $BX \perp AD$ і $DY \perp BC$. Сполучимо точки $B$ і $D$. Трикутники $ABX$ і $CYD$ рівні, отже, $BX = DY$, $AX = CY$. Тож трикутники $BXD$ і $DYB$ рівні, тому $XD = YB$. Але оскільки $AB = CD$, $AD = BC$, то чотирикутник $ABCD$ мусить бути паралелограмом.

Контрприкладом є будь-який чотирикутник, у якого дотримано умови теореми, проте рівно одна з точок $X$ чи $Y$ лежить на *продовженні* сторони. Тоді не можна застосовувати міркування, наведені вище (*рис. 66*).

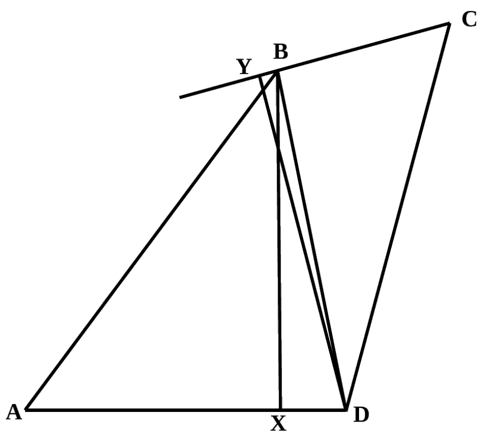



Рис. 66. Для такого чотирикутника міркування не підходять

### Число $\pi$ дорівнює 2 (*)

Геометрична побудова на *рис. 67* заснована на використанні відомого в країнах Сходу символа «*інь і янь*».

Нехай діаметр $AB$ зображеного кола дорівнює 2. Оскільки довжина кола дорівнює добутку діаметра на число $\pi$, то довжина найбільшого півкола з точки $A$ до точки $B$ становить $\frac{2\pi}{2} = \pi$. Довжина кожного з двох наступних менших півкіл, що становлять хвилясту лінію, яка відділяє «інь» від «янь», дорівнює $\frac{\pi}{2}$, тому їх сумарна довжина є також $\pi$. Аналогічним чином сума довжин наступних за меншістю чотирьох півкіл (довжина кожної з них рівна $\frac{\pi}{4}$) буде рівною $\pi$, як і сума наступних 8 ще менших півкіл. Цей процес можна продовжувати нескінченно.

Напівкола ставатимуть усе меншими, кількість їх буде необмежено збільшуватися, проте сума цих довжин завжди залишатиметься $\pi$. Хвиляста лінія в такому разі прямує до діаметра $AB$. Припустімо, що це повторюється нескінченну кількість разів. При цьому хвиляста лінія завжди має зберігати довжину рівною $\pi$. Якщо радіуси півкіл прямують до нуля, то зрештою ці півкола збігатимуться з діаметром $AB$, довжина якого дорівнює 2.

Отже, $\pi$ дорівнює 2.

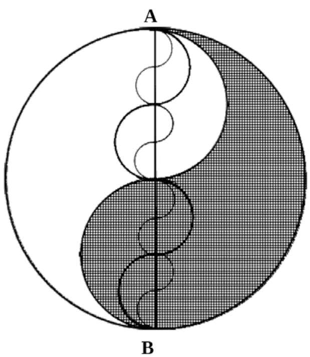



Рис. 67. $\pi$ дорівнює 2

**Розгадка.** Справді, коли півкола стають меншими, їх радіуси прямують до нуля, тому хвилясту лінію можна зробити як завгодно близькою до діаметра $AB$. Однак на жодному з кроків ці півкола не змінюють своєї форми. І оскільки вони завжди залишаються півколами, то якими б маленькими вони не були, їх загальна довжина завжди дорівнюватиме $\pi$. Це яскравий приклад того, що елементи нескінченного збіжного ряду можуть мати властивості, що сильно відрізняються від властивостей суми цього ряду.

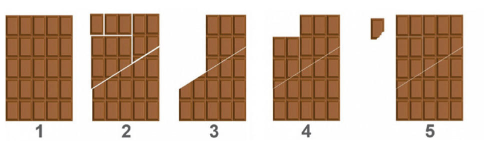
## Завдання для самоконтролю

1. Чи варто змінювати вибір у грі Монті Голла, якщо ви хочете отримати козу?
   а) так;
   б) ні;
   в) не має значення;
   г) залежить від переконливості ведучого.

2. У чому причина парадоксу очікування?
   а) у помилковому розумінні поняття середнього часу;
   б) у різниці інтервалів між автобусами;
   в) у частоті приїзду автобусів;
   г) у тому, що автобуси частіше запізнюються.

## Завдання до пункту

1. Парадокс «нескінченна шоколадка» колись просто підірвав інтернет.




Перегляньте ролик і здогадайтеся, у чому ж виверт:

2. Розгадайте ще один геометричний парадокс Льюїса Керрола. Нехай $ABC$ – довільний трикутник (*рис. 68*). Розділимо його основу $BC$ навпіл і з точки поділу $D$ проведемо пряму $DE$ перпендикулярно $BC$. Розділимо кут $BAC$ навпіл.

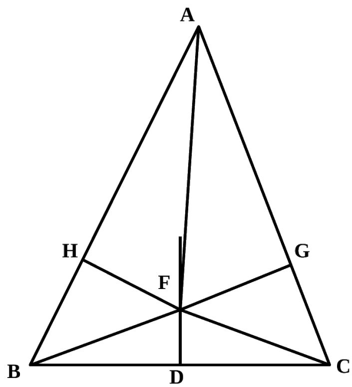



Рис. 68. Парадокс Льюїса Керрола

а) Якщо бісектриса цього кута не перетинається з $DE$, значить, вони паралельні. Отже, бісектриса є перпендикулярною основі $BC$, із чого слідує, що $AB = AC$, тобто трикутник – рівнобедрений.

б) Нехай бісектриса кута $BAC$ перетинається з $DE$ у точці $F$. З'єднаємо її з вершинами $B$ і $C$ і проведемо $FG \perp AC$ та $FH \perp AB$.

Трикутники $AFH$ і $AFG$ будуть рівні, оскільки вони прямокутні, мають спільну сторону $AF$, а кути $FAH$ і $FAG$ рівні. Отже, $AH = AG$, $FH = FG$.

Трикутники $BDF$ і $CDF$ також рівні між собою, бо $DF$ у них спільна, $BD = DC$ і вони прямокутні. Тому $FB = FC$.

Крім того, трикутники $FHB$ і $FGC$ теж прямокутні, у них $FH = FG$ і $FB = FC$, отже, $HB = GC$.

Отже, трикутник $ABC$ завжди рівнобедрений, що і треба було довести.

3. Знайдіть помилку в логічних міркуваннях доведення того, що одиниця є коренем рівняння $x^2 + x + 1 = 0$:

$$x^2 + x + 1 = 0.$$

Із цього рівняння випливає рівність

$$x + 1 = -x^2,$$

а також

$$x^2 + x = -1.$$

Якщо винести за дужки $x$, отримаємо

$$x(x+1) = -1.$$

Підставимо з першої рівності

$$x \times (-x^2) = -1,$$

тобто $x^3 = 1$, отже, $x = 1$.

4. Знайдіть помилку в логічних міркуваннях доведення того, що одиниця є найбільшим натуральним числом:
   Припустімо, $n$ – найбільше натуральне число. Тоді $n \geq n^2$. Поділимо обидві частини нерівності на $n$ (знак не змінюється, бо $n$ – натуральне). Отримаємо $1 \geq n$. Отже, 1 є найбільшим натуральним числом.

### Корисні відео

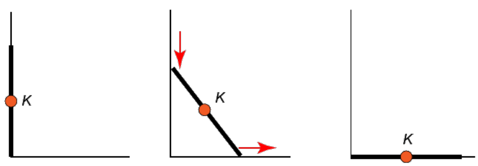
**3D-моделі для друку на принтері парадоксів *«зникнення клітинки»* та *«нескінченна шоколадка»* відповідно**

# 5.11. Геометричні головоломки

Геометрія близька до мистецтва та допоможе захопити учнів своєю наочністю. Розгляньте кілька задач, які є достатньо красивими, а їх розв'язок водночас є неочікуваним. Для розв'язання таких задач достатньо знань з геометрії до 9 класу. Застосування **правил 1**, **2**, **3** є дуже наочним і влучним у геометричних головоломках. Розуміння умови та всіх термінів є дуже важливим і відіграє ключову роль. Інтуїція, що веде до неправильної відповіді, у геометрії іноді є надто виразною, а іноді взагалі відсутня. Так чи інак, якщо задача математична, то необхідно створювати математичну модель.

**Задача:**
Уявіть драбину біля стіни, посередині драбини сидить маленьке кошеня. Спочатку драбина стояла вертикально, обома кінцями біля стіни. Вертикальне положення дуже нестійке, тому драбина впала. Падала вона так, що верхній її кінець сунувся зверху вниз по стіні, а нижній ковзав по землі.

**Питання:**
Якою буде траєкторія, яку опише кошеня?




Якщо учні не дають відповіді одразу, можна запропонувати кілька варіантів на вибір (*рис. 69*).

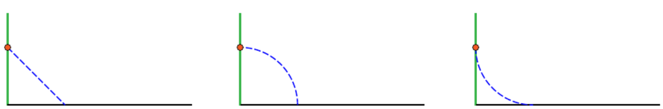


Рис. 69. Варіанти відповіді на задачу про кошеня

Правильна відповідь не зовсім очевидна. Це – дуга кола, а її центр – вершина прямого кута (*рис. 70*).

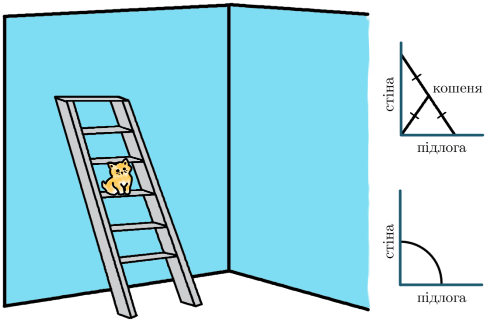



Рис. 70. Кошеня сидить на драбині.
Кошеня описує чверть кола

**Доведення.** Діагоналі прямокутника точкою перетину діляться навпіл. Відстань від вершини прямокутника до кошеняти – до точки перетину діагоналей прямокутника – дорівнює половині діагоналі. Подумайте, як би падало кошеня, якби нижній кінець драбини застряг у вершині прямого кута? Траєкторія, якою буде рухатися кошеня, одна й та сама, але за однієї умови падіння в останній момент кошеня опиниться над сходами, а за іншої – під сходами. Медіана прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута, дорівнює половині гіпотенузи.

Спробуйте створити фізичну модель задачі за допомогою лінійки з отвором для маркера чи крейди та змоделюйте цей процес на дошці.

Продовжити цю дискусію можна за допомогою ще однієї красивої задачі, яка називається *теоремою Коперника*.

**Задача:**

Є коло, усередині якого розташуємо коло вдвічі меншого радіуса так, щоб велике і маленьке кола мали внутрішній дотик. Оскільки діаметр меншого кола дорівнює радіусу великого, то менше коло проходить через центр великого кола. Нехай менше коло рухається без ковзання по нерухомому зовнішньому колу. Простежте за траєкторією певної точки на малому колі.

**Питання:**

Що це може бути за фігура?

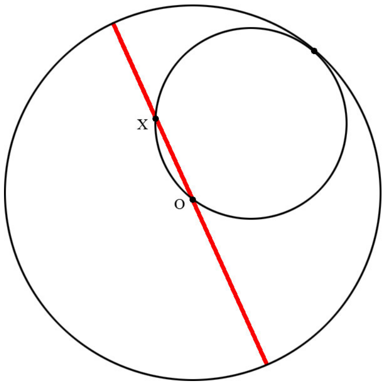


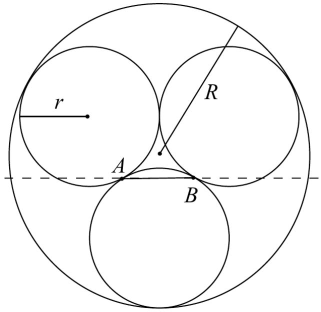

Рис. 71. Теорема Коперника

Виявляється, що це буде діаметр великого кола. Спробуйте довести це. Зробити на основі цієї задачі дослідницьку задачу можна, варіюючи радіус маленького кола. Наприклад, що буде, якщо радіус маленького кола буде вдвічі меншим за той, що був раніше? А якщо зменшити радіус у три або чотири рази, або далі – у парну (або непарну) кількість разів? Зробіть припущення та спробуйте створити з картону наочні моделі чи скористайтеся спірографом.

Наступна задача із колами – про «Щит бога Марса».

**Задача:**

Одного разу бог війни Марс захотів перевірити розум богині Мінерви. Він показав їй свій щит і сказав: «Люба, на моєму щиті є три однакові кола, які уособлюють силу, гнучкість і рішучість. Але, як бачиш, одне з кіл подряпано мечем супротивника, отримана тріщина має три дюйми в довжину (відрізок $AB$ на ілюстрації). Чи можеш ти мені сказати, яка площа мого щита?»




**Питання:**

Яка площа великого круга, якщо $AB = 3$?

Розв'язання (*рис. 72*): центри малих кіл розташовані на однаковій відстані один від одного й утворюють вершини рівностороннього трикутника із серединами $A$, $B$ і $C$.

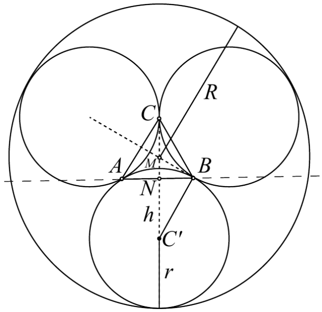



Рис. 72. Геометричне розв'язання задачі

Звідси випливає, що малі трикутники $ABC$ і $AC'B$ також рівносторонні і рівні між собою. Радіуси $r$ малих кіл збігаються зі сторонами трикутників $ABC$ і $AC'B$, тоді $r = C'B = AB$.

Ми можемо обчислити висоту $h$ трикутника $AC'B$, помноживши його сторону $AB$ на $\frac{\sqrt{3}}{2}$ :

$$h = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \ .$$

Оскільки висоти рівностороннього трикутника перетинаються в точці (точка $M$), що ділить висоту у відношенні 2 : 1 від вершини трикутника до основи, то можна обчислити $MN$ за допомогою формули:

$$MN = h \times \frac{1}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \ .$$

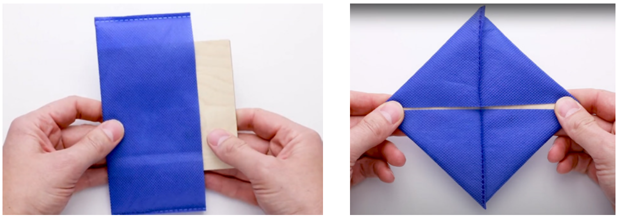
Таким чином, площа великого круга – щита дорівнює

$$S = \pi(r + h + NM)^2 =$$

$$= \pi\left[3 + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right]^2 = \pi\left(3 + 2\sqrt{3}\right)^2 \approx 131.27$$

квадратних дюймів.

Розглянемо ще одну контрінтуїтивну геометричну головоломку, що має назву «Square in the Bag» («Квадрат у мішечку»). Є дерев'яний квадрат і мішечок прямокутної форми. Ширина мішечка більша за сторону квадрата, а висота – значно менша. Завдання полягає в тому, щоб помістити квадрат повністю в мішечок (*рис. 73 а*).



а б

Рис. 73. Головоломка «Square in the Bag» і її розв'язок

Розв'язання цієї головоломки досить неординарне (*рис. 73 б*).

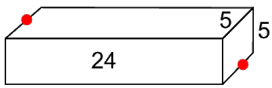
«Square in the Bag» отримала нагороду «Головоломка року» (Puzzle of the Year) на японському конкурсі головоломок імені Ноба Йошигахара[9] у 2012 році.

Можна провести майстер-клас зі створення власноруч такої головоломки з картону та конверта з тканини. Створіть заздалегідь картонні квадрати і запропонуйте учням у класі самим розрахувати розміри конверта відповідно до розмірів квадратів.

Розглянемо тепер задачу, у якій використовується теорема Піфагора.

9

**Задача:**
Через вади дизайну компанія-виробник виготовила мільйон несправних модульних схем. Модулі розміщуються в коробках розміром 5 см на 5 см на 24 см. Інженери визначили, що їх можна відремонтувати, додавши електричне з'єднання між центрами діагонально-протилежних коротких ребер, як зазначено на рисунку:




**Питання:**
Якої мінімальної довжини має бути дріт, що з'єднує відповідні точки?

Здається, що відповідь очевидна – 29 см. Але запитайте в учнів, чи вони впевнені, що 29 см – найкоротше з'єднання? Згадайте про **правило 2**. Дайте час поміркувати. Можливо, створіть реальну модель цієї задачі.

Рішення досить нескладне: розглянемо розгортку коробки і побачимо, що відстань між точками дійсно може бути меншою за 29 см, та для її знаходження маємо застосувати теорему Піфагора (*рис. 74*).

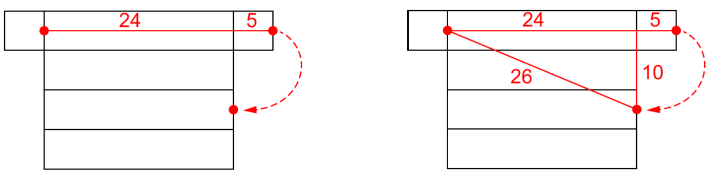



Рис. 74. Розгортка для розв'язання задачі

Інша задача також є доволі незвичною, проте практичною. Так само ми не одразу бачимо можливість застосувати теорему Піфагора.

**Задача:**
Людина стоїть на березі спокійного океану. Вважаємо, що її очі – на висоті 2 м над поверхнею води.

**Питання:**
Яка відстань від очей людини до горизонту?
Вважайте Землю кулею.

**Правила 1**, **2** для цієї задачі тривіальні. За **правилом 3** побудуємо модель нашої задачі (*рис. 75*). Для початку загуглимо радіус нашої планети: він дорівнює 6371 км. Потім схематично намалюємо розріз Землі площиною, що проходить через її центр, очі людини та промінь, уздовж якого людина дивиться прямо на горизонт. Де людина бачить цей небокрай? Звісно, там, де «небосхил торкається земної поверхні». Тобто погляд людини на горизонт є не чим іншим, як дотичною до кулі та перерізу зокрема.

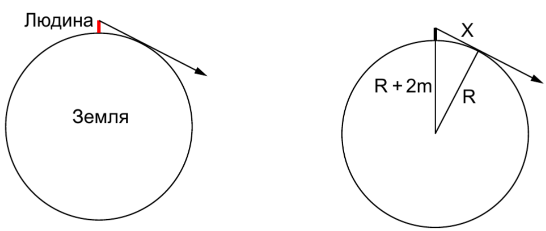



Рис. 75. Схематична модель задачі про горизонт

Згадаймо, що радіус, проведений у точку дотику до кулі, є перпендикулярним до відповідної дотичної, отже, маємо прямокутний трикутник. Позначивши радіус $R$, а шукане значення – $x$, отримуємо рівняння:

$$(R+2)^2 = x^2 + R^2$$

$$6371002^2 = x^2 + 6371000^2$$

$$x = \sqrt{6371002^2 - 6371000^2} \approx 5048.16838071\cdot$$

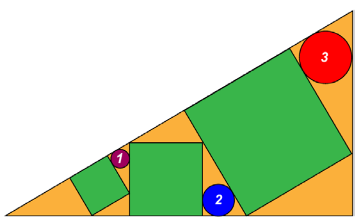
Тобто відстань від очей до горизонту для дорослої людини становить приблизно 5 км.

## Завдання для самоконтролю

1. Траєкторією руху кошеняти, яке сидить на драбині, що падає, є:
   а) гіпербола;
   б) парабола;
   в) чверть кола;
   г) відрізок.

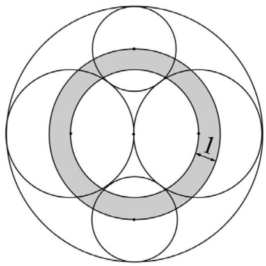
2. Траєкторією руху довільної точки меншого кола в теоремі Коперника є:
   а) гіпербола;
   б) парабола;
   в) чверть кола;
   г) відрізок.

3. Задані круги 1, 2, 3 з радіусами $r_1$, $r_2, r_3$ відповідно і три квадрати, упаковані в прямокутний трикутник, як показано на рисунку. Знайдіть довжину $r_2$.
   а) $r_2 = \sqrt{r_1} + \sqrt{r_3}$;
   б) $r_2 = r_1 \times r_3$;
   в) $r_2 = \sqrt{{r_1}^2 + {r_3}^2}$;
   г) $r_2 = \sqrt{r_1 + r_3}$.

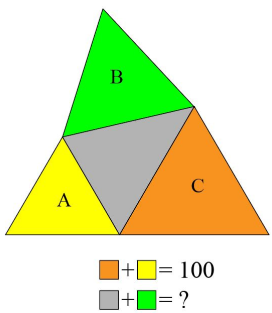


### Завдання до пункту

1. Позначені центри всіх семи кіл. Ширина зафарбованого кільця дорівнює 1. Яка його площа?




2. Три трикутники ($A$, $B$ і $C$) рівносторонні. Знайдіть позначену суму площ.



# 5.12. Сангаку – геометрична головоломка

У японській традиційній релігії *сінто* вважають, що існує вісім мільйонів божественних сутностей *камі*. Усі вони таємно подорожують Землею і мають різний вигляд. Камінь, меч, гора, ліс, зірка, сонце, дух — усе, що є об'єктом поклоніння і вшанування для людей, є камі. Коли людині відкривається щось прекрасне, це означає, що поряд із нею пройшла ця божественна істота.

Так пишуть у передмові до своєї книги збирачі й дослідники завдань японської храмової геометрії Х. Фукагава і Д. Педое. Відчуття форми і сприйняття природної краси завжди були властиві жителям Японії. Не дивно, що геометрія, приваблива своєю красою і неочевидністю задач і теорем, стала для тих, хто практикує це мистецтво, не тільки розвагою, а й предметом дарів богам.

Креслення до теорем вирізалися на дерев'яних дошках і розфарбовувалися. Такі дерев'яні таблички отримали назву *сангаку* (дослівний переклад: рахункова або математична дощечка). Ранні дощечки зазвичай мають розміри 50 см на 30 см, більш пізні – 180 см на 90 см і містять кілька геометричних задач. Сангаку 1875 року у храмі Кайдзу Тенман містить 23 задачі. Не всі дощечки сангаку мають геометричні задачі. На деяких вирішувалися діофантові рівняння. На більшості дощечок наводився лише результат, а доведення було відсутнє. Готові дошки вивішувалися над входом у синтоїстський або буддистський храм як пожертвування богам і як виклик колегам. Понад два століття японські математики – професіонали й любителі, чоловіки й жінки – створювали дерев'яні таблички, прикрашені красивими геометричними задачами, які були водночас творами мистецтва і божественними дарами. Творці сангаку вивішували їх десятками й сотнями в буддистських і синтоїстських храмах по всій Японії. Зібрання задач сангаку відоме як храмова геометрія.

На занятті, присвяченому сангаку, можна більше дізнатися про математику в Японії, храмову геометрію, познайомитися зі східними підходами, незвичним поглядом на речі. Продемонструємо розв'язання такої візуальної задачі.

**Задача:**
Три кола із центрами в точках $A$, $B$, $C$ і радіусами $a$, $b$, $c$ відповідно дотикаються одне до одного і до прямої $l$ і розташовані, як показано на *рис. 76*.

**Питання:**
Доведіть, що $\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}=\frac{1}{\sqrt{c}}$ .

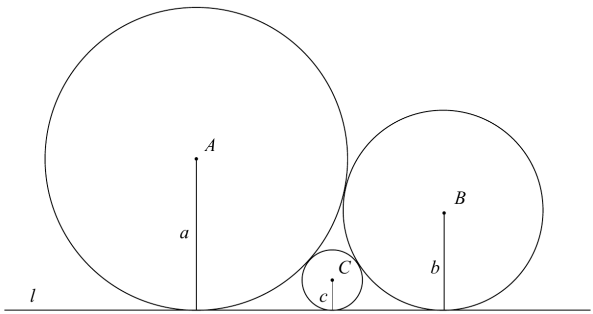
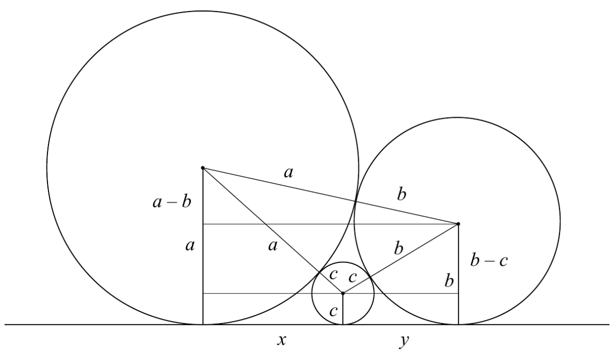



Рис. 76. Приклад задачі сангаку

Можливо, це одна з найвідоміших задач з-поміж тих, які зустрічаються в сангаку. Багато статей про японську храмову геометрію містять згадку про три кола та пряму, що попарно дотикаються. Результат був відомий ще древнім грекам, що ніяк не применшує досягнень японських математиків. Навряд чи ми дізнаємось, як до розв'язання цього завдання підходили в період Едо в Японії.



Розв'язання задачі таке: додамо відрізки $x$ і $y$. Розглядаючи трикутники зверху вниз і зліва направо, випишемо трійки їх сторін:

$$a + b, a - b, x + y;$$
$$a + c, a - c, x;$$
$$b + c, b - c, y.$$

Тоді за теоремою Піфагора випливає справедливість виразів:

$$(a + b)^2 = (a - b)^2 + (x + y)^2;$$
$$(a + c)^2 = (a - c)^2 + x^2;$$
$$(b + c)^2 = (b - c)^2 + y^2.$$

Отже,

$$4ab = (x + y)^2;$$
$$4ac = x^2;$$
$$4bc = y^2$$

або

$$2\sqrt{ab} = x + y;$$
$$2\sqrt{ac} = x;$$
$$2\sqrt{bc} = y.$$

Що, у свою чергу, рівносильно рівності

$$\sqrt{ab} = \sqrt{bc} + \sqrt{ac}\,.$$

Розділимо обидві частини останньої рівності на $\sqrt{abc}$ та отримаємо

$$\frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\,.$$

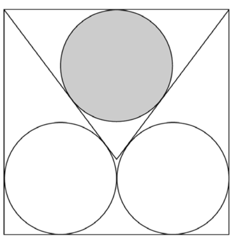
## Завдання для самоконтролю

1. Що означає назва «сангаку»?
   а) зображення божества;
   б) японська назва геометрії;
   в) рахункова дощечка;
   г) поняття храмової математики.

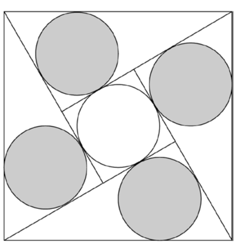
2. У який історичний період з’явилися сангаку?
   а) Едо;
   б) Мейцзі;
   в) Тайсьо;
   г) Асука.

## Завдання до пункту

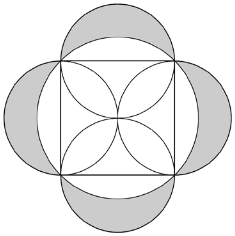
1. Дано квадрат і три круги в ньому, як зображено на рисунку. Доведіть, що якщо білі круги рівні, то і сірий круг має такий самий радіус.



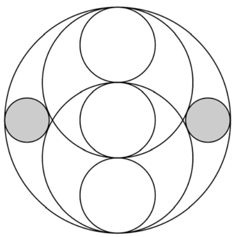
2. Усі кола однакові. Знайдіть радіус кола, якщо сторона квадрата дорівнює 1.



3. Навколо квадрата описане коло. На кожній стороні квадрата як на діаметрі побудовано ще чотири круги. Доведіть, що площа квадрата дорівнює сумі площ чотирьох отриманих лунок (сірі).



4. Шість із восьми кіл мають наочне відношення між їх радіусами. У порядку зменшення довжин радіусів: 1 : 2/3 : 1/3. Необхідно знайти радіус двох маленьких кіл, якщо знаємо радіус найбільшого.



5. У музеї Ханенків зберігається німецький релікварій. У мистецтві Кельна, одного з найстаріших німецьких міст, дуже поширений образ святої Урсули та її дів-супутниць. Мощі святих мучениць клали в посудини. Їх накривали, наче ковпаком, такими релікваріями. Зазирнути всередину можна було крізь отвір у передній частині.
Отвір має форму кола, діаметр якого 7 см. У колі – 4 маленьких. Знайдіть довжину сторони квадрата, вершини якого – перетини маленьких кіл.

Рис. 77. Німецький релікварій
з музею Ханенків

# 5.13. Математичні фокуси

Учитель математики завжди трохи маг і чаклун. Математичні фокуси – ефективний засіб розбудити допитливість навіть у дуже скептичних та незацікавлених учнів. Бо, не дізнавшись секрету фокуса, важко його повністю зрозуміти. Знання математичних ідей відкриває світ математичних фокусів.

Перший документ, у якому згадується про містифікації, – давньоєгипетський папірус. У ньому містяться перекази, датовані 2900 роком до н. е.

Спочатку фокуси застосовували чаклуни і знахарі. Жерці Вавилона і Єгипту створили величезну кількість унікальних трюків, використовуючи знання математики, фізики, астрономії та хімії.

Перша згадка про саме математичні фокуси є у книзі математика Леонтія Магницького, опублікованій у 1703 році. Пізніше ця тема розвинулася в роботах Мартіна Гарднера та Якова Перельмана.

### Фокус 1. Магічні таблиці

Приготуйте шість табличок (див. підрозділ 8.6, *рис. 131*). Хтось із гравців загадує число від 1 до 60 та записує його на папері. Потім попросіть цю людину вказати на картки, на яких цього числа немає. Ви «заглядаєте в думки» гравця і називаєте його число.

Фокус не варто розкривати одразу. Повторіть його, поки учні не знайдуть закономірності і не розгадають, як це відбувається. Насправді ви додаєте числа, які знаходяться в першому рядку першого стовпчика усіх таблиць, що не обрав гравець.

Суть фокуса – треба додавати певні числа. Число, що має бути відгаданим ведучим, знаходиться між 1 та 60. Якби ведучий формував питання за такою стратегією, як ділення навпіл, тоді з кожною відповіддю гравця він би відхиляв половину «неправильних» чисел.

Аналогічно і з таблицями. Якщо ведучий ставить запитання «Чи є твоє число на таблиці 1, 2, 3, 4, 5 чи 6?», він удвічі скорочує шлях до правильної відповіді. Тобто:

*Крок 1.* 60 : 2 = 30
*Крок 2.* 30 : 2 =15
*Крок 3.* 15 : 2 = 7.5
*Крок 4.* 7.5 : 2 = 3.75
*Крок 5.* 3.75 : 2 = 1.875
*Крок 6.* 1.875 : 2 = 0.9375

Отже, завжди вистачить шести запитань, щоб вгадати число від 1 до 60.

Відповіді учасника можна умовно кодувати нулем та одиницею, де 0 – це «ні», а одиниця – «так». Якщо показувати таблиці послідовно, то відповіді учасника будуть, наприклад, «Ні – Так – Так – Ні – Ні – Так». Їх можна перевести у код – 0 1 1 0 0 1. А це – запис числа у бінарній системі числення. Тобто розклад за степенями двійки.

$1_{10} = 0 \times 32 + 0 \times 16 + 0 \times 8 + 0 \times 4 + 0 \times 2 + 1 = 1_2$
$2_{10} = 0 \times 32 + 0 \times 16 + 0 \times 8 + 0 \times 4 + 1 \times 2 + 0 = 10_2$
…
$49_{10} = 1 \times 32 + 1 \times 16 + 0 \times 8 + 0 \times 4 + 0 \times 2 + 1 \times 1 = 110001_2$
$50_{10} = 1 \times 32 + 1 \times 16 + 0 \times 8 + 0 \times 4 + 1 \times 2 + 0 \times 1 = 110010_2$
…
$60_{10} = 1 \times 32 + 1 \times 16 + 1 \times 8 + 1 \times 4 + 0 \times 2 + 0 \times 1 = 111100_2$

Учні можуть створювати такі магічні бінарні таблиці самостійно для будь-якого діапазону чисел. Для цього можна використовувати онлайн-калькулятор – він переводить числа в бінарну систему.

Як вправу запропонуйте учням сформувати таблицю від 1 до 30 або від 1 до 100. Це може бути роботою в групах.

### Фокус 2. Ясновидець

Оберіть учня, який запише на папірці трицифрове число. Потім попросіть його знайти суму цифр цього числа і відняти від задуманого числа його суму цифр, в отриманій різниці закреслити будь-яку цифру, крім нуля, та назвати дві цифри, що залишилися. Ви можете відразу сказати, яку цифру він закреслив.

Розгадка фокуса в тому, що задумане число і сума його цифр дають однакові залишки при діленні на 9. Значить, їх різниця буде ділитися на 9, тому сума цифр цієї різниці ділиться на 9. Залишається тільки знайти суму незакреслених цифр і найближче число, яке ділиться на 9. Закреслена цифра дорівнює різниці між знайденою сумою і найближчим числом, що ділиться на 9. Якщо сума відразу ділиться на 9, то закреслена цифра дорівнює 9, оскільки закреслювати 0 не можна.

Наприклад, якщо загадати число 347, то сума його цифр буде 3 + 4 + 7 = 14. І якщо відняти 14 від 347, отримаємо 333. Наступний крок – в отриманому числі закреслюється одна з цифр. Крім нуля, це дуже важливо. І кажуть вам дві цифри, які залишилися. Якщо у нашому прикладі закреслимо одну трійку – залишається 3 і 3. Завдання ведучого – відгадати третю цифру у тризначному числі. Три плюс три дорівнює шість. Найближче число до 6, яке ділиться на 9 – власне, 9. А дев’ять мінус шість дорівнює три. Третя цифра задуманого числа – 3.

### Фокус 3. Коробка сірників

Дайте одному з учнів коробку із сірниками. Попросіть його порахувати кількість сірників (ви не знаєте точну кількість). Потім попросіть учня відняти від кількості сірників суму їх цифр і ту кількість, яка залишилася, покласти знов у коробку. Потім попередньо перевірте її, потрусивши «на звук», і вкажіть, скільки там сірників.

Фокус у тому, що кількість сірників у коробці менша за 38. Це означає, що після віднімання від числа сірників суми цифр ми отримаємо або 27, або 18, або 9 сірників. Попередньо потренувавшись, ви точно будете відрізняти цю кількість.

## Завдання для самоконтролю

1. Хто із цих людей не створював математичні фокуси?
   а) Леонтій Магницький;
   б) Мартін Гарднер;
   в) Джон Конвей;
   г) Яків Перельман.

2. У фокусі з магічними таблицями основою є:
   а) бінарна система;
   б) розклад числа на розрядні доданки;
   в) властивості магічних квадратів;
   г) принцип подільності на 9.

3. У фокусі із сірниками основою є:
   а) абсолютний слух;
   б) принцип подільності на 5;
   в) розклад числа на доданки;
   г) принцип подільності на 9.

# 6.

# Активності «hands-on» на заняттях з математики

Активності «hands-on» – це навчання на практиці. Цей підхід найбільш прийнятний для «кінестетичних» учнів, які краще навчаються на прикладах і моделях. Учні спостерігають за об'єктом дослідження чи явищем або його моделлю в реальному, матеріальному світі та експериментують. Це принципово відрізняється від більшості задач, де необхідно оперувати абстрактними поняттями. Під час активностей «своїми руками» учні також використовують аргументи й міркування, підсумовують і обговорюють власні ідеї та результати. Тут є можливість проводити наочні експерименти, а вже потім переходити до узагальнень. Унаочнення геометричних теорем і властивостей фігур – досвід, що дає змогу отримати та розвивати знання.

# 6.1. Теорема Піфагора

У математиці теорема Піфагора є фундаментальним співвідношенням евклідової геометрії щодо трьох сторін прямокутного трикутника. Йдеться про те, що квадрат гіпотенузи (сторони, протилежної до прямого кута) дорівнює сумі квадратів двох інших сторін. Теорему можна записати як рівняння, що стосується довжин сторін $a$, $b$ та $c$:

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

де $c$ – довжина гіпотенузи, а $a$ і $b$ – довжини катетів.

Індійський математик Бхаскара II надав його у формі креслення, під яким було написано лише одне слово: «Дивись!» (*рис. 80*). Цей спосіб доведення є досить хорошим індикатором того, чи має людина математичну інтуїцію.

Метою роботи є вивчити та засвоїти теорему Піфагора. Навчитися доводити її різними способами. Для цього використовують дерев'яний пазл «Теорема Піфагора» (*рис. 79*). Завдання учням: за допомогою пазла сформулювати теорему Піфагора та знайти кілька способів доведення теореми Піфагора з його використанням.


Рис. 78. Геометрична інтерпретація теореми Піфагора

У наборі – 8 елементів: чотири прямокутні трикутники з катетами $a$, $b$ та гіпотенузою $c$ і чотири квадрати зі сторонами відповідно $a, b, c$ та $a - b$.


Рис. 79. Пазл «Теорема Піфагора»

**Доведення 1.** Викладемо пазл із квадрата зі стороною $c$ та чотирма прямокутними трикутниками з катетами $a$, $b$ та гіпотенузою $c$. Із *рис. 80* видно, що утворився квадрат зі стороною $a + b$. Знайдемо його площу:

1. $S = (a+b)^2$

2. $S = 4 \times \left(\frac{1}{2}ab\right) + c^2$

$\Longrightarrow (a+b)^2 = 4 \times \left(\frac{1}{2}ab\right) + c^2 \Longrightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow a^2 + b^2 = c^2$.

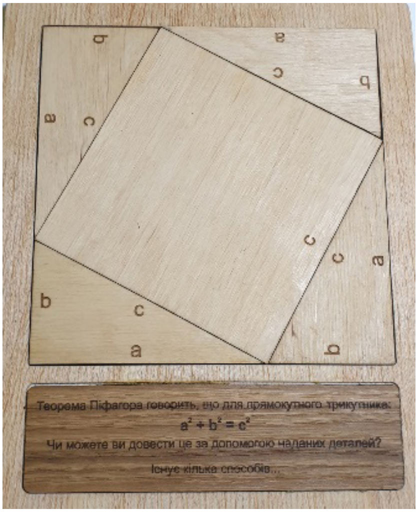



Рис. 80. Зображення пазла, що доводить теорему Піфагора (доведення 1)

**Доведення 2.** Викладемо з пазлів два квадрати, сторони яких дорівнюють $a + b$ (*рис. 81*). Знайдемо площі цих квадратів:

1. $S = (a + b)^2$
2. $S = c^2 + 2ab$

$\Rightarrow (a + b)^2 = c^2 + 2ab \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 + b^2 = c^2.$

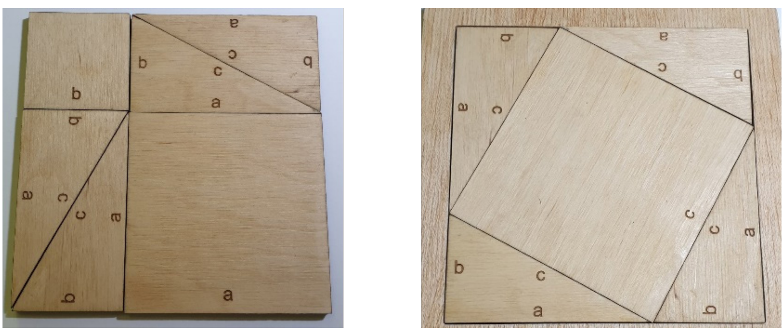


Рис. 81. Зображення пазла, що доводить теорему Піфагора (доведення 2)

**Доведення 3.**

Нарешті використаємо найменший квадрат (*рис. 82*). Викладемо пазл, як на фото, і знайдемо площу отриманого квадрата.

1. $S = c^2$

2. $S = 2\left(\frac{1}{2}ab\right) + (a-b)^2$

$$\Longrightarrow c^2 = 4\left(\frac{1}{2}ab\right) + (a-b)^2 \Longrightarrow c^2 = 2ab + a^2 - 2ab + b^2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow c^2 = a^2 + b^2.$$

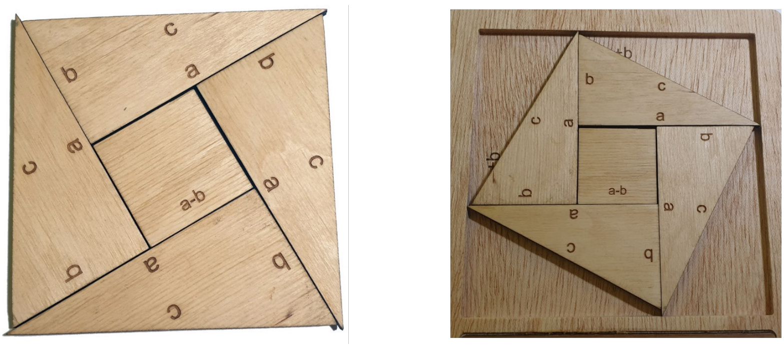



Рис. 82. Зображення пазла, що доводить теорему Піфагора (доведення 3)

## Завдання для самоконтролю

1. Яким словом формулюється доведення теореми Піфагора?
   а) «Банзай!»;
   б) «Дивись!»;
   в) «Вперед!»;
   г) «Зрозумій!».

2. Хтось спостерігає за заходом сонця з певної висоти. Знайдіть цю висоту, якщо до горизонту 12 миль.
   а) близько 40 м;
   б) близько 30 м;
   в) близько 20 м;
   г) близько 10 м.

## Завдання до пункту

1. Порахуйте приблизну відстань до горизонту, коли ви знаходилися би біля вікна свого будинку, на оглядових майданчиках Ейфелевої вежі та хмарочоса Бурдж Халіфа.

2. Порахуйте висоту верби, якщо довжина її тіні дорівнює 15 м, а довжина вашої в 1,875 разів довша за ваш зріст.
   (Підказка: *згадайте про подібність*.)

# 6.2. Пазли, танграм, пентаміно, стомахіон

Ці головоломки на складання можна складати і самостійно, і разом з іншими.

**Пазли** – це найбільш поширена головоломка у світі. Гравцеві дають набір із великої кількості частинок різної форми. Якщо їх зібрати, можна побачити зображення чи фігуру. Завдання полягає у складанні частинок в одне ціле.

**Танграм** – це стародавня китайська головоломка. Її завдання – складання різних фігур із набору таких елементів: два великі трикутники, один середній трикутник, два маленькі трикутники, квадрат і паралелограм. Деякі силуети зображені на *рис. 83*.

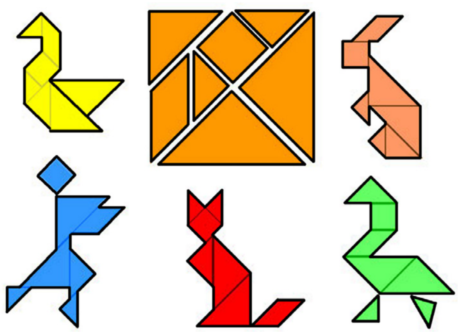


Рис. 83. Танграм

Із таких фігур необхідно викласти силует, контури якого даються в додатку до набору.

**Пентаміно** – п'ятиклітковi поліміно – фігури, складені зі склеєних між собою сторонами квадратів (*рис. 84*). У наборах пентаміно є додаток із завданнями щодо викладання прямокутних фігур різних розмірів, прямокутника з отворами тощо. Популярним є таке завдання: вибрати одну фігуру пентаміно, а з інших скласти подібну вибраній фігуру, але збільшену втричі.

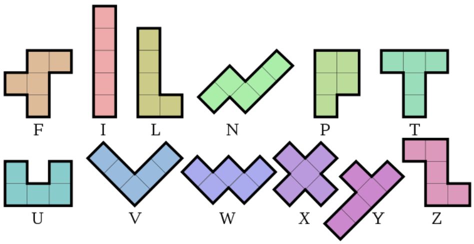



Рис. 84. Фігури пентаміно

**Стомахіон** – головоломка, винайдена до нашої ери Архімедом, тому її називають головоломкою Архімеда. Вона має 14 частин, що комбінуються для отримання квадрата (*рис. 85*) та інших фігур. Існує 17 152 варіанти складання такої головоломки[1]. Стомахіон дуже схожий на танграм, але відрізняється кількістю та формами елементів, із яких складається.

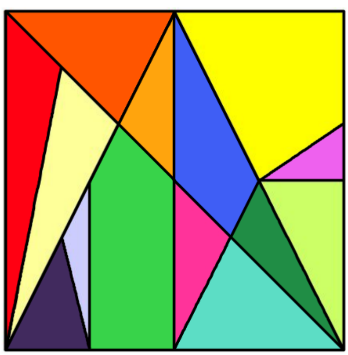


Рис. 85. Один із варіантів складеного стомахіона

[1] Складання з фігур рівного квадрата. Цей результат був отриманий у січні 2003 року шляхом комп'ютерного перебору всіх варіантів.

## Завдання для самоконтролю

1. Скільки фігур у головоломці танграм?
   а) 6;
   б) 7;
   в) 8;
   г) 9.

2. Скільки фігур у головоломці пентаміно?
   а) 10;
   б) 11;
   в) 12;
   г) 13.

3. Скільки фігур у головоломці стомахіон?
   а) 12;
   б) 13;
   в) 14;
   г) 15.

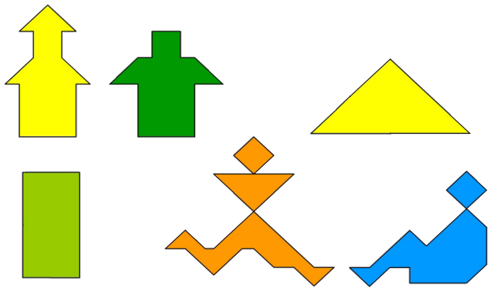
4. Якої букви немає серед фігур у головоломці пентаміно?
   а) N;
   б) W;
   в) V;
   г) С.

5. Хто автор головоломки стомахіон?
   а) Арістотель;
   б) Архімед;
   в) Сократ.

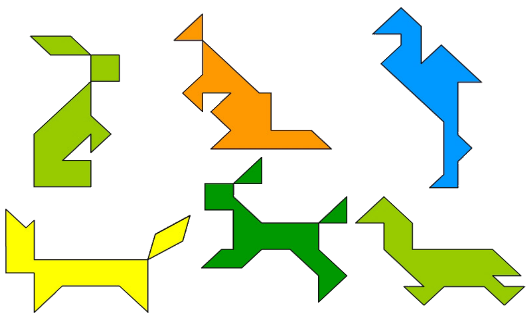
## Завдання до пункту

1. Танграм. Зі стандартного набору складіть такі силуети:

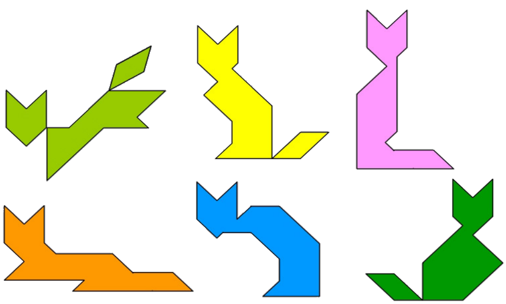
а)



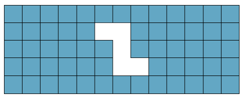
б)



в)

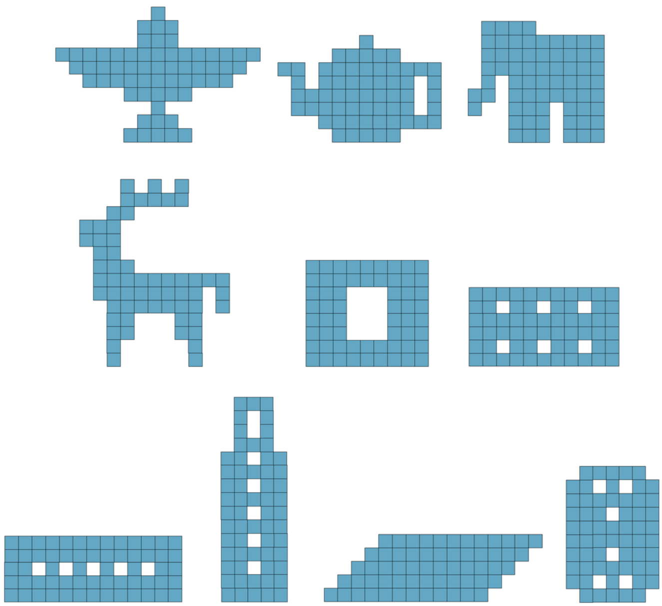


2. Пентаміно:
   а) побудуйте прямокутник 5 × 13 так, щоб у центральній його частині з'явився силует одного з 12 елементів (почергово);



   б) вибираючи одну з 12 фігур пентаміно, побудуйте з інших втричі збільшену її копію (варіантів існує багато);

   в) побудуйте такі фігури:



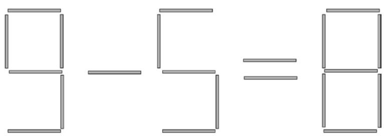
**Корисні відео**

# 6.3. Головоломки із сірниками

Задачі із сірниками використовуються як спосіб розвивати кмітливість, увагу, зосередженість. Для цього потрібно мати лише сірники або більш безпечні дерев'яні палички для розмішування напоїв. Із них можна складати різноманітні фігури, змінюючи одну фігуру на іншу за допомогою перекладання. Навіть деякі геометричні теореми можна доводити, використовуючи сірники.

Розглянемо приклад головоломки із сірниками.

**Задача:**



Перекладіть один сірник так, щоб приклад було розв'язано правильно.

Один зі способів розв'язання – метод перебору (*рис. 86*).

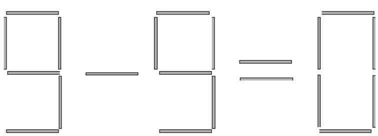
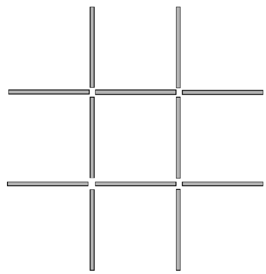


Рис. 86. Розв'язок задачі із сірниками

Більш цікавими є геометричні задачі із сірниками.

**Задача:**



Перекладіть три сірники так, щоб отримати три однакові квадрати.

Для початку необхідно зрозуміти, що квадрати матимуть довжину сторони 1 сірник. Для квадратів зі стороною 2 чи більше не вистачає сірників. Для квадратів зі стороною в пів сірника також сірників забагато. Отже, у кожного квадрата сторона – один сірник. Порахуємо кількість сірників: 12 сірників. На три квадрати. Це означає, що наші квадрати не можуть мати спільну сторону. Отже, внутрішній квадрат, який уже є, має бути зруйнований. Доходимо висновку, що квадрати мають бути розташовані так, як на *рис. 87*.

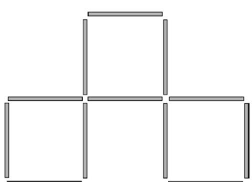


Рис. 87. Розв'язок геометричної задачі із сірниками

## Завдання для самоконтролю

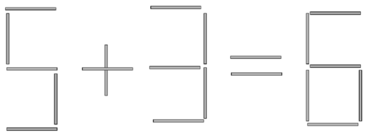
1. До якого виду головоломок належать головоломки із сірниками?
   а) головоломки на спритність;
   б) головоломки на увагу;
   в) головоломки на складання.
2. Які дії зазвичай не можна робити із сірниками за правилами?
   а) ламати сірники;
   б) підпалювати сірники;
   в) перекладати сірники;
   г) повертати сірники на кут 90°.

3. Коли з’явилися прототипи головоломок із сірниками?
   а) близько 3 тисяч років тому;
   б) близько 3 тисяч років до н. е.;
   в) близько тисячі років тому;
   г) у XIX ст.

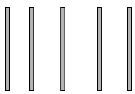
4. Коли з’явилася перша книга про головоломки із сірниками?
   а) на початку XX ст.;
   б) тисячу років тому;
   в) наприкінці XIX ст.

**Завдання до пункту**
**Секція «Числова»:**

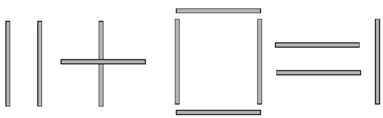
1. Перекладіть один сірник так, щоб рівність стала правильною.



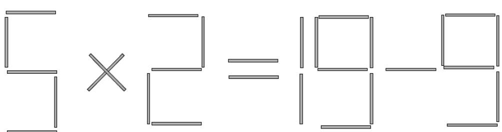
2. Як із п’яти сірників зробити десять? Ламати та розщеплювати сірники не можна.



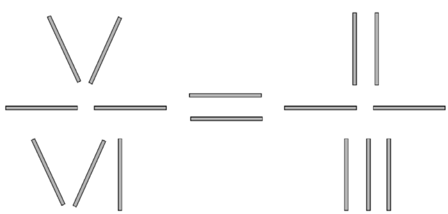
3. Перекладіть один сірник так, щоб рівність стала правильною.



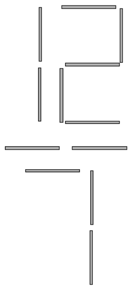
4. Перекладіть два сірники так, щоб вийшла інша правильна рівність.



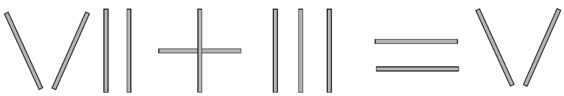
5. На рисунку зображено хибне рівняння $\frac{5}{6} = \frac{2}{3}$. Перекладіть один сірник так, щоб рівняння стало правильним.



6. На рисунку зображений дріб $\frac{12}{7}$. Перекладіть один сірник так, щоб значення дробу збільшилося в багато разів.

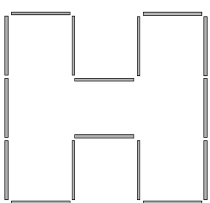


7. На рисунку зображено хибне рівняння $7 + 3 = 5$. Перекладіть один сірник так, щоб рівняння стало правильним.

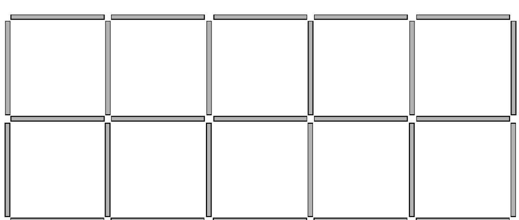


**Завдання до пункту**
**Секція «Геометрична»:**

1. Перекладіть чотири сірники так, щоб вийшло два квадрати.

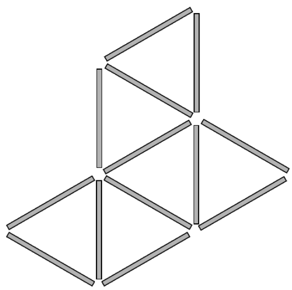


2. Фігура складена із двадцяти семи сірників.

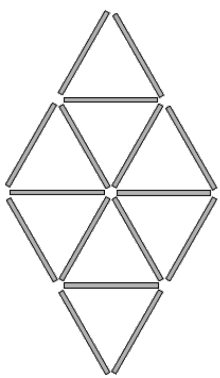


а) вкажіть кількість прямокутників у цій фігурі;
б) приберіть п'ять сірників так, щоб залишилося п'ять яких завгодно квадратів;
в) приберіть сім сірників так, щоб залишилося п'ять однакових квадратів;
г) приберіть шість сірників так, щоб не залишилося жодного квадрата;
д) приберіть сім сірників так, щоб залишилося три однакові за формою та за площею фігури.

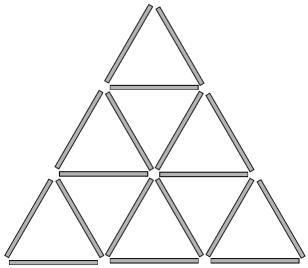
3. Приберіть три сірники так, щоб залишилося три трикутники.



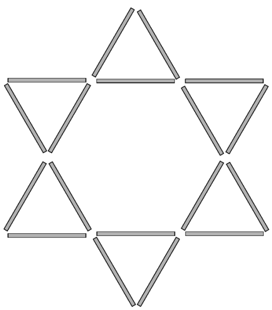
4. Фігура складена з трикутників і ромбів. Приберіть чотири сірники так, щоб залишилося тільки чотири трикутники.



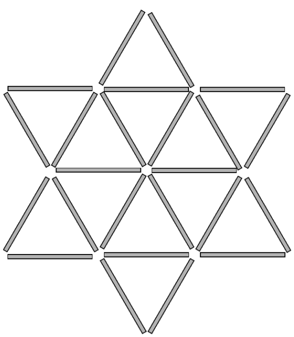
5. Приберіть чотири сірники так, щоб залишилося п'ять трикутників.



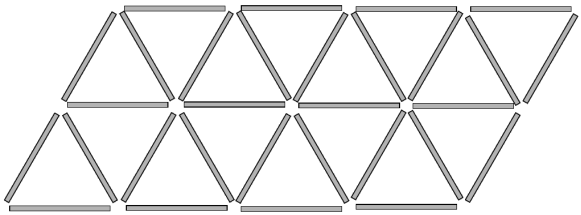
6. «Зіркова головоломка» Ч. Б. Таунсенда. Фігура зірка складена з восьми трикутників – шести маленьких і двох великих. Перекладіть два сірники так, щоб залишилося лише шість трикутників.



7. Приберіть шість сірників так, щоб не залишилося жодного трикутника.



8. Скільки у цій фігурі трикутників, чотирикутників?

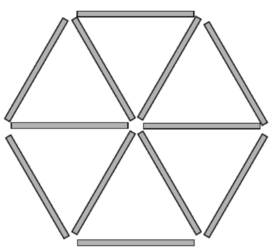


Приберіть вісім сірників так, щоб не залишилося жодного трикутника.

9. Із дванадцяти сірників побудуйте три рівні чотирикутники та два рівні трикутники. У фігур має бути сторона не менша за один сірник.

10. Із вісімнадцяти сірників побудуйте шість рівних чотирикутників та один правильний трикутник. У побудові можуть бути інші фігури, але трикутник має бути тільки один.

11. Перекладіть три сірники так, щоб отримати шість рівних чотирикутників.



12. Із шести сірників побудуйте шестикутник, у якому чотири кути гострі.

# 6.4. Оригамі

У сучасному світі складати красиві фігурки з кольорового паперу вчать чи не з дитячого садочка. Журавлики, звірята, конвертики, літачки, човники, ялинки та інші різноманітні об'єкти, які здатна створити фантазія та вправна робота рук. Якщо ви запитаєте у своїх учнів, як вони гадають, звідки походить оригамі – з Японії, Китаю, чи Європи, то найімовірніше отримаєте відповідь «З Японії». Але чи це справді так?

Насправді будь-яка відповідь правильна. Японія – тому що слово «оригамі» є японським: «ori» – складати, «kami» – папір. У XVI столітті складені паперові метелики були помічені на церемоніях *сінто*, а 1797 року виходить перша японська книга з оригамі – «Sembazuru Orikata». Звідки версія про Китай? Папір був винайдений у Китаї близько 105 р. н. е. Його використовували для написання документів, листів, друкування грошей тощо. Яким чином до оригамі тоді причетна Європа? В астрономічному тексті Йоганнеса де Сакробоско «Tractatus de Sphera Mundi», датованому 1490 роком, було виявлено зображення паперового човника. У книзі Меттіа Гігера «Li Tre Trattati» 1629 року зображено паперові складені фігури, що дуже нагадують сучасне оригамі.

У наш час декоративне складання паперу є дуже поширеним, але мало хто знає, що оригамі доволі тісно пов'язане з математикою. Тому розглянемо основні аксіоми оригамі [45]:

1. Для довільних двох точок на папері можна провести згин, що через них проходить, причому рівно один.
2. Для довільних двох точок на папері можна провести згин, що накладає одну точку на іншу, причому рівно один.
3. Для довільних двох прямих на папері можна провести згин, що накладає одну пряму на іншу, причому рівно один.
4. Для довільних прямої та точки можна провести згин, що проходить через дану точку і є перпендикулярним до даної прямої, причому рівно один.
5. Для довільних двох точок та прямої можна провести згин, що проходить через одну точку, а другу точку накладає на дану пряму.
6. Для довільних двох точок $A$ і $B$ та двох прямих $l$ і $m$ можна провести згин, що накладає $A$ на $l$ і $B$ на $m$.

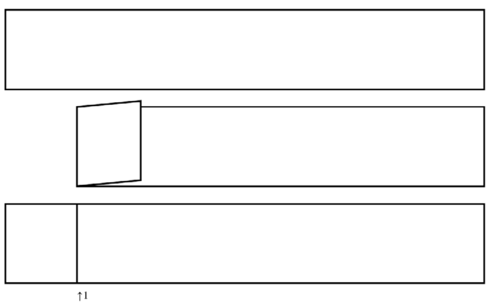
7. Для довільної точки $A$ та двох прямих $l$ і $m$ можна провести згин, що накладає $A$ на $l$ і є перпендикулярним до $m$.

Переконайтеся в цьому, продемонструйте кожну з аксіом, а також поміркуйте разом з учнями, чому деякі згини мають лише один варіант, а деякі можуть мати кілька.

## Наближення Фудзімото

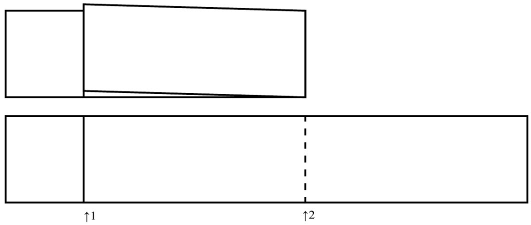
Зігнути папір у 2, 4, 8, 16 тощо разів – завдання нескладне. Треба просто необхідну кількість разів зігнути його вдвічі. Але як поділити папір у такому співвідношенні, яке не є степенем двійки? Японський учитель Шузо Фудзімото розробив непоганий спосіб визначати майже точно $\frac{1}{n}$-ту частину потрібного шматка паперу. Наведемо покроковий алгоритм [46] для поділу паперу на 5 частин.

*Крок 1.* Зробіть певне припущення, де саме, найімовірніше, знаходиться $\frac{1}{5}$, скажімо, з лівої сторони паперу.

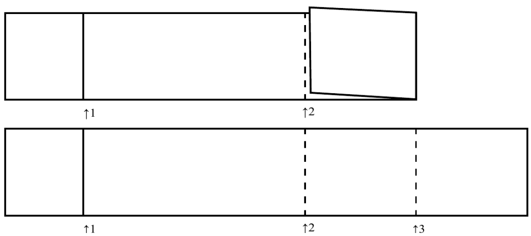



*Крок 2.* Відповідно, праворуч має знаходитися близько $\frac{4}{5}$ частини паперу.

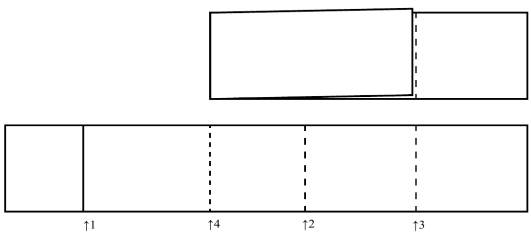
Зігніть цю частину навпіл.



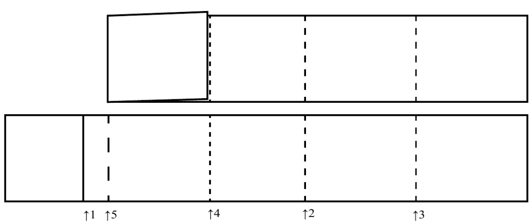
*Крок 3.* Отже, згин припадає десь на $\frac{3}{5}$ частини паперу, якщо рахувати зліва направо. Відповідно, праворуч від згину залишається $\frac{2}{5}$. Згинаємо цю частину навпіл.




*Крок 4.* Отже, маємо $\frac{1}{5}$ праворуч. Значить, зліва від цього згину буде $\frac{4}{5}$. Згинаємо цю частину навпіл.




*Крок 5.* Отриманий згин припадає близько до $\frac{2}{5}$, якщо рахувати зліва направо (позначено крапочками). Якщо зігнути його ще раз навпіл, то отриманий згин буде дуже близько (майже збігатися) зі справжньою $\frac{1}{5}$-ю нашого паперу.

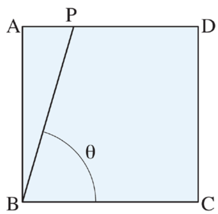



Чому так виходить? А тому, що коли ви спершу робите припущення, де саме знаходиться необхідна позначка, ви допускаєте похибку. А з кожним згином навпіл ця похибка зменшується вдвічі. Оскільки у випадку з $\frac{1}{5}$-ю виконують 4 згини навпіл, то початкова похибка зменшується в $2^4 = 16$ разів. Ось чому останній згин став набагато точнішим за перший.

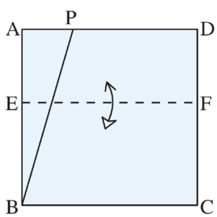
## Трисекція кута

Відомою нерозв'язною задачею є трисекція кута. Задача, як поділити довільний кут навпіл за допомогою циркуля й лінійки без поділок, розв'язана давно. Але як поділити довільний кут на три рівні частини? Виявляється, це зробити циркулем і лінійкою неможливо [47]. Але за допомогою оригамі – можна. Продемонструємо метод поділу гострого кута на три рівні частини, описаний Хісаші Абе у 1984 році [48].

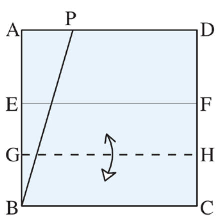
*Крок 1*. Розмістимо кут, який потрібно розділити на три, всередині квадрата так, як показано на рисунку (на прикладі це кут $PBC$).



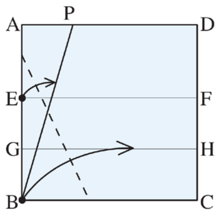

*Крок 2*. Робимо довільний згин $EF$ паралельно до $BC$.



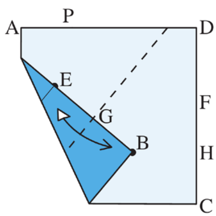

*Крок 3.* Робимо згин $GH$ так, щоб $BC$ наклалося на $EF$, і розправляємо назад.



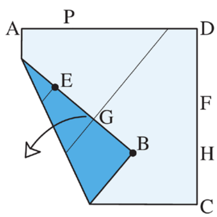
*Крок 4*. Знаходимо і робимо згин, який накладе точку $E$ на промінь $BP$, а точку $B$ на відрізок $GH$.



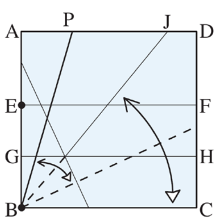

*Крок 5*. Робимо згин уздовж частини згину $GH$, що проходить через точку $G$ і є серединним перпендикуляром до $EB$.



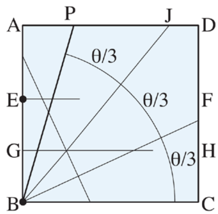

*Крок 6*. Розгортаємо квадрат.




*Крок 7*. Продовжимо згин, який був щойно зроблений, до точки $B$. Також згинаємо листок так, щоб $BC$ наклалося на $BJ$, і розгинаємо.

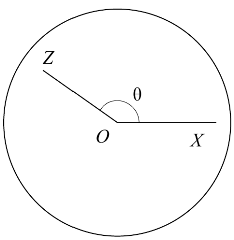


*Крок 8*. Кут поділений на три.

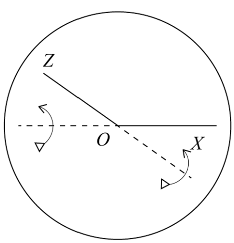



Метод побудови трисектриси тупого кута був розроблений французьким математиком і спеціалістом з оригамі Жаком Джастіном [49]. Для цього поділу не потрібно розміщувати кут у квадраті. Вважається, що кут розташований усередині нескінченного аркуша. Зауважимо, що обидва способи передбачають застосування аксіоми накладання двох точок на дві прямі.

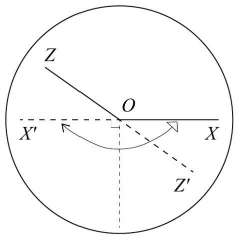
*Крок 1*. Позначимо кут, що треба розділити, як $ZOX$.



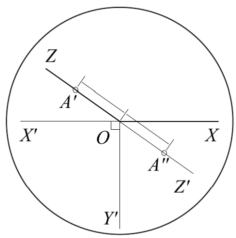

*Крок 2*. Продовжимо $ZO$ і $XO$, зігнувши навпіл листок уздовж кожного з променів.



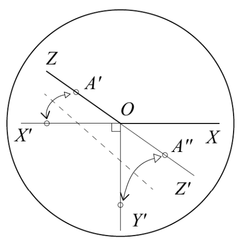
*Крок 3*. Накладаємо промінь $OX'$ на $OX$, отримуючи вісь, перпендикулярну до $OX$.



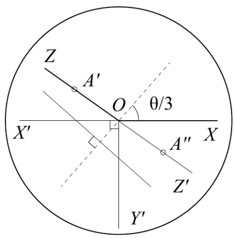

Крок 4. Позначимо точки $A'$ і $A''$ на променях $OZ$ та $OZ'$ так, щоб $OA' = OA''$.




Крок 5. Знаходимо і робимо згин, що накладе точку $A'$ на промінь $OX'$, а точку $A''$ – на $OY'$.



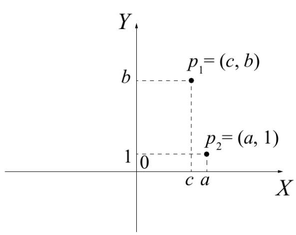
Крок 6. Проводимо перпендикуляр до останнього згину через точку $O$. Отримали шукану третину кута $ZOX$.



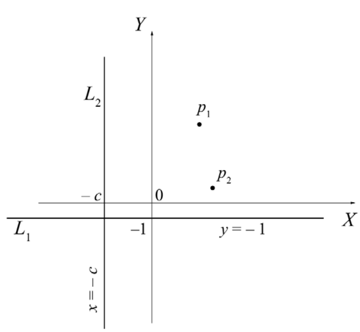

Отже, маючи інструменти для поділу кута на дві та три частини, можна їх комбінувати й отримувати поділ кута на довільні $n$ частин, де $n = 2^m 3^k$.

Дуже цікавим і корисним для учнів старшої школи стане метод знаходження коренів кубічного рівняння за допомогою оригамі.

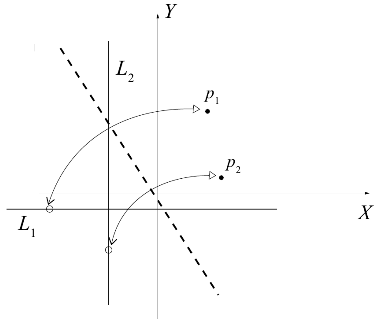
*Крок 1*. Нехай початкове кубічне рівняння має вигляд $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. Позначимо точки $p_1 = (a, 1)$ та $p_2 = (c, b)$ на координатній площині.



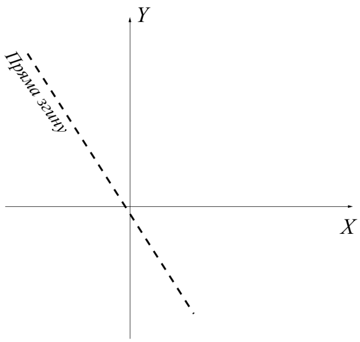

*Крок 2*. Проведемо прямі $L_1$: $y = -1$ та $L_2$: $x = -c$.



*Крок 3*. Знаходимо і робимо згин, який накладе точку $p_1$ на пряму $L_1$, а точку $p_2$ на пряму $L_2$.




*Крок 4*. Кутовий коефіцієнт прямої згину є коренем початкового рівняння (може бути кратним).




Оскільки згин, що накладає дві точки на дві прямі, не є єдиним, то, підібравши інші згини, одержимо інші корені рівняння. Також інші корені рівняння можна знайти класичним способом – скоротивши рівняння на множник, що відповідає знайденому кореню.

## Завдання для самоконтролю

1. Слово «оригамі» означає:
   а) складання паперу;
   б) церемонія сінто;
   в) декоративний папір;
   г) папір для астрономії.

2. Що із зазначеного не є аксіомою оригамі?
   а) для довільних двох прямих на папері можна провести згин, що накладає одну пряму на іншу, причому рівно один;
   б) для довільної прямої та точки можна провести згин, що проходить через дану точку і є перпендикулярним до даної прямої, причому рівно один;
   в) для довільних двох точок на папері можна провести згин, що через них проходить, причому рівно один;
   г) для довільної прямої та точки можна провести згин, що проходить через дану точку і є паралельним до даної прямої, причому рівно один.

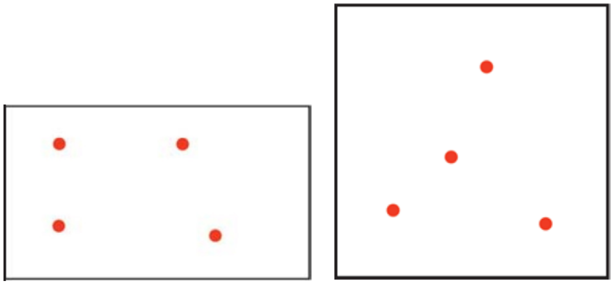
3. Виконайте алгоритм наближення Фудзімото для $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ та $\frac{1}{7}$.

4. Поділіть кут навпіл за допомогою циркуля й лінійки без поділок.

5. Яку з древніх нерозв'язних за допомогою циркуля і лінійки задач можна вирішити за допомогою оригамі?
   а) квадратура круга;
   б) трисекція кута;
   в) подвоєння куба.

## Завдання до підрозділу

1. Складіть папір так, щоб чотири позначені точки утворили прямокутник.



а б

2. Нагадаємо, що парабола – це геометричне місце точок, рівновіддалених від заданої точки (фокуса) і заданої прямої (директриси). Використовуючи цей факт, спробуйте за допомогою згинів утворити силует параболи.

## Корисні відео

# 6.5. Топологічні головоломки

Топологічні головоломки виникли з такого розділу математики, як топологія. Основою для оперування такими головоломками є теорія вузлів, теорія гомотопій і теорія груп кіс. Топологічні головоломки належать до класичних механічних головоломок.

Нижче наведені кілька інтерактивів для проведення заняття з використанням топологічних головоломок.

**Інтерактив 1.** У вас у руках дві мотузки зі спаяними кінцями. Протягніть одне з мотузкових кілець в інше, щоб мотузки міцно зачепились одна за одну, і спитайте в учнів, чи є отримана конструкція вузлом. Різні відповіді та ідеї можуть викликати дискусію. Проте правильною відповіддю є «ні». По-перше, з математичної точки зору, вузлом називатиметься *одна замкнена лінія*, а оскільки у вас у руках два зчеплених кільця, то це не вузол. З іншого боку, з логічних міркувань, це не є вузлом, бо ви *нічого не зав'язували*.

Це явище яскраво ілюструє ідею про те, що топологічні головоломки так і влаштовані. Це набір металевих, дерев'яних, пластикових предметів, поєднаних або не поєднаних мотузкою, і які є не чим іншим, як псевдозачепленням тривіальних конструкцій.

Розв'язання топологічних головоломок розвиває увагу, просторове мислення і мислення неперервними перетвореннями, оскільки ламати й різати таку головоломку заборонено. Металеві головоломки були колись давно придумані ковалями, які виробляли їх для своїх дітей і друзів.

**Інтерактив 2.** Учнів розподіліть на групи й роздайте кожній групі по набору металевих головоломок. Продемонструйте принцип пошуку рішення, адже всі металеві головоломки мають схожу схему розв'язування, яка працює без застосування сили. Зазвичай вони складаються з кількох частин різної форми, деякі з яких необхідно роз'єднати, а потім відновити початкову конфігурацію.

Метою цього інтерактиву є розгляд основних підходів до розплутування твердих зачеплень, пошук спільних шаблонів для розв'язання металевих головоломок, розвиток просторового мислення.

**Інтерактив 3.** Більшість топологічних головоломок створюються так, щоб найпростішим способом розв'язання здавалося прибирання або деформація якоїсь частини. Оскільки це робити заборонено, то виникає потреба знайти способи «обходу» компоненти, що заважає. Це стосується і металевих, і мотузкових головоломок. Якщо не можна протиснути предмет через інший, потрібно застосувати трюк, який трапляється в багатьох розділах математики, це оператор спряження. Тобто ми робимо допоміжний рух, потім необхідне перетворення – «обхід», і повернення в попередню позицію. Продемонструвати спряження можна на прикладі головоломки «Вушко голки» (*рис. 88*).

Рис. 88. Головоломка «Вушко голки»

Завдання: зняти кільце з конструкції. У дерев'яній паличці є отвір, у який проходить кільце і дерев'яна шайба, але не проходить кулька.

Рис. 89. Покрокове розв’язання головоломки

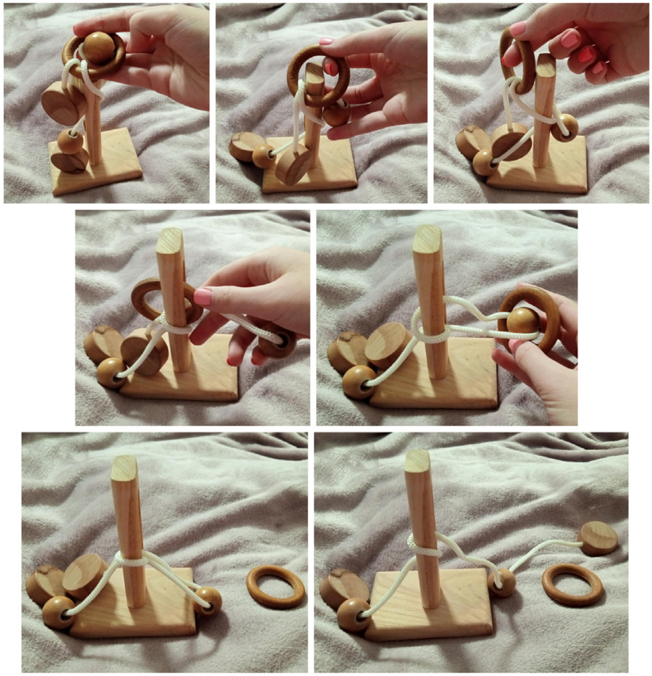


Рис. 90. Фінальна стадія розв’язання головоломки

Якщо ви ретельно виконаєте все, що зображено на *рис. 89* і *рис. 90*, то помітите закономірність: ви двічі робили прямий і обернений перехід з одного стану головоломки в інший, у якому рух, необхідний для розв’язання, стає з неможливого можливим. Виконуючи усе так, як зображено на рисунках, в оберненому порядку, ви зможете зібрати головоломку назад. Виконайте завдання кілька разів для того, щоб чітко зрозуміти те, що в ній відбувається.

На с. 53 є *Розминка 2*, яку також можна провести в контексті топологічних головоломок, адже її принцип дії такий самий: не можете пройти наскрізь – обійдіть.

**Інтерактив 4.** Щоб зацікавити учнів топологією, проведіть із ними практичний мініурок під назвою «*Стрічка Мебіуса*». Для цього кожному знадобляться ножиці, клей (скотч) та кілька листків А4. Нехай учні повторюють за вами ваші дії. Для початку ви вирізаєте з листка стрічку – прямокутник довжиною в ширину А4 і шириною десь у чверть довжини А4. Тепер, якщо ви склеїте протилежні кінці смужки не у звичайне кільце, а один раз перекрутите, то отримаєте стрічку Мебіуса. Вона цікава тим, що коли ми запустимо мураху повзти по нібито зовнішній частині стрічки, то в якийсь момент виявимо, що вона повзе по внутрішній.

Так само, якби ми почали малювати лінію, що йде по стрічці паралельно до її краю, то врешті обійшли б *усю стрічку* й повернулися в початкову точку. Отже, в стрічки Мебіуса лише одна сторона, а також лише один край. Для того щоб наочно пояснити різницю, зробіть ще кільце, склеївши нову паперову смужку у формі циліндра. Продемонструйте, що в циліндра є внутрішня поверхня і зовнішня, а також два кола – його границі.

Візьміть у руки циліндр і запитайте в учнів, що вийде, якщо розрізати його посередині (*рис. 91 а*).

Правильна відповідь: вийдуть два менші колечка. Наступне запитання: що вийде, якщо розрізати не кільце, а стрічку Мебіуса (*рис. 91 б*)?

Варіантами відповіді будуть: дві стрічки Мебіуса, одне велике кільце, довга й тонка стрічка Мебіуса. Розрізавши фігуру, переконайтеся, що вийде довга стрічка зі склеєними кінцями, перекручена двічі (*рис. 91 в*).

А що станеться, якщо розрізати стрічку Мебіуса не на дві, а на три частини вздовж? Розріжте і покажіть результат – дві стрічки, зачеплені одна за одну, причому одна перекручена двічі, а друга – звичайна маленька стрічка Мебіуса (*рис. 91 г*).

Наступна задача – зробити на стрічці Мебіуса три поздовжні розрізи. Результат буде доволі неочікуваний (*рис. 91 д*): дві довгі, перекручені двічі й зачеплені стрічки.

Для наступної демонстрації вам знадобиться тричі перекручена стрічка Мебіуса (*рис. 91 е*), яка має бути доволі широка, щоб її можна було розрізати навпіл, але не занадто, щоб вона не порвалася під час перекручування. Запитання: що відбудеться, якщо розрізати цю стрічку вздовж на дві частини? Виявляється, що буде одна велика перекручена петля з вузлом (*рис. 91 є*).

Повернімося зі стрічки Мебіуса на більш просту поверхню, про яку ми вже згадували, – циліндр. Зробіть два однакові циліндри і скріпіть їх так, як показано на *рис. 91 ж*.

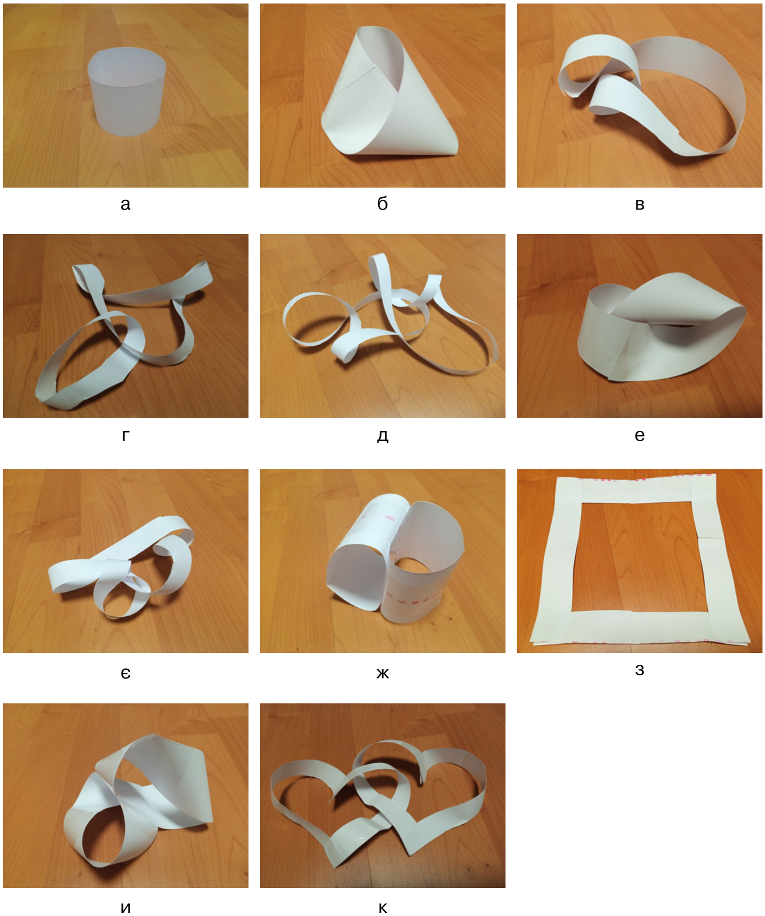



Рис. 91. Практичне заняття з розрізання фігур

Можна розрізати один циліндр по середині й запитати в учнів: «Як ви гадаєте, скільки частин паперу вийде, коли я доріжу обидва циліндри?» Нехай вони не озвучують відповідь, а лише уявлять, якої форми вийде (чи вийдуть) отримана фігура, і запишуть (або намалюють) відповідь на листочку. Ваша мета – розрізати обидва циліндри вздовж пунктирних ліній (*рис. 91 ж*). І отже, правильна відповідь буде несподіваною – квадрат (*рис. 91 з*). Це справляє неабияке враження на будь-кого, хто не знає цей фокус. Покажіть тепер, як оберненими діями прийти від квадратної рамки до двох циліндрів.

Повернімося знову до стрічок Мебіуса. Для цього рекомендуємо вам мати вже заготовлену модель – дві стрічки Мебіуса, склеєні під прямим кутом (*рис. 91 и*). Що буде, якщо розрізати їх так, як ми щойно розрізали циліндри? Нехай учні знову подумають над варіантами, поки ви оперуєте ножицями.

І відповідь буде доволі неочікувана й романтична: це два сердечка, зачеплені одне за одне (*рис. 91 к*).

Проте є одне дуже важливе зауваження. Під час виготовлення стрічки Мебіуса перед вами стоїть вибір: перекрутити її вправо чи вліво (вийдуть, відповідно, правостороння стрічка Мебіуса і лівостороння). Щоб отримати два серця, необхідно скріпити правосторонню і лівосторонню стрічку Мебіуса. Інакше результат буде гіршим (*рис. 92*).

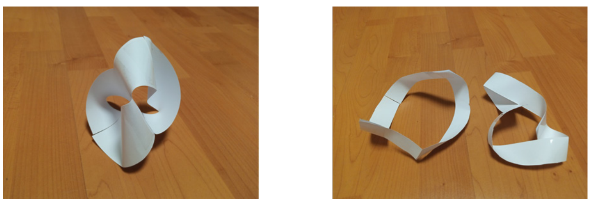


Рис. 92. Результат неправильного з’єднання стрічок Мебіуса

Про це обов’язково попередьте учнів.

Стрічка Мебіуса є найвідомішим топологічним об’єктом, що вивчається математиками й у наш час. Експерименти з розрізанням паперових виробів зі стрічки Мебіуса підтверджують те, що її можна ще довго і довго досліджувати.

**Інтерактив 5.** Для продовження теми потрібні дві маленькі картонні коробки, перев’язані стрічками так, як показано на *рис. 93*.

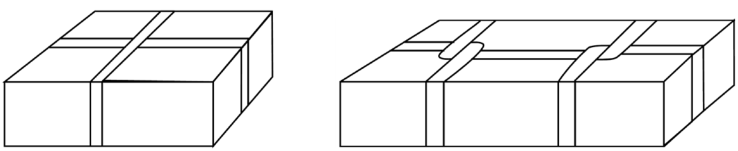
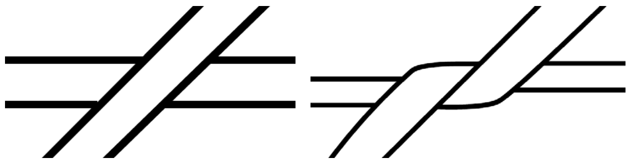


Рис. 93. Схеми перев’язування двох коробок для демонстрації

Коли готуватимете ці коробки, обмотайте їх лише однією стрічкою, не перекручуючи (тобто сторона, яка до перехрестя була верхньою, залишається верхньою і після перехрестя). Завдання, яке ставиться перед учнями: чи можна (якщо можна, то як?) перев'язати коробку *гумовою* стрічкою, у якої від початку з'єднані кінці (після перев'язування звичайною стрічкою зав'язували бантик)? Місця самоперетину стрічки можуть бути або прямі (*рис. 94 а*), або із взаємозаворотом (*рис. 94 б*).



а б

Рис. 94. Два варіанти перетину стрічки

Для експериментів візьміть широку товсту гумову стрічку довжиною приблизно 30 см (у нерозтягнутому стані) і вирізаний із цупкого картону прямокутник розміром 15 × 20 см. Спробуйте зробити так, як зображено на *рис. 95*.

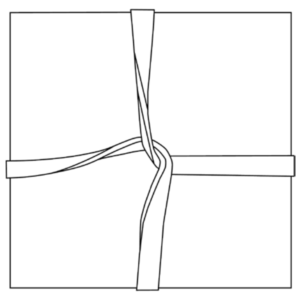


Рис. 95. Картон, обв'язаний гумовою стрічкою

Насправді так перев'язати картон без перекручувань гумової стрічки не можна. Також не вийде перев'язати картон і способами, якими перев'язували маленькі коробочки. Однак є кілька способів, як перев'язати коробку (картон) гумовою стрічкою без перекручувань, щоб умовна схема перев'язування була така, як на *рис. 96*.

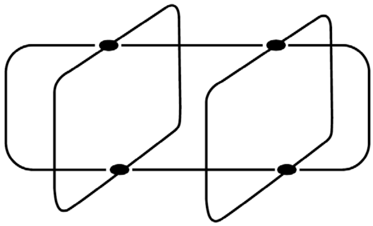


Рис. 96. Схема, якої можна досягнути без перекручувань

Як це зробити? Відповідь є в останньому розділі цього посібника.

## Завдання для самоконтролю

1. Щоб обійти компоненту головоломки, яка заважає її розв'язанню, застосовується математичний прийом:
   а) комутування;
   б) спряження;
   в) централізація;
   г) транспозиція.

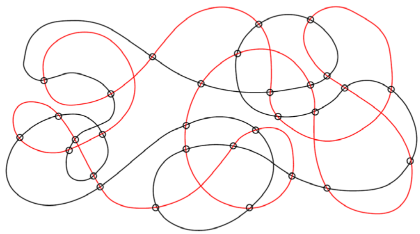
2. Для стрічки Мебіуса справедливо, що вона:
   а) має одну сторону;
   б) має дві сторони;
   в) має один край;
   г) має два краї;
   д) не має країв.

3. Щоб одержати два з'єднані паперові сердечка, потрібно розрізати:
   а) правосторонню стрічку Мебіуса;
   б) лівосторонню стрічку Мебіуса;
   в) правосторонню і лівосторонню стрічку Мебіуса, скріплені під прямим кутом;
   г) дві правосторонні стрічки Мебіуса, скріплені під прямим кутом.

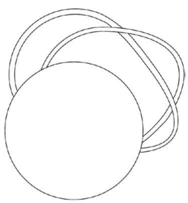
4. Щоб одержати квадратну паперову рамку, потрібно розрізати:
   а) два циліндри, скріплені вздовж своїх границь;
   б) циліндр і лівосторонню стрічку Мебіуса;
   в) правосторонню і лівосторонню стрічку Мебіуса, скріплені під прямим кутом;
   г) два циліндри, скріплені під прямим кутом.

## Завдання до підрозділу

1. Чорним олівцем намалюйте замкнену криву довільної форми. Тут же червоним олівцем намалюйте другу криву такого самого типу, але не проводячи її через точки самоперетину чорної лінії. Обведіть кружечками всі точки, в яких червона лінія перетинається із чорною. Доведіть, що кількість кружечків завжди буде парною.



2. На рисунку зображена неперервна мотузкова петля, частково закрита круглою пластиною. Пан *M* бачить тільки ту частину петлі, якої не видно на рисунку, і не може сказати нам, чи є на ній вузол. Пан *N* бачить усю петлю і стверджує, що на ній є один простий вузол. Нарисуйте те, що є під пластиною.



3. Ви вже знаєте, що буде, якщо розрізати навпіл звичайну стрічку Мебіуса і перекручену тричі. Спробуйте розрізати стрічку Мебіуса з 2, 4, 5, 6 тощо перекручуваннями. Яку закономірність в утворених фігурах ви спостерігаєте?

## Корисні відео

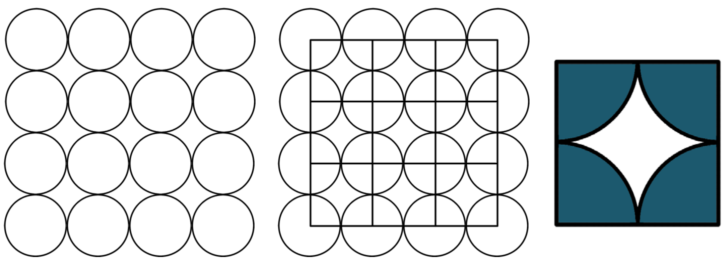
# 6.6. Пакування

## Пакування на площині

Задача про пакування куль є особливо актуальною в той час, коли треба триматися дистанції. Задача про те, як безпечно відкривати офіси, школи, громадські місця, дотримуючись відстані півтора метра один від одного, зводиться до питання, яке математики вивчають уже кілька століть, – пакування неперетинних куль. Вона здається простою за описом, але привертає увагу найвидатніших математиків. Найцікавіші дослідження в цій царині ведуться і нині, зокрема у вищих вимірах. Українська вчена Марина В'язовська нещодавно знайшла найкращий спосіб пакування куль у 8-вимірному просторі, а ця техніка необхідна для оптимізації кодів корекції помилок, які використовуються у стільникових телефонах, під час обміну інформацією з космічними зондами тощо.

Розглянемо різні типи пакування кругів на площині, у квадраті, колі, правильному трикутнику, щоб навчитися знаходити щільність пакування.

Розглянемо **метод 1 – пакування кругів на площині.**



а б в

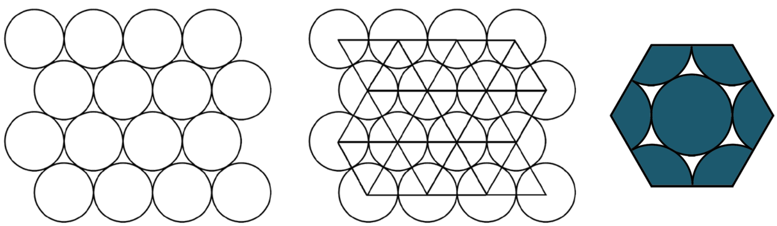
Рис. 97. Метод 1 – квадратне пакування кругів

Закономірність пакування повторюється в усіх напрямках, як плитка, якою замостили площину (*рис. 97 а*). Невеликі проміжки між кругами говорять про те, що площина заповнена не всюди (*рис. 97 в*), що є очікуваним. Нас цікавить, який відсоток площини виявляється покритим. Це є «щільністю» конкретного методу пакування. Наведений на рисунку метод називається квадратною упаковкою, і не дарма – центри кіл можна уявити в ролі вершин квадратів (*рис. 97 б*).

Порахуємо «щільність» першого методу. Наше завдання полегшує симетричність візерунка. Оскільки ці квадрати покривають всю площину періодично, покритий кругами відсоток площини збігається з відсотком покритого кругами квадрата. Розглянемо один із квадратів.

Припустимо, радіус кола дорівнює $r$. Це означає, що довжина сторони квадрата дорівнює $2r$. У кожній з вершин квадрата є чверть круга, тому відсоток покриття кожного квадрата просто дорівнює відношенню площі одного повного круга до площі одного повного квадрата: $\frac{\pi}{4}$. Кожен квадрат приблизно на 78,54% покритий кругами, тому з огляду на замощення площини вся вона покрита кругами приблизно на 78,54%. Такою є щільність квадратної упаковки. Зауважте, що з відповіді зник радіус $r$, бо не важливо, якого розміру круги, – в одному квадраті все одно буде чотири чверті круга.

Якщо ви намагалися складати пляшки з водою на боці методом 1, то вони зісковзували й заповнювали проміжки. Тому існує ще один спосіб упакувати круги на площині – **метод упаковки 2** (*рис. 98 а*).



а б в

Рис. 98. Метод 2 – гексагональне пакування кругів

Застосуємо схожий з попереднім підхід і позначимо, що центри відповідних кіл у такому випадку формують правильні шестикутники (*рис. 98 б)*.

Порахуємо «щільність» другого методу пакування. Ми називаємо це *шестикутним,* або *гексагональним,* пакуванням. Такий спосіб ефективніше заповнює проміжки порівняно з квадратним. Щоби перевірити це, порівняємо їхні щільності пакування. Шестикутники, як і квадрати, повністю замощують площину, тому ми можемо визначити щільність цього методу, проаналізувавши один шестикутник (*рис. 98 б*).

Площа одного трикутника дорівнює $\sqrt{3}\, r^2$, а площа трьох однакових частинок круга, які в нього вписані, – $\frac{\pi r^2}{2}$. Отже, відношення площ кругів до площ трикутників дорівнює $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$. Кожен шестикутник приблизно на 90,69% покритий кругами, тому таке пакування буде більш щільним, ніж квадратне. Зауважте, що радіус знову зник, як і очікувалося. Насправді більш ефективного пакування не існує. У 1773 році для двовимірного Евклідового простору Жозеф Луї Лагранж довів, що пакування з максимальною щільністю – шестикутне (гексагональне).

Для виконання практичної роботи знадобиться один або кілька наборів, що мають прямокутну рамку й монети однакового розміру. Або скористайтеся дерев'яним набором із магазину головоломок (*рис. 99*).

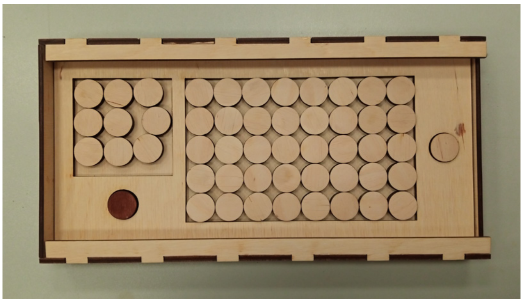


Рис. 99. Головоломка на пакування кругів

Застосуйте різні способи розташування монет або дерев'яних шайбочок в обмеженій чотирма стінками фігурі. Якщо у вас є *Ten Penny Puzzle*, то зверніть увагу на те, що в цій задачі щільнішим буде неочевидне пакування.

## Пакування в просторі

Задачі на просторове пакування – це математичні оптимізаційні задачі, у яких об’єкти пакують у контейнери. Завдання: упакувати окремий контейнер якомога щільніше або упакувати всі об’єкти, використавши якомога менше контейнерів.

Багато з таких завдань стосуються упаковки предметів у повсякденному житті, їх складання і транспортування.

Існує велика кількість задач, що відомі як головоломки про пакування: кубики сома, куб Бедлама, диявольський куб, головоломка Слотобера-Граатсми.

Продемонструємо розв’язування головоломки, створеної Джоном Конвеєм, яка називається «Дилема пакувальника» (*рис. 100*). На наш погляд, головоломка є складною, а її розв’язання вимагає розвиненого аналітичного і логічного мислення. Продемонструємо метод вузьких місць (5), коли правильно сформульовані запитання на кожному кроці звужують кількість можливих варіантів до єдиного можливого і дають зрозумілий і прямий шлях до розв’язку.

Головоломка полягає в тому, що є 17 прямокутних паралелепіпедів трьох різних розмірів (п’ять – 1 × 1 × 1, шість – 1 × 2 × 4, шість – 2 × 2 × 3). Завдання – упакувати їх у куб. Задача видається складною, поки вона не розкладена на окремі кроки і питання.

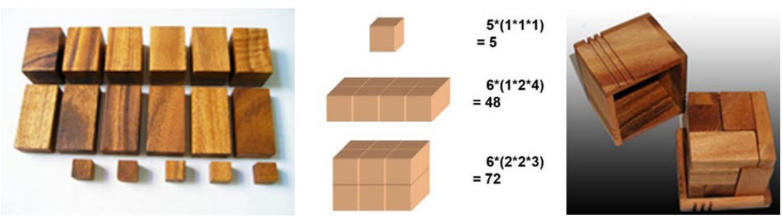



Рис. 100. Головоломка «Дилема пакувальника»

*Крок 1*. Питання. Що потрібно зробити?

Відповідь. Зважаючи на розміри елементів і їх кількість, ми маємо зібрати куб із розмірами 5 × 5 × 5.

*Крок 2.* Питання. Які будемо мати проєкції на площини?

Відповідь. Незважаючи на те, як вони розташовані, елементи 1 × 2 × 4 та 2 × 2 × 3 завжди перекриють парну кількість квадратів. Елементи 1 × 1 × 1 покривають непарну кількість клітинок – одну (*рис. 101*).

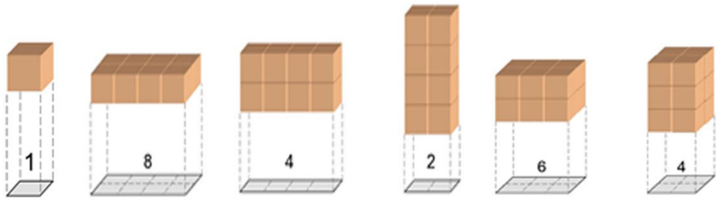



Рис. 101. Проєкції елементів на горизонтальну площину

*Крок 3.* Запитання. Чому парність і непарність – це важливо?

Відповідь. Один горизонтальний рівень складається із 25 клітинок (непарна кількість) і не може бути покритий лише парними елементами.

**Висновок.** На кожному рівні має бути елемент 1 × 1 × 1. Навіть більше, оскільки це має бути справедливим для кожного з п'яти горизонтальних рівнів, то кожен з них має містити хоча б один маленький кубик. Але ж кубиків у нас всього п'ять. Це означає, що маємо лише один маленький кубик в одній горизонтальній площині. Ці самі міркування стосуються і вертикальних шарів, тому в кожному вертикальному шарі має бути один кубик. Отже, спробуємо розмістити кубики 1 × 1 × 1 по діагоналі (*рис. 102*).

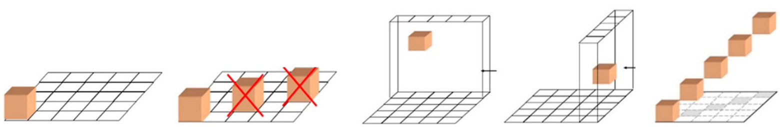


Рис. 102. Розміщення елементів по діагоналі

*Крок 4.* Складання головоломки. Симетрія. Розпочнемо з маленького кубика в лівому кутку. Елемент 1 × 2 × 4 розміститься в нижній площині й підтримуватиме маленький кубик із другого рівня (*рис. 103.1*). Потім використаємо два елементи 2 × 2 × 3 на стороні праворуч і ліворуч від діагоналі, які стануть основою для діагональних кубиків на третьому і четвертому рівнях (*рис. 103.2*). Використаємо елемент 1 × 2 × 4 для того, щоби підтримати п'ятий маленький кубик (*рис. 103.3*). Місця, які лишилися, заповнюються елементами симетрично відносно діагоналі з маленьких кубиків: дальній елемент знизу праворуч під маленьким кубом має відповідний симетричний елемент – ближній верхній праворуч над кубом (*рис. 103.4)*. Установлюємо ще дві пари блоків 2 × 2 × 3 праворуч на передній частині і праворуч позаду (*рис. 103.5*). Далі пара 1 × 2 × 4 – так само позаду зверху і знизу спереду (*рис. 103.6*). Й останні блоки поміщені на вже очевидні місця, протилежні їхнім «двійникам» у нижній частині головоломки (*рис. 103.7*).

Куб 5 × 5 × 5 складено.

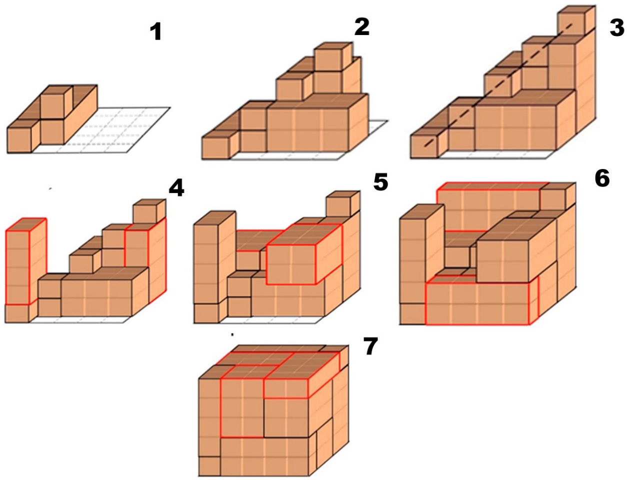



Рис. 103. Покрокове складання головоломки

## Завдання для самоконтролю

1. Який математик розв'язав задачу про пакування куль у 8-мірному просторі? З якої він країни?
   а) Теренс Тао, Австралія;
   б) Марина В'язовська, Україна;
   в) Метт Паркер, Австралія;
   г) Юрій Дрозд, Україна.

2. Яке з пакувань кругів на площині є найбільш щільним?
   а) трикутне;
   б) чотирикутне;
   в) п'ятикутне;
   г) шестикутне.

3. Хто довів, що не існує більш щільного пакування кругів на площині, ніж гексагональна упаковка?
   а) Леонард Ойлер;
   б) Жозеф Луї Лагранж;
   в) Адрієн-Марі Лежандр;
   г) Оґюстен Луї Коші.

4. Яке (або які) поняття є підказкою відповіді до головоломки «Дилема пакувальника»?
   а) розклад чисел на множники;
   б) координати в просторі;
   в) прості числа;
   г) парність і непарність.

## Завдання до підрозділу

Маючи прямокутну рамку із шайбочками (*рис. 99*), знайдіть спосіб помістити в неї ще одну шайбочку.

## Корисні відео

# 6.7. Гра в 15

Гра в 15 – головоломка для терплячих. Як уже було зазначено в розділі 1, її вигадав американський поштмейстер Ной Чепмен.

### Алгоритм розв'язання гри в 15

1. Спочатку зберіть верхній рядок. Послідовно розмістіть фішки 1, 2, 3 та 4 і переходьте до наступного рядка.
2. Зберіть фішки 5, 6, 7 та 8, не змінюйте їх розташування до кінця гри.
3. Поверніть на свої місця 9 та 13. І теж більше їх не рухайте.
4. Тепер ігрове поле звузилося до шести клітинок, на яких 10, 11, 12, 14 та 15 розташовані хаотично. Повертаємо на свої місця фішки 10, 11 та 12.

Можуть виникнути труднощі, а саме: всі фішки, окрім 14 та 15, стоятимуть на своїх місцях, а ці дві ніяк не можна поміняти місцями. Це означає, що хтось спеціально зробив ваш набір нерозв'язним (висипав фішки і склав неправильно). Для того щоб з'ясувати, чи є набір розв'язним ще до того, як починати збирати його за алгоритмом, можна скористатися математикою гри в 15.

### Математичне підґрунтя (∗)

Класичні правила полягають у тому, що необхідно з певної заплутаної позиції фішок відновити т. зв. стандартне розміщення. У роботі В. В. Джонсона і В. Е. Сторі [35] майже одразу після виходу головоломки у світ було доведено, що вона є розв'язною тоді й лише тоді, коли перестановка, що відповідає розташуванню фішок на ігровому полі, є парною.

*Перестановка* (скінченної) множини – сукупність елементів множини, упорядкованих певною мірою. Для того щоб зрозуміти твердження Джонсона і Сторі, необхідно позначити порожнє місце фіктивним квадратиком з номером 16. Тоді стандартне розміщення фішок на полі позначається перестановкою (1, 2, ..., 16). Парність перестановки визначається парністю кількості транспозицій, необхідних для повернення цього впорядкування у стандартне (за зростанням). *Транспозиція* – перестановка, що міняє місцями рівно 2 елементи множини. Тобто (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 14, 16) відрізняється від стандартної транспозицією елементів 14 та 15.

Розглянемо на прикладі. Нехай початкова позиція фішок така, як на *рис. 104*. Запишемо її числами у рядок:

(1, 12, 3, 6, 8, 9, 15, 7, 4, 2, 13, 14, 10, 11, 5, 16)

і визначимо парність. Тобто повертаємо кожне число на його місце у стандартній позиції і рахуємо кількість кроків, за яку розв'яжемо головоломку. Якщо пересуватимемо фішки на ігровому полі із цієї позиції, витратимо більше часу. Однак це не вплине на ознаку парності – результат залишиться таким самим.

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1** | **12** | **3** | **6** |
| **8** | **9** | **15** | **7** |
| **4** | **2** | **13** | **14** |
| **10** | **11** | **5** | |

Рис. 104. Довільна початкова позиція фішок

0. (1, 12, 3, 6, 8, 9, 15, 7, 4, 2, 13, 14, 10, 11, 5, 16).
1. (1, 2, 3, 6, 8, 9, 15, 7, 4, 12, 13, 14, 10, 11, 5, 16).
2. (1, 2, 3, 4, 8, 9, 15, 7, 6, 12, 13, 14, 10, 11, 5, 16).
3. (1, 2, 3, 4, 5, 9, 15, 7, 6, 12, 13, 14, 10, 11, 8, 16).
4. (1, 2, 3, 4, 5, 6, 15, 7, 9, 12, 13, 14, 10, 11, 8, 16).
5. (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 15, 9, 12, 13, 14, 10, 11, 8, 16).
6. (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 13, 14, 10, 11, 15, 16).
7. (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 14, 12, 11, 15, 16).
8. (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 14, 12, 13, 15, 16).
9. (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 13, 15, 16).
10. (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16).

Нам знадобилося десять кроків (транспозицій), аби отримати стандартне розміщення. Отже, ця перестановка парна, що забезпечує розв'язність головоломки.

## Завдання для самоконтролю

1. Хто є автором гри в 15?
   а) Ной Чепмен;
   б) Сем Лойд;
   в) Генрі Дьюдені;
   г) Джон Конвей.

2. Яким є перший крок у складанні гри в 15?
   а) визначити парність перестановки розташування фішок;
   б) зафіксувати положення нижнього рядка;
   в) поставити на своє місце фішку 9;
   г) зібрати перший рядок.

3. Що таке транспозиція?
   а) кількість елементів перестановки;
   б) перестановка, яка забезпечує розв’язання гри в 15;
   в) перестановка, яка міняє місцями лише два елементи;
   г) фіктивний квадратик із номером 16.

4. Що таке парність перестановки?
   а) парність числа елементів перестановки;
   б) парність кількості транспозицій, що входять до перестановки;
   в) парність кількості парних чисел у перестановці;
   г) парність магічної константи.

## Завдання до підрозділу

1. Розташуйте фішки гри в 15 так, щоб:
   - утворився магічний квадрат із сумою за вертикалями, горизонталями і діагоналями, що дорівнює 30;
   - утворився магічний квадрат із сумою за вертикалями, горизонталями і діагоналями, що дорівнює 34 (порожнє місце вважається числом 16);
   - числа зростали за спіраллю із зовнішнього краю до центру;
   - числа зростали від 1 до 15 зверху вниз;
   - числа зростали за правосторонньою спіраллю із центру назовні;
   - парні числа перебували у верхній половині поля, а непарні – в нижній;
   - непарні числа перебували у верхній половині поля, а парні – в нижній;
   - числа зростали «змійкою»;
   - числа зростали за діагоналлю з правого верхнього кутка;
   - утворилися інші цікаві розташування, зображені на останніх трьох схемах.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 12 | 2 | 1 | 15 |
| 2 | 9 | 10 | 4 |
| 11 | 5 | 6 | 8 |
| | 14 | 13 | 3 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 13 | 1 | 12 | 8 |
| 4 | | 5 | 9 |
| 7 | 11 | 2 | 14 |
| 10 | 6 | 15 | 3 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 12 | 13 | 14 | 5 |
| 11 | | 15 | 6 |
| 10 | 9 | 8 | 7 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 9 | 13 |
| 2 | 6 | 10 | 14 |
| 3 | 7 | 11 | 15 |
| 4 | 8 | 12 | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 13 | 14 | 15 | |
| 12 | 3 | 4 | 5 |
| 11 | 2 | 1 | 6 |
| 10 | 9 | 8 | 7 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 6 | 8 |
| 10 | 12 | 14 | |
| 1 | 3 | 5 | 7 |
| 11 | 9 | 13 | 15 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 | 7 |
| 9 | 11 | 13 | 15 |
| 2 | 4 | 6 | 8 |
| 10 | 12 | 14 | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 5 | 12 | 13 |
| 3 | 6 | 11 | 14 |
| 2 | 7 | 10 | 15 |
| 1 | 8 | 9 | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 2 | 7 |
| 11 | 8 | 5 | 3 |
| 14 | 12 | 9 | 6 |
| | 15 | 13 | 10 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 5 | 6 | 7 |
| 3 | 2 | 1 | 8 |
| 14 | 15 | | 9 |
| 13 | 12 | 11 | 10 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 1 | 3 |
| 6 | 8 | 5 | 7 |
| 10 | 12 | 9 | 11 |
| 14 | | 13 | 15 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | |
| 15 | 14 | 13 | 4 |
| 10 | 11 | 12 | 5 |
| 9 | 8 | 7 | 6 |

2. Визначте, чи можна розв’язати гру в 15 із таких позицій (за допомогою твердження Джонсона і Сторі або експериментально).

*Завдання № 1*

| | | | |
|---|---|---|---|
| 15 | 14 | 13 | 12 |
| 11 | 10 | 9 | 8 |
| 7 | 6 | 5 | 4 |
| 3 | 2 | 1 | |

*A*

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 15 | 14 | 13 |
| 12 | 11 | 10 | 9 |
| 8 | 7 | 6 | 5 |
| 4 | 3 | 2 | 1 |

*B*

*Завдання № 2*

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 12 | 13 | 14 | 5 |
| 11 | | 15 | 6 |
| 10 | 9 | 8 | 7 |

*A*

| | | | |
|---|---|---|---|
| 10 | 9 | 8 | 7 |
| 11 | | 15 | 6 |
| 12 | 13 | 14 | 5 |
| 1 | 2 | 3 | 4 |

*B*

*Завдання № 3*

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7 | 11 | 14 | |
| 4 | 8 | 12 | 15 |
| 2 | 5 | 9 | 13 |
| 1 | 3 | 6 | 10 |

*A*

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 14 | 11 | 7 |
| 15 | 12 | 8 | 4 |
| 13 | 9 | 5 | 2 |
| 10 | 6 | 3 | 1 |

*B*

*Завдання № 4*

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 3 | 2 | 1 |
| 5 | 14 | 13 | 12 |
| 6 | 15 | | 11 |
| 7 | 8 | 9 | 10 |

*A*

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7 | 6 | 5 | 4 |
| 8 | 15 | 14 | 3 |
| 9 | | 13 | 2 |
| 10 | 11 | 12 | 1 |

*B*

*Завдання № 5*

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7 | 8 | 9 | 10 |
| 6 | 1 | 2 | 11 |
| 5 | 3 | 4 | 12 |
| | 15 | 14 | 13 |

*A*

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 8 | 9 | |
| 2 | 7 | 10 | 15 |
| 3 | 6 | 11 | 14 |
| 4 | 5 | 12 | 13 |

*B*

*Завдання № 6*

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 | 7 |
| 9 | 11 | 13 | 15 |
| 2 | 4 | 6 | 8 |
| 10 | 12 | 14 | |

*A*

| | | | |
|---|---|---|---|
| 15 | 13 | 11 | 9 |
| 7 | 5 | 3 | 1 |
| 14 | 12 | 10 | 8 |
| 6 | 4 | 2 | |

*B*

*Завдання № 7*

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 4 | 7 |
| 3 | 5 | 8 | 11 |
| 6 | 9 | 12 | 14 |
| 10 | 13 | 15 | |

*A*

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 | 7 |
| 2 | 4 | 6 | 8 |
| 9 | 11 | 13 | 15 |
| 10 | 12 | 14 | |

*B*

*Завдання № 8*

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 | 7 |
| 8 | 9 | 10 | 11 |
| 12 | 13 | 14 | 15 |

*A*

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 15 | 14 | 13 |
| 9 | 10 | 11 | 12 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 1 | 2 | 3 | 4 |

*B*

## Корисні відео

# 6.8. Кубик Рубіка

Кубик Рубіка – це найпопулярніша у світі головоломка, створена для демонстрації взаємного руху скріплених між собою тіл та ілюстрації математичних операцій у реальному житті.

**Найпростіший алгоритм збирання** ви зможете знайти на сайті

## Математичне підґрунтя. Алгоритм збирання (*)

Якщо ви організовуєте освітню діяльність математичного гуртка для класу з поглибленим вивченням математики, то учнів можна ознайомити з надзвичайним способом практичного застосування математики.

Математичний аналіз кубика Рубіка набагато складніший за аналіз гри в 15. Однак, з точки зору теорії груп перестановок, ці ігри належать до одного типу.

*Головоломка кубик Рубіка*. Кубики, які розміщені в центрі кожної із шести граней, називаються *центральними*. Зрозуміло, що повороти граней ніяк не впливають на їх взаємне розташування. Як правило, протилежні пари кольорів такі: білий – жовтий, зелений – синій, червоний – оранжевий.

Кубики, що розташовані в центрах ребер і мають дві кольорові грані, називаються *середніми* або *ребрами*. Ті, які знаходяться у вершинах куба і мають три кольорові грані, називаються кутовими. Позначимо грані кубика маленькими літерами, як прийнято в англомовній літературі:

- f (front) – передня грань;
- b (back) – задня грань;
- u (upper) – верхня грань;
- r (right) – права грань;
- l (left) – ліва грань;
- d (down) – нижня грань.

Великими літерами позначаються повороти відповідних граней, тобто: $F$ – поворот передньої грані на 90° за годинниковою стрілкою, $U$ – верхньої грані тощо. Повороти проти годинникової стрілки позначаються відповідно $F^{-1}, U^{-1}$ тощо. Для спрощення нотації замість степеня іноді вживається «штрих» – $F'$, $U'$. Послідовність поворотів позначається літерами, що відповідають необхідним рухам, з необхідними степенями. Наприклад, слово $FB^2D^{-1}L^{-3}$ означає: «передню грань повернути на 90° за годинниковою стрілкою, задню – на 180°, нижню – на 90° проти годинникової стрілки, ліву – на 270° проти годинникової стрілки».

Кожному з поворотів відповідає перестановка маленьких кубиків з урахуванням їх розфарбування, а всій послідовності – добуток цих перестановок. Будемо називати розташування кубиків у великому кубі його станами. Якщо від стану $S$ можна перейти до стану $S'$ за допомогою серії поворотів σ, то записуватимемо це так: $S'=(S)\sigma$. Стан куба називатимемо допустимим, якщо його можна отримати з початкового (кожна грань свого кольору) обертанням граней. Якщо стан $S$ отриманий із початкового стану $S_0$ серією поворотів $FB^2D^{-1}L^{-3}$, то, застосувавши до куба в стані $S$ послідовність обертань $L^3DB^{-2}F^{-1}$, одержуємо стан $S_0$.

Опишемо один із можливих алгоритмів збирання кубика Рубіка, введемо правила, за якими з будь-якого допустимого стану можна прийти до початкового. У більшості алгоритмів обертання граней групуються в типові комбінації з двох поворотів $X, Y$: $(X, Y \in \{F, R, L, U, D, B\})$:

а) комбінація $X^{-1}YX$ – спряжене обертання $Y$ за допомогою $X$;

б) комбінація $X^{-1}Y^{-1}XY$ – комутатор обертань $X$ та $Y$.

Так само можна розглядати спряження й комутатори степенів обертань, наприклад:

а) $F^{-2}U^3F^2 = F^2U^3F^2$ – спряження обертання $U^3$ за допомогою $F^2 = F^{-2}$;

б) $R^2U^2R^{-2}U^{-2} = R^2U^2R^2U^2$ – комутатор обертань $R^{-2}(= R^2)$, $U^{-2}(= U^2)$ .

Можна переконатися, що комутатор основних поворотів прилеглих граней циклічно переставляє три середні кубики. Наприклад, результат дії $R^{-1}F^{-1}RF$ зображено на *рис. 105 а*. Деякі кубики залишаються нерухомими, а кутові також переміщаються.

Процес збирання кубика Рубіка здійснюється в чотири етапи. Виконання наступного етапу необхідно починати лише тоді, коли попередній завершений. Для подальшого опису збирання літерами $x$, $y$, $z$ позначатимемо грані куба, які мають спільну вершину, а символами $X$, $Y$, $Z$ – відповідні основні повороти.

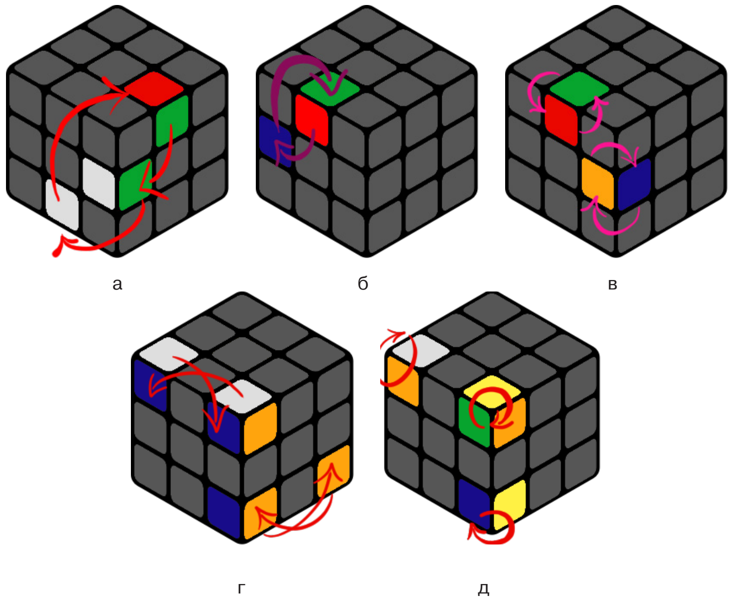



Рис. 105. Збирання кубика із застосуванням певних дій

*Етап 1. Розстановка середніх кубиків по місцях.*

Серія обертань $X^{-1}Z^{-1}Y^{-1}X^{-1}YXZ$ граней куба $x$, $y$, $z$ переставляє два середні кубики грані $x$, а інші середні залишає на місцях. Застосувавши цю схему до певного стану куба $S$, отримаємо новий стан $S'$, що відрізняється від $S$ розташуванням кутових і двох середніх кубиків. Наприклад, послідовність $F^{-1}U^{-1}R^{-1}F^{-1}RFU$ дає результат, зображений на *рис. 105 б.*

Серії таких обертань дають змогу поміняти місцями будь-які два середні кубики. Для цього треба за допомогою допоміжних ходів поставити необхідні кубики у відповідні місця на одній із граней куба, застосувати послідовність $X^{-1}Z^{-1}Y^{-1}X^{-1}YXZ$. Потім, виконавши обернену послідовність допоміжних ходів, досягаємо потрібного стану.

Етап 1 вважається завершеним, коли всі середні кубики перебувають на своїх місцях. Проте вони можуть виявитися неправильно орієнтованими (колір середнього кубика не відповідає кольору відповідного центрального).

*Етап 2. Правильна орієнтація середніх кубиків, що стоять на своїх місцях.*

Добуток трьох комутаторів $(XY^{-1}X^{-1}Y)(YZ^{-1}Y^{-1}Z)(ZX^{-1}Z^{-1}X)$ одночасно повертає два середні кубики грані x, не змінивши розташування інших середніх кубиків. Наприклад, серія

$$(FR^{-1}F^{-1}R)(RU^{-1}R^{-1}U)(UF^{-1}U^{-1}F)$$

повертає кубики так, як на *рис. 105 в*.

Послідовні обертання такого виду, виконані для підхожих граней, дають змогу змінювати орієнтацію будь-яких двох середніх кубиків. Виконуючи спільну переорієнтацію пар середніх кубиків, можна досягти їх початкового розташування. Це випливає з того, що стан, в якому непарна кількість середніх кубиків неправильно орієнтована, не є допустимим.

*Етап 3. Розстановка кутових кубиків.*

Степінь $(XYX^{-1}Y^{-1})^3$ комутатора обертань $X, Y$ сусідніх граней $x$, $y$ здійснює одночасну перестановку пар кутових кубиків, що належать граням, які мають із $x$, $y$ два спільні ребра. Наприклад, третій степінь комутатора $FRF^{-1}R^{-1}$ переставляє кутові кубики так, як на *рис. 105 г*. Добуток степенів комутаторів $(XZX^{-1}Z^{-1})^3(Y^{-1}X^{-1}YX)^3$ здійснює перестановку трьох кутових кубиків грані $x$. Наприклад, серія поворотів $(FUF^{-1}U^{-1})^3(R^{-1}F^{-1}RF)^3$ переставляє кутові кубики так: нижній лівий → верхній лівий → нижній правий → нижній лівий. Після виконання таких серій поворотів середні кубики залишаються на своїх місцях, як і кутові, що не були задіяні в перестановці. За допомогою вищезазначених послідовностей обертань усі кутові кубики можна розставити на свої місця. Водночас необхідно зауважити, що в допустимому стані не може бути ситуації, коли всі кутові кубики, окрім двох, розташовані в тому самому місці, де були на початку. Якщо не всі кутові кубики на своєму місці, то їх не менше ніж три.

*Етап 4. Переорієнтація кутових кубиків, що стоять на своїх місцях.*

Послідовність обертань $\sigma = [(X^{-1}ZXZ^{-1})(Z^{-1}YZY^{-1})(Y^{-1}XYX^{-1})]^2$ одночасно повертає кожен із трьох кутових кубиків, що належать грані $x$, навколо відповідної діагоналі куба на кут $\frac{2\pi}{3}$ за годинниковою стрілкою. Послідовність обертань $\sigma^{-1}$ повертає ті самі кубики на кут $\frac{2\pi}{3}$ проти годинникової стрілки. Наприклад, обертання $\sigma$ для граней $f, u, r$ повертає кутові кубики так, як на *рис. 105 д*.

Отже, за допомогою $\sigma$ та $\sigma^{-1}$ можна перевернути будь-які три кутові кубики. Якщо врахувати факт, що стан, у якому всі середні й усі кутові, крім одного, перебувають на своїх місцях із правильною орієнтацією, не є допустимим, то завершити четвертий етап збирання кубика вже не складно.

Наведений алгоритм є не найбільш економним. Існує безліч як кращих, так і гірших алгоритмів збирання кубика Рубіка, які можна знайти в інтернеті та в спеціалізованій літературі.

## Завдання для самоконтролю

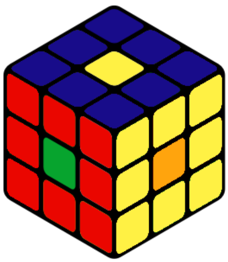
1. Яка математична теорія покладена в основу гри в 15 і кубика Рубіка?
   а) теорія алгоритмів;
   б) теорія груп перестановок;
   в) теорія зображень;
   г) комбінаторика.

2. Скільки наліпок на кубику Рубіка?
   а) 36;
   б) 54;
   в) 48;
   г) 27.

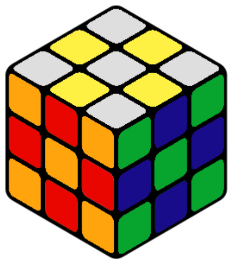
3. Зі скількох маленьких кубиків складається кубик Рубіка?
   а) 26;
   б) 27;
   в) 19;
   г) 24.

## Завдання до підрозділу

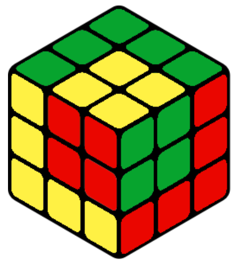
1. Зберіть такі симетричні візерунки на кубику Рубіка:



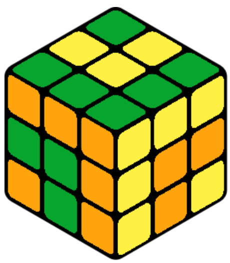
а



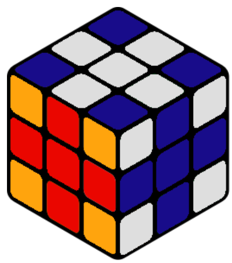
б



в



г



д

2. «Молекуб». Для цього завдання треба зняти зі звичайного кубика Рубіка всі наліпки. Купіть інші наліпки для кубика стандартного розміру, такі дев'ять кольорів: чорний, білий, червоний, оранжевий, жовтий, зелений, блакитний, синій, фіолетовий. Щоби правильно розфарбувати кубик, скористайтеся схемою (*рис. 106*).

   Такий кубик вважається зібраним тоді, коли на кожній грані всі 9 клітинок мають унікальний колір. Крім цього, якщо ви правильно наклеїте кольорові наліпки, то помітите закономірність стосовно середніх і кутових кубиків. Завдання полягає в тому, щоб заплутати кубик (що робиться напрочуд швидко) і зібрати його. Рекомендуємо спочатку дослідити кольорові симетрії, що виникають на кубику. Зібраних станів існує багато.

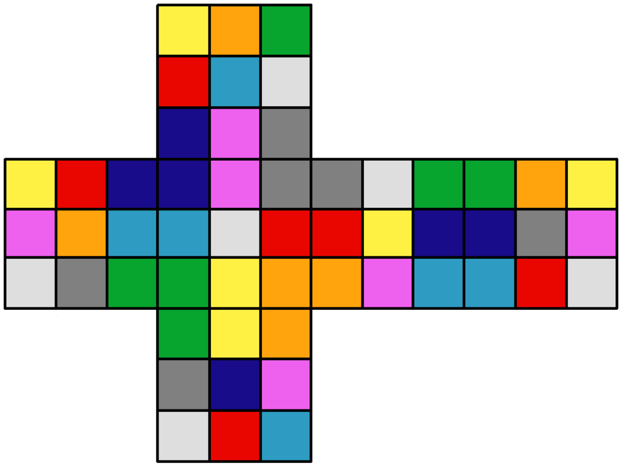


Рис. 106. Схема, згідно з якою ви маєте уважно наклеїти наліпки

# 7.

# Конкурси з головоломками

Максимальна ефективність навчання на основі головоломок досягається завдяки активній роботі вчителя, учнів та їхніх батьків. Тому актуальним є проведення позакласних заходів, до яких можна долучити батьків і вчителів. Основна мета таких заходів – формувати в учнів пізнавальний інтерес до вивчення математики, їхню математичну культуру; навчати використовувати знання на практиці й працювати в команді. Під час таких заходів, зокрема конкурсів, учні мають відчути, що індивідуальний внесок у групові зусилля – це саме те, із чого складається робота в команді, робота великої компанії, робота суспільства, робота всієї цивілізації.

Конкурс із головоломками можна провести під час уроку математики або заняття гуртка, серед кількох класів тощо. Надзвичайно цікаво цей конкурс організовують вчителі київських ліцею «Наукова зміна» та Русанівського ліцею.

Отже, можна проводити такі заходи:

1. *Конкурс командного розв’язування головоломок*. Командне змагання, що складається з теоретичного і практичного турів із розв’язування нестандартних задач і різних конкурсів із командного розв’язування головоломок.
2. *Математичні шуканки*. Змагання, завданням якого є колективне розв’язування задач, що становлять послідовність, об’єднану певним сюжетом.
3. *Математичні рухливі ігри*. Змагання, що поєднує естафету з розв’язування логічних задач або реалізації ігрової стратегії.

# 7.1. Конкурс командного розв’язування головоломок

*Мета конкурсу:* навчити учнів працювати в команді, знаходити спільну мову і вибудовувати стратегію гри.

*Час, що відводиться на проведення конкурсу:* залежить від кількості команд.

*Що потрібно для конкурсу:* приміщення (шкільні кабінети), у яких будуть підготовлені локації з головоломками. Кількість таких кабінетів відповідає кількості команд. На локаціях розміщені матеріали для розв’язування різних задач-головоломок. Для кожної локації потрібен волонтер (це може бути хтось із організаторів конкурсу, вчителів школи або знайома людина, яка погодилася взяти участь в організації). Він ознайомлює команду з правилами щодо проходження етапу й оцінює виконання.

*Початок конкурсу:* команди збираються в одному місці, де отримують маршрутний лист руху локаціями.

*Перебіг конкурсу:* команди переходять від однієї локації з головоломками до іншої і розв’язують завдання. На локаціях для виконання головоломок відводиться час (наприклад, 15 хвилин), за який учні повинні розв’язати головоломки за правилами, які озвучує волонтер. Волонтери мають стежити за виконанням поставленого завдання, фіксувати перебіг виконання й оцінювати рівень командної роботи учасників.

*Підбиття підсумків:* після того як усі команди завершили виконання завдань, відбуваються аналіз результатів, підбиття підсумків і визначення команди-переможця.

## Локації:

### 1. ПОБУДОВА ВЕЖІ

*Завдання:* побудувати вежу максимальної висоти з паличок і маршмелоу (*рис. 107*).

*Реквізит:* упаковки маршмелоу, близько 20 тонких дерев’яних паличок.

*Результат, який фіксують волонтери:* висота вежі.
Виграє команда, яка побудує вежу максимальної висоти.

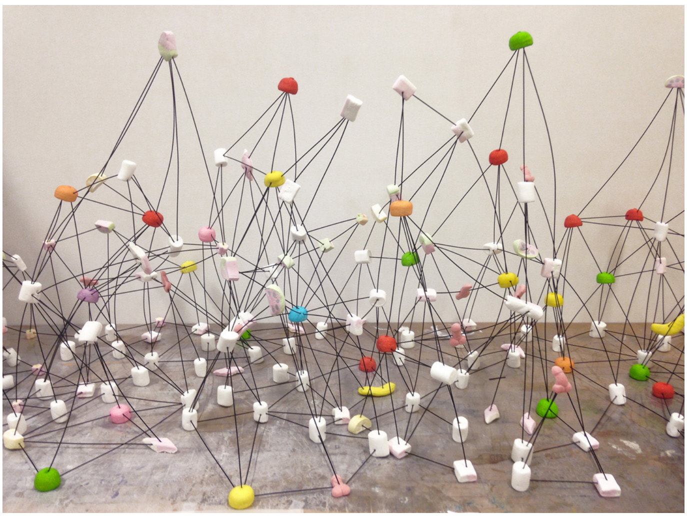


Рис. 107. Побудова вежі

## 2. ЛЮДИ-ЧИСЛА

*Завдання:* учасникам прикріплюються цифри (спереду і на спині). Команда гравців, яка шикується в ряд, має утворити числа, що задовольняють певні властивості (*рис. 108*). Наприклад, число спереду має ділитися на 3, а позаду – на 4.

*Реквізит:* пари картонних цифр, скріплених мотузкою чи стрічкою й степлером, залежно від кількості учасників.

*Результат, який фіксують волонтери:* кількість правильно побудованих пар чисел.

Виграє команда, в якої таких варіантів найбільше. Приклади складання пар чисел і початкових умов ви знайдете у підрозділі 8.2.


Рис. 108. Люди-числа

### 3. ОБРУЧІ

*Завдання:* із шести гімнастичних обручів скласти куб за правилами: кожен має вдержувати в одній руці два обручі й не триматися двома руками за один і той самий обруч; перенести цей куб на 1 метр (*рис. 109*).

*Реквізит:* шість великих металевих гімнастичних обручів.

*Результат, який фіксують волонтери:* вийшло чи ні.
Виграє команда, яка виконала завдання за найменший час.

Рис. 109. Обручі

### 4. СКЛАДАННЯ КУБА

*Завдання:* скласти куб 3 × 3 × 3 із семи частин.

*Реквізит:* пінопластові об’ємні фігури (*рис. 110)*.

*Результат, який фіксують волонтери:* час, за який команда розв’язує головоломку.

*Примітка:* можна організувати як окрему локацію, а можна в межах «Розв’язання головоломки».

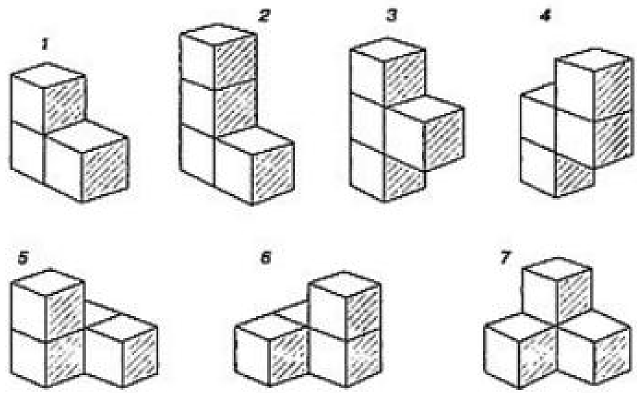



Рис. 110. Складання куба

### 5. ЛАЗЕРНИЙ ПРОМІНЬ

*Завдання:* за допомогою дзеркал навести лазерний промінь у ціль.

*Реквізит:* десять рухливих дзеркал на підставці, лазерна указка із запасними батарейками.

*Результат, який фіксують волонтери:* кількість використаних дзеркал і факт попадання лазера в ціль.

Виграє команда, в якій кількість використаних дзеркал максимальна.

## 6. ПЕРЕПРАВА

*Завдання:* на підлозі за допомогою малярного скотчу розмічається поле, наприклад 6 × 6 (*рис. 111*). Команда гравців має перейти по черзі з одного боку поля на інший за правилами: хід можна робити на сусідню клітинку по вертикалі, горизонталі або діагоналі (варіант: у сусідню клітинку або через одну), при цьому гравець збирає листочки із числами, на які наступає. Числа мають складати послідовність (наприклад, перший гравець збирає числа в порядку зростання, другий – в порядку спадання, третій – лише ті, що діляться на три, тощо). Не можна ступати в клітинку без числа. Якщо учасник не може зробити хід, він залишає число у клітинці, де зупинився, і вибуває з гри.

*Реквізит:* скотч малярний, картки із числами.

*Результат, який фіксують волонтери:* скільки учасників переправилися на протилежний бік поля (що більше, то краще), скільки чисел залишилося на полі (що менше, то краще).

Виграє команда, в якій кількість учасників, яка переправилася на протилежний бік, більша за інші. Приклади розташування чисел у клітинках і приклади правил переправляння – у підрозділі 8.2.

Рис. 111. Переправа

## 7. КУТИ ТА МОТУЗКИ

*Завдання:* команда отримує мотузку довжиною п'ять метрів. Послідовно мають бути виконані такі завдання:

Побудувати кут 60°.
Побудувати кут 90°.
Побудувати кут 45°.
Побудувати кут 30°.

*Реквізит:* мотузка довжиною п'ять метрів.

Вважається, що можна відміряти рівні частини мотузки (за допомогою, наприклад, ліктів).

*Ідеї:* кут у 90° можна побудувати або з «єгипетського трикутника» (3, 4, 5), або спочатку побудувати правильний трикутник (отримати 60°), потім його медіану й отримати кути 90° і 30°. Для кута 45° треба побудувати квадрат. Треба починати з рівних діагоналей.

*Результат, який фіксують волонтери:* кількість побудованих кутів, час.

Виграє команда, яка побудувала найбільшу кількість кутів за найменший час.

## 8. КОЛЬОРОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ

*Завдання:* запам'ятовувати послідовності. З одного непрозорого мішечка гравці, не дивлячись, дістають фішки червоного, синього, зеленого або жовтого кольору. Діставши фішку, гравець дивиться на фішку й голосно називає її колір, кладе її в інший непрозорий мішечок, бере наступну і голосно називає колір попередньої та цієї, потім кольори першої, другої та третьої і т. д. Якщо він помиляється в послідовності, замість нього стає наступний член команди і починає наступну послідовність. Волонтер записує послідовність та стежить за відповідями.

*Реквізит:* фішки чотирьох кольорів, два непрозорі мішечки.

*Результат, який фіксують волонтери:* довжина послідовності, кількість учасників, що пограли.

Виграє команда, яка зібрала найбільшу кількість фішок без помилок.

## 9. СКЛАДАННЯ БУКВИ

*Завдання:* з великих фігур скласти букви: Т і/або Н. Якщо видаємо весь набір деталей (для варіанта 1), то в процесі гри можна прибрати «зайву» деталь для якомога швидшого досягнення мети: складання однієї букви, а потім додати (чи замінити) деталі для складання іншої.

*Реквізит:* набір пінопластових чи картонних фігур, з яких можна скласти ці літери (*рис. 112*).

*Результат, який фіксують волонтери:* вийшло чи ні, час.
Виграє команда, яка склала літери за найменший час.

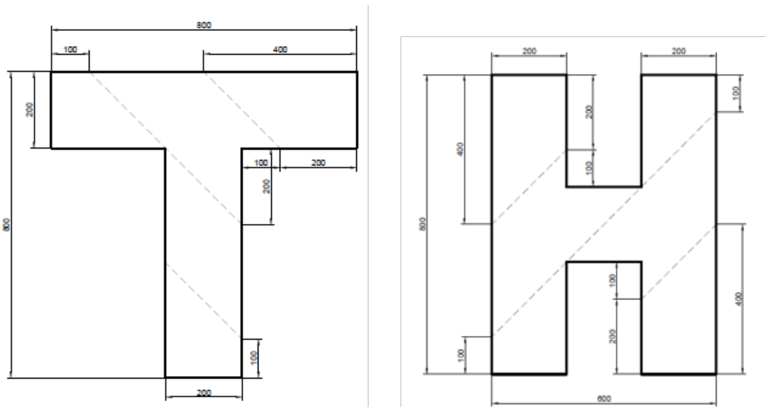


Рис. 112. Схема для виготовлення та складання літер Т і Н

## 10. СКЛАДАННЯ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

*Завдання:* з набору кубиків скласти ланцюжок, у якому по різних гранях кубиків (зверху і з боків) числа утворюють послідовності за правилами (див. 8.2).

*Реквізит:* вісім кубиків з картону, на їхніх сторонах написані числа (*рис. 113*).

*Результат, який фіксують волонтери:* кількість складених послідовностей.


Рис. 113. Кубики для складання послідовностей

Такий формат розважально-олімпіадних змагань був започаткований вчителями ліцею «Наукова зміна» і Русанівського ліцею міста Києва. І з 2005 року в Русанівському ліцеї змагання проводилися в зазначеному форматі. Олімпіада з головоломок складалася з двох частин: індивідуальної та командної (по шість осіб). Командна олімпіада передбачала теоретичний і практичний тури.

Завдання теоретичного туру для команд розроблялися Олексієм Карлюченком і вчителями Русанівського ліцею.

Завдання олімпіад різних років можна знайти тут [28].

За практичний тур командної олімпіади відповідала команда вчителів ліцею «Наукова зміна» під керівництвом Олександра Бєдова, і вперше його було проведено у 2003 році в цьому ліцеї.

# 7.2. Математичні шуканки

*Мета конкурсу:* навчати учнів розв'язувати нестандартні задачі, а також працювати в команді задля вибудовування спільної стратегії гри.

*Час, що відводиться на проведення конкурсу:* не більше 1.5 години.

Що потрібно для конкурсу: шкільні кабінети за кількістю команд, матеріали для головоломок. На локаціях обов'язково мають бути волонтери, які пояснюють правила і стежать за виконанням (це може бути хтось із організаторів конкурсу, вчителів школи або знайома людина, яка погодилася взяти участь в організації).

*Початок конкурсу:* команди збираються для ознайомлення з легендою і правилами проходження шуканки.

*Перебіг конкурсу:* після оголошення легенди шуканки і правил проходження команди йдуть до кабінетів. Кожна команда перебуває в окремому кабінеті, розв'язує послідовно задачі-головоломки. Результати (час розв'язання і відповідь) занотовуються волонтерами. Шуканка має свій сюжет та легенду. У всіх команд однакові завдання й однакові умови, але кожна команда вибирає свою стратегію.

*Кінець конкурсу:* після того як усі команди виконали завдання, відбувається аналіз результатів, підбиття підсумків та визначення команди-переможця.

Авторами методики були розроблені кілька математичних шуканок: «Аліса в країні міркувань», «$\pi$-рати в пошуках скарбів». Приклади головоломок математичної шуканки «Аліса в країні міркувань» наведено у підрозділі 8.7.

# 7.3. Математичні рухливі ігри

Математичні рухливі ігри – це найбільш динамічний вид командних змагань, який вимагає від учнів спритності й кмітливості.

*Мета конкурсу:* навчати учнів швидко приймати рішення, розвивати логічне мислення, творчу активність, виховувати вміння роботи в команді.

*Час, що відводиться на проведення конкурсу:* не більше години.

*Що потрібно для конкурсу:* спортивний зал або майданчик на свіжому повітрі. Відповідне обладнання для кожної гри.

*Початок конкурсу:* команди збираються для ознайомлення з правилами гри.

*Перебіг конкурсу:* команди проходять естафети на швидкість. Тут так само кожна команда має вибрати свою стратегію.

*Кінець конкурсу:* після завершення змагань відбувається визначення команди-переможця.

Авторами посібника розроблені математичні рухливі ігри:

*1. «Хрестики-нулики».* Кожна з двох команд має набір кольорових ганчірок на позначення хрестиків і нуликів. Під час естафети гравці мають добігти до складеного з дев'яти обручів поля і вкинути свою ганчірку в один з порожніх обручів. Виграє та команда, яка першою утворить ряд із трьох ганчірок свого кольору на полі.

Рис. 114. Проведення гри «Хрестики-нулики»

*2. «Ханойська вежа»*. Кожна з команд має власний стіл з набором трьох дисків різного кольору. Під час естафети гравець перекладає диск із одного місця на інше. Завдання кожної з команд – перенести вежу із трьох дисків різних діаметрів з першого окресленого місця на третє. Виграє та команда, яка впорається швидше.

*3. «Подвійні шахи»*. Команди стоять по різні боки ігрового простору, посередині – столи, на яких розкладені дві шахові дошки з фігурами в такий спосіб, щоб кожна команда на одній дошці грала чорними, а на іншій – білими. По різні боки від столів стоять дві команди учасників. На рахунок «три» команди починають гру: перший у черзі гравець підбігає до стола й робить перший хід білими. Повертається, передає естафету наступному, який біжить до стола й робить хід чорними (бо на першому кроці команда суперників також походила білими). Повертається, передає естафету наступному, який робить хід білими, і так далі. Якщо на одній дошці гра завершилася, всі учасники бігають до дошки, що залишилася. Виграє команда, яка виграла обидві партії.

*4. «Трикутники»*. Цю гру краще проводити в спортзалі або на свіжому повітрі. Команд по три людини може бути від двох до шести. Грають усі одночасно. На підлозі маркується місце, де стоїть команда. Завдання кожної трійки – помінятися місцями із сусідньою командою, причому люди мають стояти на тих самих місцях, на яких стояли й попередники. Однак це не просте завдання, оскільки пересуватися команда може лише за особливими правилами: стоячи в початковій позиції – рівносторонній трикутник – одна людина може пройти між двома іншими, таким чином «віддзеркаливши» трикутник відносно лінії двох товаришів. Перемагає команда, яка першою дісталася необхідного положення.

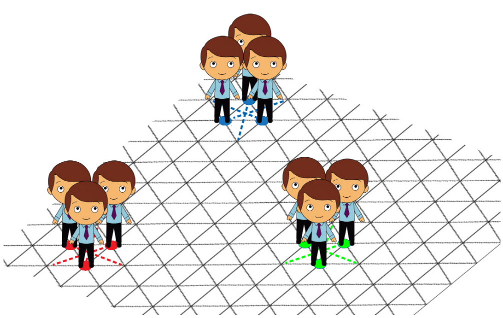


Рис. 115. Умовна схема гри «Трикутники»

# 8.

# Додаткові матеріали до розділів

# 8.1. Головоломка-розминка «Географічні назви»

У цьому підрозділі представлені шаблони різних варіантів цієї головоломки для розминки. З них ви можете вибрати той, що найбільше зацікавить учнів відповідно до їх віку і рівня знань за темою.

*Варіант 1.* Складіть географічні назви, використовуючи дефіс (підказка: тут майже всі слова мають по два дефіси) (*рис. 116*).

| | | |
|---|---|---|
| САЛАМ | ПІД | ДНІПРІ |
| ДЕ | МАНШ | НА |
| ЕС | РІО | ЛА |
| НА | ЗАЙЧИКОМ | КАЛЕ |
| ДАР | ЯР | ЖАНЕЙРО |
| ФРАНКФУРТ | ПА | НОВОСІЛКИ |
| ДЕ | МАЙНІ | |

Рис. 116. Картки для складання слів за темою «Географічні назви» (варіант 1)

*Варіант 2.* Складіть географічні назви, використовуючи дефіс (підказка: тут усі слова мають по одному дефісу) (*рис. 117*).

| | | |
|---|---|---|
| **КОЦЮБИНСЬКЕ** | **ВІТА** | **БАНЯ** |
| **МАР** | **БЕРШАДСЬКІ** | **НЕГРО** |
| **ДМИТРО** | **НАР'ЯН** | **ФРАНКІВСЬК** |
| **УДЕ** | **БІСАУ** | **МИХАЙЛО** |
| **ІВАНО** | **ЛОТАРИНГІЯ** | **ПОШТОВА** |
| **ПОДІЛЬСЬКИЙ** | **ВОДИЦЯ** | **УЛАН** |
| **БЕРІЗКИ** | **ГВІНЕЯ** | **ЛУКА** |
| **РІО** | **ВАРВАРІВКА** | **ЕЛЬЗАС** |
| **КАМ'ЯНЕЦЬ** | **ПУЩА** | |

Рис. 117. Картки для складання слів за темою «Географічні назви» (варіант 2)

*Варіант 3*. Цей варіант пропонується для змагання між командами на час, а саме: потрібно за 15–20 секунд знайти якомога більше географічних назв (*рис. 118, 119, 120*).

| | | |
|---|---|---|
| **СІНКІ** | **БУХА** | **КОН** |
| **РА** | **НЮС** | **АКРІ** |
| **ВІЛЬ** | **РЕСТ** | **ГЕЛЬ** |
| **БУХА** | | |

Рис. 118. Картки для складання слів за темою
«Географічні назви» (варіант 3)

| | | |
|---|---|---|
| **СТО** | **ДЕН** | **ГОРОД** |
| **ПІЛЬ** | **ПОЛЬ** | **БУРГ** |
| **ЛЕНД** | **ПІЛС** | **ТАУН** |
| **ПОЛЬ** | **КИТАЙ** | **ДАУГАВ** |
| **КЕЙП** | **ОЛЬГО** | **СЕВА** |
| **КНЯЖ** | **АНДРІЯНО** | **БРАН** |
| **КЕМБЕР** | **ПІЛЬ** | |

Рис. 119. Картки для складання слів за темою
«Географічні назви» (варіант 3)

| | | |
|---|---|---|
| ТОН | ЕРУ | БОН |
| РОНЕ | ВАН | ТОН |
| ЄРЕ | ЛІСА | ВАШ |
| ЛІНГ | ДУШ | РЕБ |
| БУТІ | УТУ | МАС |
| ИНГ | ДЖИ | ГАБО |
| АНБЕ | ЗАГ | ВЕЛ |
| МАП | | |

Рис. 120. Картки для складання слів за темою «Географічні назви» (варіант 3)

*Варіант 4*. Знайти назви десяти міст. Завдання із зірочкою – назвати місто, яке не є столицею, і сказати, чому воно занесене до Книги рекордів Гіннеса (*рис. 121*).

| | | |
|---|---|---|
| МАРИБО | ПЕШТ | БРАЗ |
| АРДЕН | ДЖА | ГАГЕН |
| ЛЕУВ | ГОЛЬМ | ТАУН |
| ЗАВІЛЬ | СТОК | КОПЕН |
| ЗАВІЛЬ | МОПАН | ПАРА |
| ДЖОРДЖ | БУДА | БЕЛЬ |
| СЛАВА | КАРТА | |

Рис. 121. Картки для складання назв міст

*Варіант 5*. Складіть географічні назви на 2–4 склади (*рис. 122*).

| | | |
|---|---|---|
| НЕ | ВА | ДО |
| ГА | ДА | МА |
| БА | ДО | КАР |
| РО | ХА | ДО |
| ГА | НА | |

Рис. 122. Картки для складання назв міст на 2–4 склади

*Варіант 6*. Варіант гри на повторення слів, що пишуться без дефісів (*рис. 123*).

| | | |
|---|---|---|
| **КОПЕТ** | **БОРОДИ** | **АЛА** |
| **ДАР'Я** | **ГОРОД** | **ПОЛЕ** |
| **ТОПОЛЬ** | **ТАУ** | **ДАГ** |
| **СИР** | **ДАГ** | **МЕЛІ** |
| **ГУЛЯЙ** | **КОПАЙ** | **КРУТИ** |

Рис. 123. Картки для складання назв міст, що пишуться без дефісів

*Варіант 7*. Скласти назви країн, які закінчуються на -ія (*рис. 124*).

| | | |
|---|---|---|
| ІЯ | ІЯ | ІЯ |
| ІЯ | ІЯ | ІЯ |
| ІЯ | ІЯ | ІЯ |
| ІЯ | СИР | НІ |
| УНБ | ДАН | ЛІВ |
| ГЕР | ЛА | ЛІВ |
| БО | ТВ | ГР |
| ЛА | ІС | УЗ |
| НД | ІР | ПАН |
| КОЛ | | |

Рис. 124. Картки для складання назв країн, які закінчуються на -ія

# 8.2. Приклади завдань на локації конкурсів із головоломками

Для локації «Люди-числа» використовується такий набір скріплених між собою пар цифр:

1 – 7, 2 – 4, 3 – 2, 9 – 5, 7 – 0

Можна запропонувати такі ускладнені завдання: вишикуватися в ряд так, щоб:

1) з одного боку було число, що ділиться на 11, а з іншого – парне;
2) з одного боку було число, що ділиться на 6, а з іншого – парне;
3) з одного боку було число, що ділиться на 5, а з іншого – на 11;
4) з одного боку було число, що ділиться на 3, а з іншого цифри були розташовані в порядку зростання або спадання.

Для локації «Переправа» застосовується така схема розташування чисел у клітинках:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 8 | 9 | 7 | 9 | 6 |
| 6 | 7 | 9 | 5 | 6 | 7 |
| 8 | 3 | 5 | 8 | 8 | 5 |
| 4 | 7 | 2 | 3 | 6 | 2 |
| 3 | 1 | 4 | 1 | 5 | 1 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 2 | 4 |

Як варіант для п'яти осіб можуть бути такі правила: йдуть п'ятеро по черзі. Починають знизу: перший хід у будь-яку клітинку перших двох нижніх рядів. Потім крок на більше число, потім на ще більше тощо. З будь-якої клітинки верхніх двох рядів можна зійти з поля й закінчити. Числа, по яких пройшов учасник, знімаються (тепер у цю клітинку не можна ходити). Якщо хтось не може дійти до кінця – він усе одно може ходити, скільки хоче (на більше число), а потім просто зійти з довільної клітини.

Або такий варіант для шести учасників:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 53 | 56 | 71 | 1 | 42 | 87 |
| 72 | 47 | 2 | 89 | 89 | 7 |
| 12 | 3 | 29 | 18 | 83 | 91 |
| 4 | 4 | 17 | 23 | 84 | 28 |
| 8 | 16 | 16 | 19 | 28 | 21 |
| 12 | 9 | 7 | 11 | 8 | 14 |

Один з учасників має зібрати числа за спаданням. Другий – числа, кратні 4. Третій – числа, кратні 7. Четвертий – числа за зростанням. П'ятий – послідовність простих чисел. Шостий – послідовність чисел, що мають у своєму записі цифру 8. Ходити можна лише на одну сусідню клітинку за одним із восьми напрямків.

Для локації «Складання букви» додатково можуть бути використані фігури (*рис. 125*).

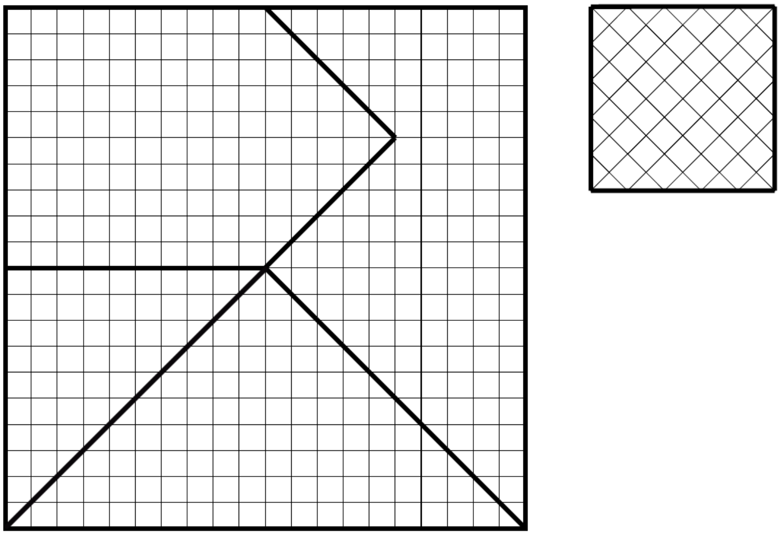


Рис. 125. Фігури для складання квадратів

Виріжте із цупкого матеріалу чотири фігури незвичної форми та квадрат (*рис. 125*). Учням пропонується скласти квадрат із чотирьох фігур. Після виконання завдання дайте менший квадрат, і нехай складуть квадрат із п’яти фігур.

Для локації «Складання послідовностей» використовуються такі розгортки 20 кубиків (*рис. 126*) і така умова: скласти ланцюжок, щоб з одного боку читалася послідовність простих чисел, з другого – трикутних чисел, а з третього – парних чисел за зростанням. Підказка: сума цих трьох чисел на кожному з кубиків ділиться на 3.

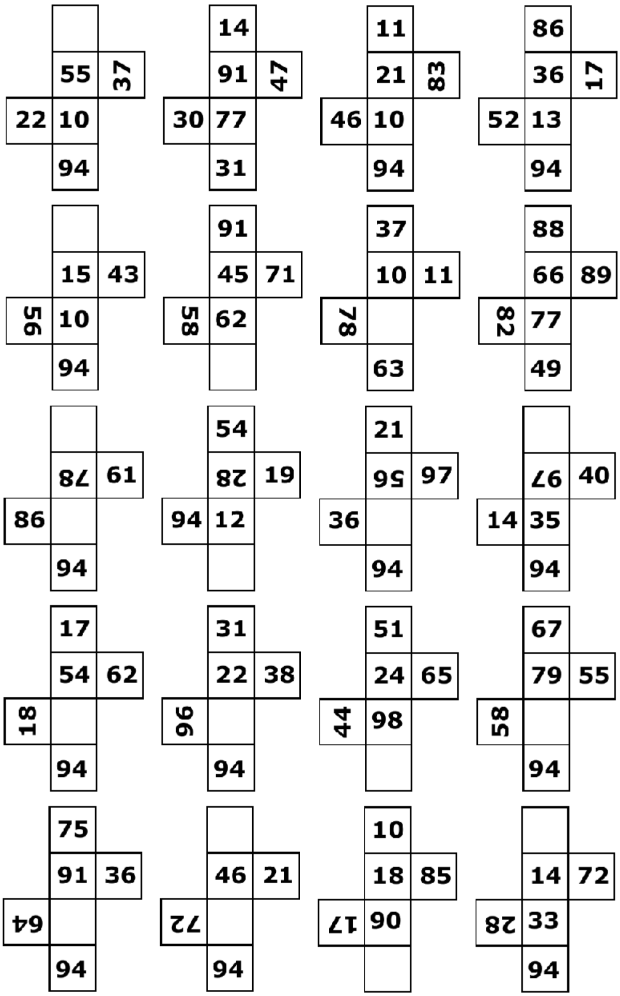



Рис. 126. Розгортки 20 кубиків для локації «Складання послідовностей»

# 8.3. Неможливий трикутник своїми руками

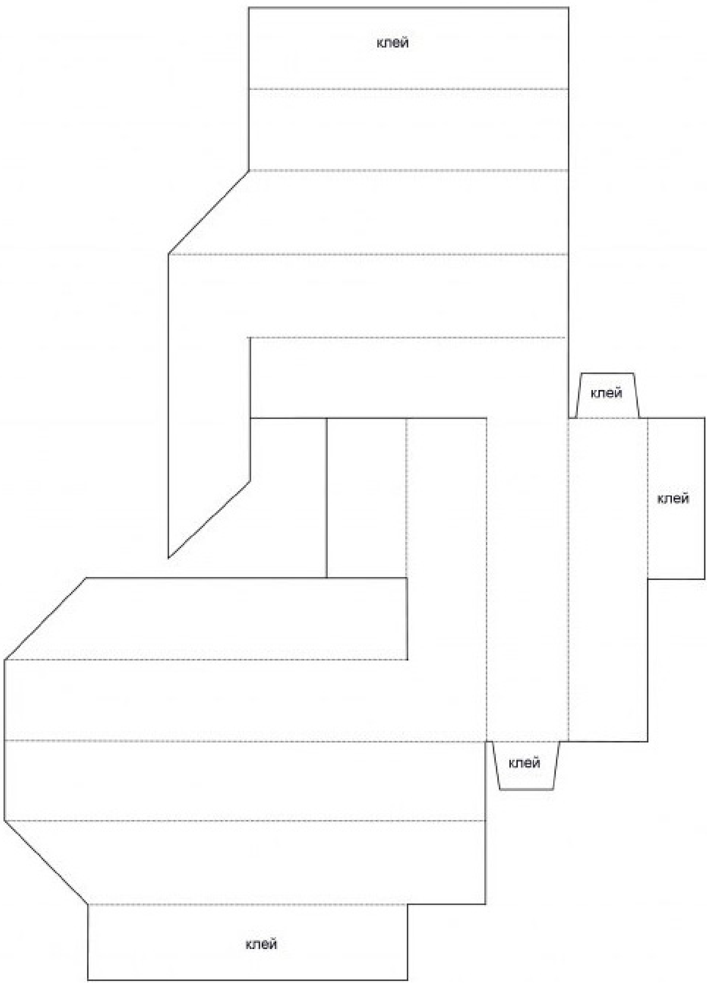



Рис. 127. Схема для складання «неможливого трикутника»

# 8.4. Кодування

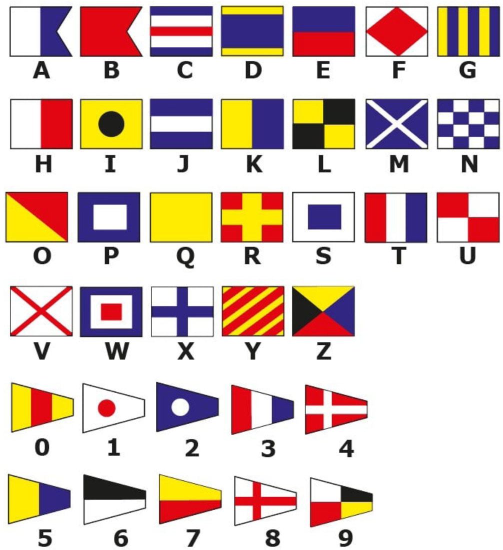



Рис. 128. Міжнародні сигнальні прапори

| | | | |
|---|---|---|---|
| A ·– | J ·––– | S ··· | 2 ··––– |
| B –··· | K –·– | T – | 3 ···–– |
| C –·–· | L ·–·· | U ··– | 4 ····– |
| D –·· | M –– | V ···– | 5 ····· |
| E · | N –· | W ·–– | 6 –···· |
| F ··–· | O ––– | X –··– | 7 ––··· |
| G ––· | P ·––· | Y –·–– | 8 –––·· |
| H ···· | Q ––·– | Z ––·· | 9 ––––· |
| I ·· | R ·–· | 1 ·–––– | 0 ––––– |

Рис. 129. Англійський алфавіт Морзе

# 8.5. Шаблон поля для гри «Коно»

П’ятиклітинкове коно має поле такого вигляду, як на *рис. 130*. Мета гри полягає в тому, щоби перемістити всі фішки гравця в початкові місця розташування фішок суперника. Гравці по черзі пересувають свої фішки по діагоналі на сусідню порожню позицію. Перемагає гравець, який першим перемістить усі свої фішки на стартові поля противника.

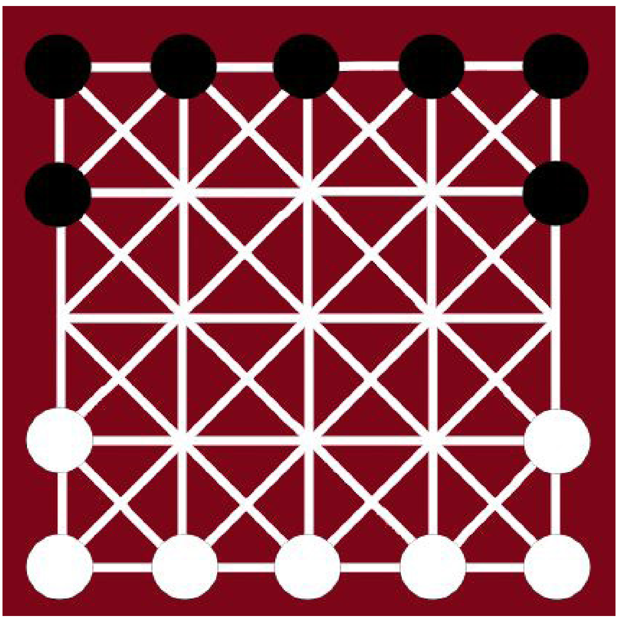


Рис. 130. П’ятиклітинкове коно (корейські шахи)

# 8.6. Магічні таблиці

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 | 7 | 9 |
| 11 | 13 | 15 | 17 | 19 |
| 21 | 23 | 25 | 27 | 29 |
| 31 | 33 | 35 | 37 | 39 |
| 41 | 43 | 45 | 47 | 49 |
| 51 | 53 | 55 | 57 | 59 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | 24 | 25 |
| 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 40 | 41 | 42 | 43 |
| 44 | 45 | 46 | 47 | 56 |
| 57 | 58 | 59 | 60 | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 6 | 7 | 10 |
| 11 | 14 | 15 | 18 | 19 |
| 22 | 23 | 26 | 27 | 30 |
| 31 | 34 | 35 | 38 | 39 |
| 42 | 43 | 46 | 47 | 50 |
| 51 | 54 | 55 | 58 | 59 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 48 | 49 | 50 | 51 |
| 52 | 53 | 54 | 55 | 56 |
| 57 | 58 | 59 | 60 | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 5 | 6 | 7 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | 20 | 21 |
| 22 | 23 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 36 | 37 | 38 | 39 |
| 44 | 45 | 46 | 47 | 52 |
| 53 | 54 | 55 | 60 | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 32 | 33 | 34 | 35 | 36 |
| 37 | 38 | 39 | 40 | 41 |
| 42 | 43 | 44 | 45 | 46 |
| 47 | 48 | 49 | 50 | 51 |
| 52 | 53 | 54 | 55 | 56 |
| 57 | 58 | 59 | 60 | |

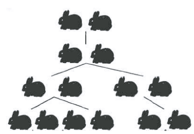
Рис. 131. Таблиці для математичного фокуса

# 8.7. Шуканка «Аліса в Країні Міркувань»

*Ваша Величносте!*

**Слідом за білим Кроликом**

*Ваше доручення щодо збільшення кількості кроликів у Країні Міркувань виконано!*



*Це все почалось 1 січня, коли Пан Кріль і Пані Кролиця одружились і вже 1 лютого народили пару кроленят (самця та самку). І з того часу щомісяця у кожної пари дорослих кролів народжувалася ще одна пара маленьких кроликів, яка, своєю чергою, ставала дорослою через місяць і через два місяці після свого народження давала життя новій парі кролів (самцю та самці). Я порахував, що зараз у Країні Міркувань уже знаходиться ? пар кролів!*

*2 липня*
*З повагою*
*Ваш учений Фібоначчі*

Лист ученого Фібоначчі

1

Рис. 132. Приклад картки із шуканки.
Відома задача Леонардо Пізанського про кролів

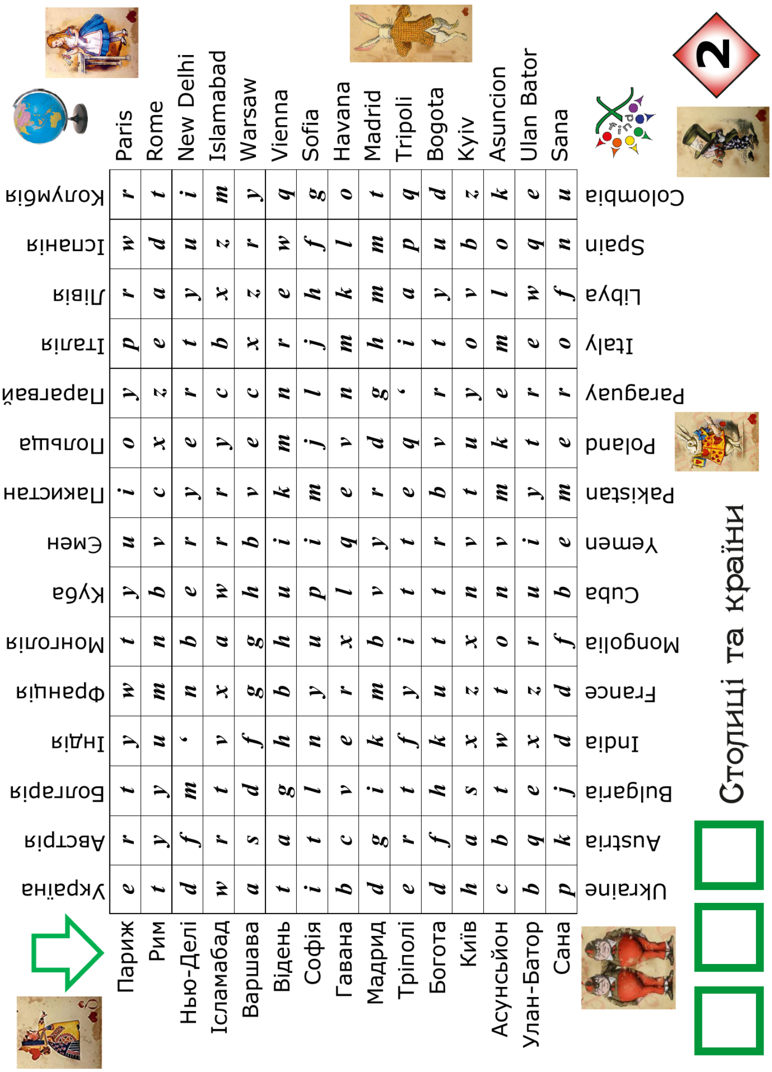
Допоможіть Кролику знайти найкоротший шлях до палацу Герцогині. Він має прибути вчасно, рухатися він може по горизонталі, вертикалі й діагоналі (навскіс), але наступати лише на клітинки з тими числами, сума цифр яких дорівнює п'яти, восьми або тринадцяти.
Кролик має дивну звичку: дорогою він рахує суму цифр у числах, що трапляються на його шляху, та повідомляє її Герцогині.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 40 | 58 | 67 | 76 | 85 | 94 | 39 | |
| 14 | 41 | 23 | 32 | 83 | 68 | 57 | 76 |
| 35 | 44 | 53 | 45 | 36 | 50 | 86 | 32 |
| 25 | 32 | 52 | 16 | 49 | 20 | 22 | 58 |
| 23 | 77 | 88 | 53 | 46 | 30 | 41 | 55 |
| 41 | 99 | 67 | 33 | 65 | 40 | 94 | 11 |
| 28 | 14 | 48 | 54 | 62 | 60 | 18 | 17 |
| | 42 | 85 | 76 | 51 | 23 | 44 | 82 |

Шлях до палацу Герцогині

1

Рис. 133. Приклад картки із шуканки

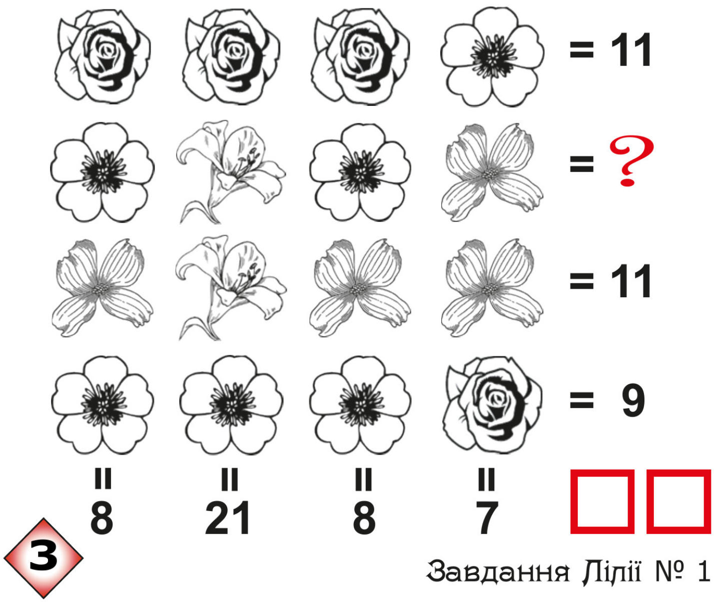



| | Україна | Австрія | Болгарія | Індія | Франція | Монголія | Куба | Ємен | Пакистан | Польща | Парагвай | Італія | Лівія | Іспанія | Колумбія | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Париж | e | r | t | y | w | t | y | u | i | o | y | p | r | w | r | Paris |
| Рим | t | y | y | u | m | n | b | v | c | x | z | e | a | d | t | Rome |
| Нью-Делі | d | f | m | ‘ | n | b | e | r | y | e | r | t | y | u | i | New Delhi |
| Ісламабад | w | r | t | v | x | a | w | r | r | y | c | b | x | z | m | Islamabad |
| Варшава | a | s | d | f | g | g | h | b | v | e | c | x | z | r | y | Warsaw |
| Відень | t | a | g | h | b | h | u | i | k | m | n | r | e | w | q | Vienna |
| Софія | i | t | l | n | y | u | p | i | m | j | l | j | h | f | g | Sofia |
| Гавана | b | c | v | e | r | x | l | q | e | v | n | m | k | l | o | Havana |
| Мадрид | d | g | i | k | m | b | v | y | r | d | g | h | m | m | t | Madrid |
| Тріполі | e | r | t | f | y | i | t | t | e | q | ‘ | i | a | p | q | Tripoli |
| Богота | d | f | h | k | u | t | t | r | b | v | r | t | y | u | d | Bogota |
| Київ | h | a | s | x | z | x | n | v | t | u | y | o | v | b | z | Kyiv |
| Асунсьйон | c | b | t | w | t | o | n | v | m | k | e | m | l | o | k | Asuncion |
| Улан-Батор | b | q | e | x | z | r | u | i | y | t | r | e | w | q | e | Ulan Bator |
| Сана | p | k | j | d | d | f | b | e | m | e | r | o | f | n | u | Sana |
| | Ukraine | Austria | Bulgaria | India | France | Mongolia | Cuba | Yemen | Pakistan | Poland | Paraguay | Italy | Libya | Spain | Colombia | |

Рис. 134. Приклад картки із шуканки

## Сад, у якому квіти розмовляють

Коли це враз – гу-гуп! – і ви опинилися на купі хмизу й сухого листя. Ура! Політ закінчено! Попереду виднівся сад. Тут був великий квітник. – О Ліліє, – звернулася Аліса до рудої квітки, що граційно колихалася на вітрі. – Шкода, що ви не вмієте говорити! – Уміємо, – відказала Лілія. – А ще ми уміємо загадувати загадки. Спробуйте виконати наші завдання.




Завдання Лілії № 1

Рис. 135. Приклад картки із шуканки


Рис. 136. Приклад картки із шуканки

# СПРАВА ПРО КРАДІЖКУ ПИРІЖКІВ

Підозрюють чотирьох валетів, серед яких є садівник, охоронець, будівельник та крадій. Вони живуть у чотирьох різних будинках ( , , , ) і люблять різні квіти (фіалки, ромашки, троянди, лілії).

Садівник носить коханій свої улюблені ,
а будівельник – . Піковий і хрестовий валети не люблять троянди. Біля ростуть .
Бубновий валет живе в та любить садівництво.
Крадій живе в . Піковий валет живе у .
Хто ж із них крадій?

## ЛАВА ПІДСУДНИХ

? ? ? ?

Ліворуч від садівника немає охоронця,
а праворуч від охоронця немає крадія.
Будівельник стоїть праворуч від охоронця,
а крадій – поруч з охоронцем.

Лава підсудних  5

Рис. 137. Приклад картки із шуканки

# 8.8. Головоломки з американської майстерні

Зробіть ці головоломки з картону чи цупкого паперу і використовуйте на локації для конкурсу командних головоломок.

**Невловимий шпигун**

Завдання головоломки: необхідно розмістити вісім доміно у квадрат 4 × 4 так, щоб виконувалися три умови:

- жодна стрілка не має вказувати безпосередньо на іншу стрілку;
- жодна стрілка не має вказувати безпосередньо на шпигуна;
- жодна стрілка не має вказувати безпосередньо на край дошки.

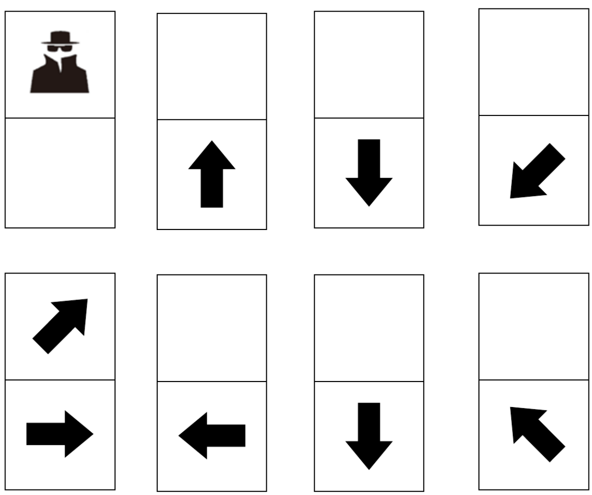


Рис. 138. Головоломка «Невловимий шпигун»

**Урятуйте королев!**

Завдання головоломки: необхідно розмістити чотири дощечки у квадрат 8 × 8 так, щоб жодна з королев (зірчаті отвори – це шахові королеви, ходять по горизонталі, вертикалі й діагоналях) не «побила» іншу. На перший погляд завдання видається простим, але насправді воно таким не є.

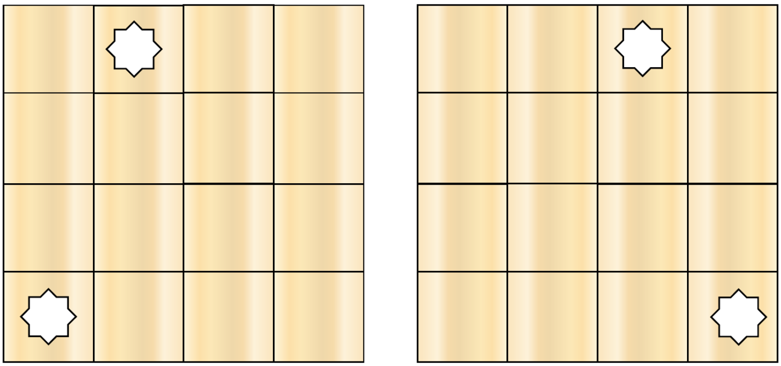


Рис. 139. Перша дощечка, вид спереду і ззаду

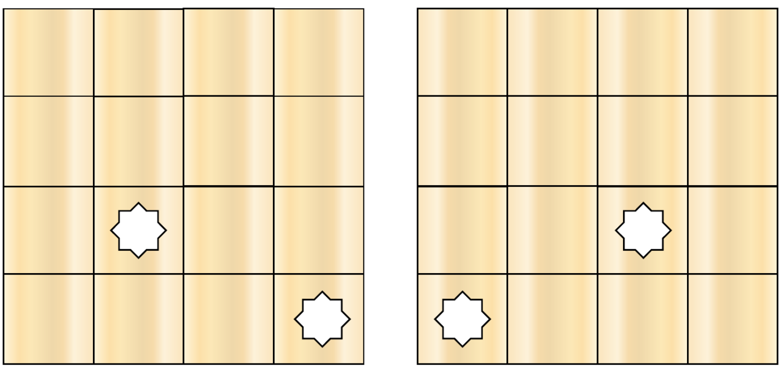


Рис. 140. Друга дощечка, вид спереду і ззаду

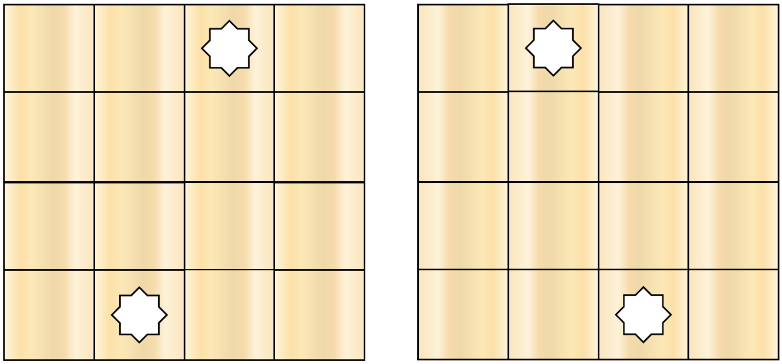


Рис. 141. Третя дощечка, вид спереду і ззаду

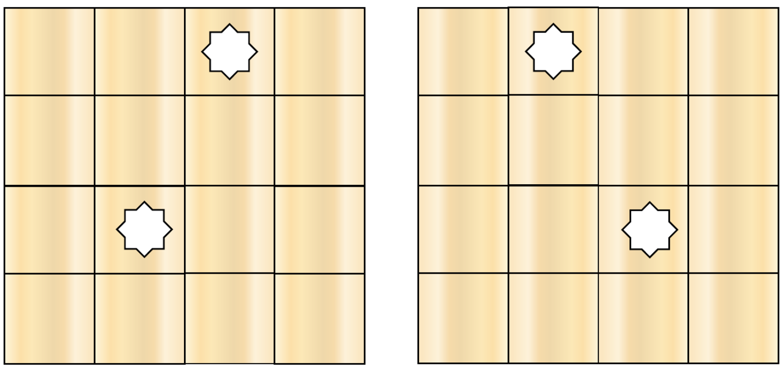


Рис. 142. Четверта дощечка, вид спереду і ззаду

Правильні відповіді до цих головоломок (*рис. 143, рис. 144*).

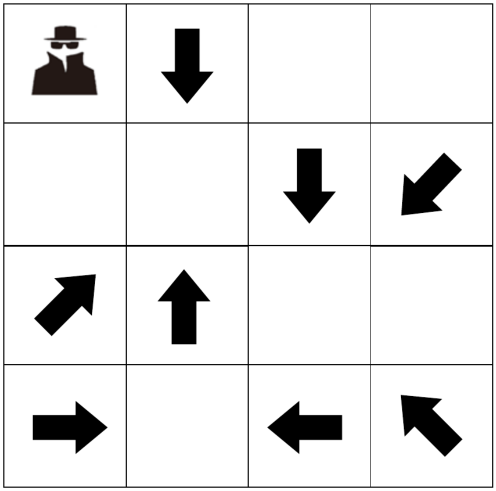


Рис. 143. Розв'язок головоломки «Невловимий шпигун»

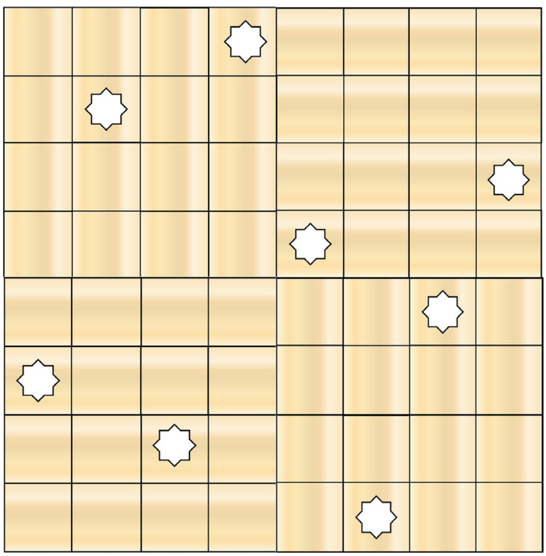


Рис. 144. Розв'язок головоломки «Урятуйте королев!»

# Відповіді

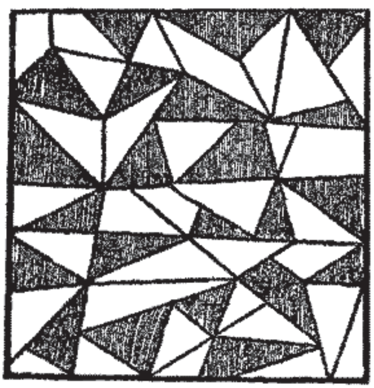
**1.1.**

1.36. Це задача з папіруса Ахмеса.

2. Один зі способів такий: перший син одержує 5 повних пляшок і 5 порожніх, другий – 3 повні, 4 напівзаповнені і 3 порожні, і третій син – 2 повні, 6 напівзаповнених і 2 порожні. Порахувати кількість способів того, як розподілити між синами пляшки, – взагалі доволі цікаве завдання. Особливо цікаво, коли однакових пляшок не по 10, а $n$. Детальніше про це завдання можна подивитися тут:

Це задача зі збірника Алкуїна.

3. в) схована зірка. Ця головоломка має такий вигляд (потрібно віднайти замасковану правильну п’ятикутну зірку):



4. Переправити козу і собаку, козу назад, капусту і козу, козу назад, двох вовків, собаку назад, а потім собаку й козу.

5. Першими перетинають річку математик і ведмідь. Після цього математик повертається. Потім перетинають річку два ведмеді. Один із них повертається. Потім два математики перетинають річку, математик і ведмідь повертаються. Два математики перетинають річку. Один ведмідь повертається. Два ведмеді перетинають річку. Один ведмідь повертається. Два ведмеді, які залишилися, перетинають річку.

6. а)

7. в)

**3.3.1.**

1. Мак
2. Школа
3. Коза
4. Комір
5. Комета
6. Самокат
7. Мама
8. Комікс
9. Канада
10. Підручник
11. Захід
12. Напад
13. Спідометр
14. Попередник
15. Білявка
16. Килим
17. Напій
18. Принада
19. Шапіто
20. Опудало
21. Вогнище
22. Купальське деревце ставиться
23. Пускають вінки у воду
24. Обряди і ворожба

**3.3.2.**

1.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| [1]Х | О | Р | Д | [2]А | Л | Г |
| Т | [6]Р | А | Д | І | А | Е |
| Е | [9]Г | Р | А | Д | [7]Н | Б |
| М | У | Н | А | У | А | Р |
| И | Р | Ч | І | [10]С | С | [3]А |
| Т | [8]К | О | Д | І | Л | [4]Р |
| Н | А | [5]С | У | І | Д | А |

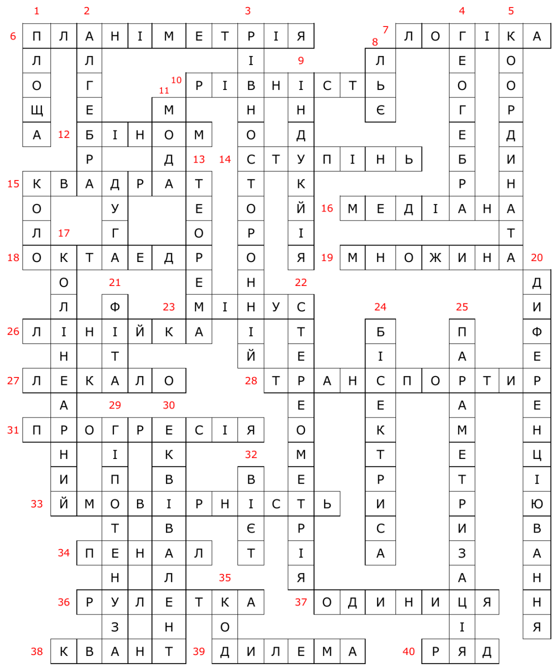
2.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Г | І | С | Г | І | П | Р | О | М |
| А | П | У | Р | А | Т | І | Б | |
| Н | О | Д | А | З | Е | С | А | Н |
| А | Т | Е | Н | У | К | И | С | Ь |
| | Я | Т | Р | О | Т | Р | А | Н |
| Д | М | Е | Р | С | Н | Ч | И | Ч |
| Е | А | Н | О | Т | А | | Т | О |
| М | Г | О | Р | Е | М | С | Е | Д |

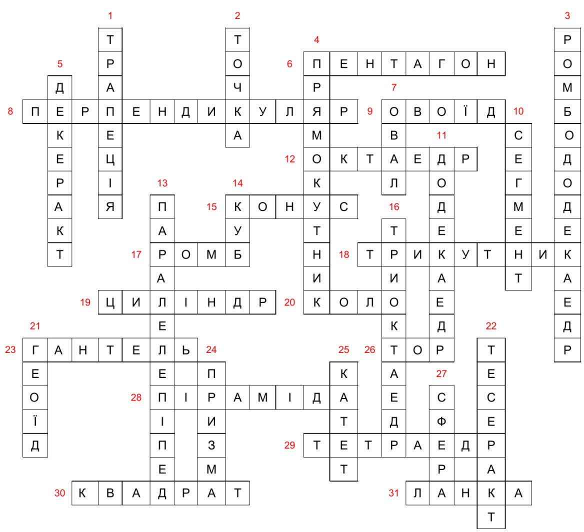
3.

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Т | М | М | И | Т | Ь | А | Т | І | Т | Т | Ц | Е | О | А | П | М |
| Р | Н | П | І | Н | В | Е | Р | С | І | Я | И | І | А | Д | Р | Т |
| А | И | А | А | К | Т | К | И | Т | А | А | К | В | А | Ї | И | — |
| Є | Ц | Р | В | Р | Р | Х | Г | И | Н | С | Л | К | И | О | К | Н |
| К | Г | С | А | К | Т | О | О | Н | А | Е | И | А | Е | С | Л | М |
| Т | О | Е | П | Е | Е | Р | Н | А | М | Т | Ц | Т | З | Н | А | К |
| О | Д | К | О | Л | О | Д | О | Б | А | В | Н | Е | А | Е | Д | М |
| Р | П | Р | З | М | Р | А | М | М | Л | Е | Ь | Т | Л | Г | Ю | С |
| І | І | Д | И | Ф | Е | Р | Е | Н | Ц | І | Ю | В | А | Н | Н | Я |
| Я | К | У | Т | Е | М | Т | Т | О | Р | Д | Т | Ш | К | А | Л | А |
| Р | О | В | И | Р | А | З | Р | П | О | В | О | Р | О | Т | З | Д |
| Ш | А | Р | В | М | У | П | І | І | Т | А | Н | Г | Е | Н | С | М |
| С | П | А | Д | А | Н | Н | Я | Р | Я | Д | О | К | С | У | М | А |

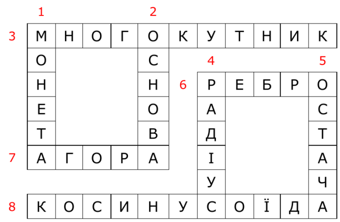
4.



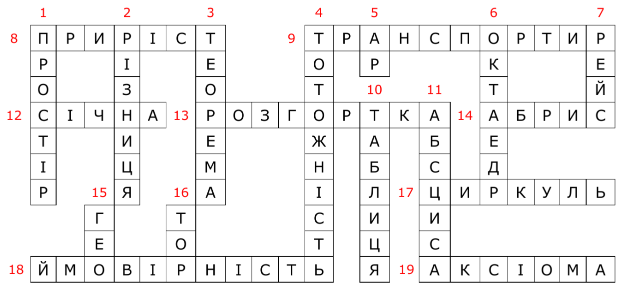
5.



6.




7.




## 3.3.3.

1. а) «Life is trying things to see if they work» (Р. Бредбері);
   б) «A person who never made a mistake never tried anything new» (А. Айнштайн).

2. а) Фібоначчі;
   б) Перельман.

3. а) факторіал;
   б) гіпербола.

## 3.3.4.

1. Одне – Північний полюс.

2. У Майка – 20 доларів 50 центів, у Тодда – 50 центів.

**4.1.2.**

1. Цей чоловік – карлик, дістає лише до кнопки сьомого поверху.

2. Білл – це рибка. Скляну банку (акваріум) із рибкою протягом скинуло з вікна.

3. Літак був на землі.

4. У чоловіка була гикавка, бармен його налякав – і гикавка минулася, тому йому більше не потрібна була вода.

5. Ці речі залишилися від сніговика, який розтанув.

6. Він грав у «Монополію».

7. У них не було пупків.

8. Чоловік був у тунелі, і для того, щоб врятуватися, мусив бігти назустріч поїзду. Коли тунель закінчився, він зміг зістрибнути вбік і залишитися живим.

9. Таксист почув адресу, куди треба відвезти пасажирку.

**4.2.1.**

1. Можна довго досліджувати кожну з фігур і намагатися звести послідовність до чогось більш зрозумілого, однак це є не чим іншим, як рядом натуральних чисел, віддзеркалених по горизонталі!

2. а) А, Б, В, Д, О, .. Р – це послідовність букв алфавіту, в яких є принаймні одна «дірка».

   б) К, К, А, Р, Я, .. А – це останні літери назв днів тижня.

   в) П, Ц, Л, П, Н, Б, .. Ч – це перші букви слів завдання.

   г) 1, –1, 1, 0, 1, 0, .. 1 – кількість днів у місяцях високосного року мінус 30.

   д) J, Q, K, .. A – це туз у колоді карт.

   е) 2, 9, 3, 1, 8, 4, 3, 6, 5, 7, .. 2 – насправді в цій послідовності міститься одразу дві послідовності: 2, 3, 4, 5, .. та 9, 18, 36, 72, .. , причому усі цифри записуються окремо. Отже, наступною має бути цифра 2.

ж) 6: центральне число дорівнює половині суми інших у рядку.
4: сума чисел у кожному стовпці дорівнює 14.
10: число всередині зірки дорівнює сумі трьох верхніх мінус сума двох нижніх.
3: зліва направо беремо пари доміношок. Сума відповідає послідовності 3, 6, 9, 12.

и) Один варіант. Кожний рисунок означає цифру. На першому рисунку три кола означають цифру 3. На наступному один трикутник – цифру 1, далі – цифри 4, 1, 5, 9. Нагадаємо, що число «пі» = 3,14159265358. Отже, наступні рисунки – це подвійне коло, шість трикутників один в одному та п'ять квадратів один в одному.
Другий варіант. Перший стовпчик складається з кіл, другий з трикутників, а третій з квадратів. Примітимо, що якщо в кожному рядку просумувати індекси й кількість фігур першого і другого стовпчиків, то вийде сума індексу та кількості фігур третього стовпчика. Наприклад, для першого рядка:
(1 (індекс) + 3 (кола)) + (2 (індекс) + 1 (трикутник)) = 4 + 3. Але й 3 (індекс) + 4 (квадрати) = 3 + 4. Отже, можемо поширити це правило й на стовпчики замість рядків і отримати, що під індексом 7 має бути (1 + 3) + (4 + 1) – 7 = 2 фігури, тобто два кола. Аналогічно під індексами 8 і 9 отримаємо п'ять трикутників один в одному і 13 квадратів один в одному.
к) $a + b = a \times (a + b)$ $a + b = (a + b)\, mod\, 12$ $a + b = a \times (a + b - 1)$

$4 + 7 = 44$ $6 + 7 = 1$ $8 + 5 = 96$

3. 87, адже номери написані в порядку зростання, просто з іншого боку!

4. Якщо будемо уважними, то побачимо рівняння, в яких цифри написані разом зі своїм дзеркальним відображенням: 2 + 6 = 8, а отже, рівняння з невідомим таке: 1 + 3 = 4.

5. Тут також цифри написані разом зі своїм дзеркальним відображенням, тому закономірність така: число, що стоїть на двох інших, є не чим іншим, як сумою цих чисел, тобто 4 + 2 = 6, 2 + 3 = 5, і замість знака питання має стояти число 11.

**4.3.1.**

1. Приклади парадокса Рассела:
   а) Я знаю те, що я нічого не знаю.

б) «Я зараз брешу» – каже брехун. Чи бреше він, коли каже, що бреше завжди?
в) Чи може той, хто може все, створити камінь, який не зможе підняти?
г) Я пишу пісні про тих, хто не пише про себе пісні. Чи маю я написати пісню про себе?
д) Я хочу покласти всі предмети світу в коробки, але мені потрібно ще по коробці для кожної коробки, і ще по коробці для кожної коробки для кожної коробки…

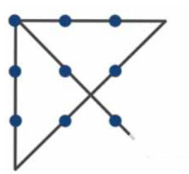
2. Приклади парадокса Тесея:
а) заміна членів спортивного клубу;
б) у класі з'являється новенький, а дехто йде з класу – так може змінитися склад усього класу.

**4.3.2.**

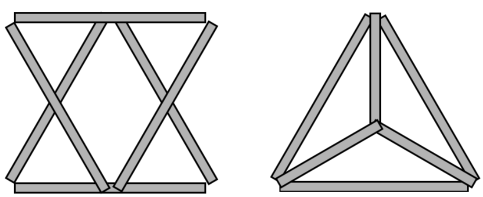
1. 10.

2. 8.

**5.2.**

1. 

2. Перші два завдання є простими. Третє має два варіанти: із сірниками, що перетинаються; піраміда з гранями – рівносторонніми трикутниками:



3. Один гаманець лежить всередині іншого.

4. Оскільки риби з'їдають гарбуз удвічі швидше за птахів, то їм дістанеться вдвічі більша частина гарбуза, тобто $\frac{2}{3}$ дістанеться рибам, а $\frac{1}{3}$ – птахам.

**5.3.**

1. Якби А був лицарем, він не зміг би сказати, що вони обидва брехуни. Отже, А – брехун. Його вислів неправдивий. Тобто Б – лицар.

2. Існує кілька варіантів правильної відповіді. Наприклад: «Чи скаже мені другий, що твій шлях веде до міста?». Це запитання має сенс, якщо А і Б знають, хто є хто. Інший розв'язок уже не вимагає знання А про Б і Б про А: «Якою буде твоя відповідь, якщо я запитаю тебе, чи веде твій шлях до міста?». Це питання має сенс, оскільки ми запитуємо ніби двічі: лицар нам двічі скаже правду, а брехун двічі збреше, що дасть нам істинну відповідь.

3. Житель А в будь-якому разі скаже, що він лицар (було розглянуто в пункті), тому висловлювання Б є брехнею. Б – брехун, В – лицар.

4. Чи може бути, що всі 10 осіб сказали цю фразу? Оскільки є принаймні один лицар, то є і другий, що сидить поруч із ним. Тоді є і два брехуни, які сидять поруч із цими лицарями. Оскільки брехуни брешуть, то інші їхні сусіди не можуть бути брехунами. Отже, це ще два лицарі, поруч з якими сидять ще два лицарі. Й останні два місця мають зайняти брехуни, оскільки лицарі завжди говорять правду. Виникає суперечність, оскільки вислів «Один із моїх сусідів – брехун, а інший – лицар» буде правдою для двох сусідів брехунів. Таким чином, усі 10 осіб ніяк не можуть сказати цю фразу. Для максимізації кількості тих, хто може сказати цю фразу, лицарі мають сидіти по 2, а брехуни не мають сидіти поруч (брехун із брехуном). Розсадивши по колу «2 лицарі – 1 брехун – 2 лицарі – 1 брехун – 2 лицарі – 1 брехун», отримуємо картину, коли всі ці 9 осіб можуть сказати «Один із моїх сусідів – лицар, а другий – брехун». Але за умовою задачі у нас 10 осіб. Посадивши ще одного лицаря між будь-якими двома, отримуємо, що при такій розсадці 9 осіб із 10 можуть сказати цю фразу. Отже, відповідь: 9.

5. Запишемо вислови острів'ян у більш скороченому вигляді:
А: «ч < с».
Б: «ч ≤ с».
В: «ч = с».
Г: «ч ≤ 1».

Усі острів'яни не можуть бути лицарями, оскільки в Г виявиться або 3, або 4 сині кульки, а у В – 2, і їх у сумі буде більше за 4. Може бути 4 брехуни: у кожного з них 3 червоні й 1 синя. Також може бути 1 лицар: в А 1 червона і 3 сині кулі, у Б 3 червоні й 1 синя, у В і Г по 4 червоні кулі, лицарем є А. Тому відповідь така: не можна визначити точну кількість лицарів.

6. Позначимо їх А, Б і В. В – точно не лицар, Б також, бо з його твердження випливало би, що А і В брехуни; протиріччя з тим, що каже А. Якщо А – лицар, то В бреше. Нехай В – брехун. Якщо Б – брехун, то його вислів є правдою, що є суперечністю. Отже, в такій ситуації Б – хитрун. Якщо ж А – не лицар, то лицарів немає. Якби всі були брехунами, то В каже правду, а це протиріччя. Тому серед них є хитрун.

7. Якщо перший – лицар, то, за його словами, другий і третій є брехунами, що суперечить висловлюванню другого жителя. Отже, перший є брехуном. Якщо другий – брехун, то третій також брехун, але тоді перший сказав правду, а він мусив збрехати. Отже, другий – лицар. За його словами, третій також є лицарем, і він чесно відповів: «Один».

8. Нехай Л – кількість лицарів у парламенті, Б – кількість брехунів (Л + Б = 101). Тоді, узявши до уваги висловлювання депутатів-лицарів, Л – 1 < 50. Отже, Л < 51. Узявши до уваги висловлювання депутатів-брехунів, Б − 1 ≥ 50. Відповідно Б ≥ 51. Отже, відповідь: 50 лицарів і 51 брехун.

9. Припустимо, така ситуація можлива. Тоді кожна з фраз була озвучена $\frac{1234}{2} = 617$ разів. Існує тільки три можливих пари осіб: два лицарі, два брехуни, лицар і брехун. У перших двох парах кожен сказав: «Він лицар», а в парах третього виду кожен сказав: «Він брехун». Отже, кожна з фраз була озвучена парну кількість разів, що суперечить тому, що їх має бути 617.

10. Так. Ви можете запитати: «Ви житель цього міста?».

11. Двох (чи більше) лицарів бути не може, оскільки тоді висловлювання, сказані ними, будуть неправдивими. Лише з брехунів така група складатися не може, оскільки тоді вони всі не збрехали. Залишається єдина можливість: один – лицар, інші – брехуни.

12. Якби вони відповіли однаково, то Знайко ніяк не міг би їх розрізнити. Отже, другий відповів «ні». Якби Либоньком був перший, то обидва сказали б правду. А це суперечить умові. Виходить, що Либонько – це другий і вони обидва збрехали (що не заборонено умовою).

**5.4.1**

1. 4.
2. Ділимо монети на пари і зважуємо попарно: ті, що важчі, складаємо в одну купку, ті, що легші, – в іншу. Це ми зробили за 34 зважування. Беремо першу купку (з важчими монетами). Зважуємо довільні дві монети, фіксуємо ту, що важча, легшу відкладаємо назавжди. Порівнюємо далі з кожною наступною монеткою: якщо знаходиться важча, ми фіксуємо її. Так за 33 зважування знаходимо найважчу монетку в купці. Аналогічно робимо і з легшими монетками: по черзі зважуємо всі з найлегшою на цей момент; якщо попадається легша – наступні порівнюються вже з нею. Для цього також вистачає 33 зважування. Разом рівно 100 зважувань.
3. Ділимо кулі на групи: 4, 4, 4, 2 кулі відповідно. Необхідно розглянути кілька варіантів. Якщо лічильник не показав радіоактивності в перших трьох групах, то це означає, що шукані кулі складають останню групу. Знадобилося три вимірювання. Далі можливі кілька варіантів:
   - Радіоактивність показали дві групи по 4 кулі. Щоб це виявити, нам знадобилося три вимірювання. У кожній групі із чотирьох куль радіоактивна куля знаходиться за два вимірювання. Отже, в сумі знадобилося 3 + 2 + 2 = 7 вимірювань.
   - Радіоактивність показали група з чотирьох і група з двох куль. Щоб це виявити, нам знадобилося чотири вимірювання. У групі з чотирьох куль радіоактивна куля знаходиться за два вимірювання, із двох куль – за одне. Отже, в сумі знадобилося 4 + 2 + 1 = 7 вимірювань.
   - Радіоактивність показала лише одна група з чотирьох куль. Щоб це виявити, нам знадобилося чотири вимірювання. Щоб виявити дві радіоактивні кулі з чотирьох, нам потрібні три вимірювання. Отже, знадобилося 4 + 3 = 7 вимірювань.
4. Спершу ділимо 24 кг на дві рівні частини, зрівнявши на шальках терезів по 12 кг з кожного боку. Потім так само розділимо 12 кг

на 6 і 6. Одну 6-кілограмову купу відкладаємо, іншу ділимо навпіл – отримуємо 3 кг на кожній із чаш. З'єднуємо 3 кг і відкладені 6 кг горіхів, одержуємо 9.

5. За допомогою гирі відмірюємо 2 кг яблук. Потім ділимо ці 2 кг на дві рівні частини (поклавши на шальки і досягши рівноваги). Маємо 1 кг яблук. Покладемо до нього 2-кілограмову гирю, і тепер на другій шальці можна зважити 3 кг яблук.

6. Перевертаємо водночас обидва годинники. Коли закінчиться 7 хвилин, перевертаємо 7-хвилинний годинник назад. Через 4 хвилини закінчиться пісок в 11-хвилинному годиннику (минуло 11 хвилин, у 7-хвилинному знизу вже піску на 4 хвилини). У цей момент потрібно знову перевернути 7-хвилинний годинник. Коли в ньому закінчиться пісок, сплине рівно 15 хвилин.

### 5.4.2.

1. Побудуємо відповідну таблицю:

| | 6 л | 3 л | 7 л |
|---|---|---|---|
| До переливання | 4 | 0 | 6 |
| 1 переливання | 1 | 3 | 6 |
| 2 переливання | 1 | 2 | 7 |
| 3 переливання | 6 | 2 | 2 |
| 4 переливання | 5 | 3 | 2 |
| 5 переливання | **5** | 0 | **5** |

2. Побудуємо відповідну таблицю:

| | 8 л | 5 л | 3 л |
|---|---|---|---|
| До переливання | 8 | 0 | 0 |
| 1 переливання | 3 | 5 | 0 |
| 2 переливання | 3 | 2 | 3 |
| 3 переливання | 6 | 2 | 0 |
| 4 переливання | 6 | 0 | 2 |
| 5 переливання | 1 | 5 | 2 |
| 6 переливання | 1 | 4 | 3 |
| 7 переливання | **4** | **4** | 0 |

3. Побудуємо відповідну таблицю:

| | 4 л | 9 л |
|---|---|---|
| 1 переливання | 0 | 9 |
| 2 переливання | 4 | 5 |
| 3 переливання | 0 | 5 |
| 4 переливання | 4 | 1 |
| 5 переливання | 0 | 1 |
| 6 переливання | 1 | 0 |
| 7 переливання | 1 | 9 |
| 8 переливання | 4 | **6** |

4. Побудуємо відповідну таблицю:

| | 3 л | 5 л |
|---|---|---|
| 1 переливання | 0 | 5 |
| 2 переливання | 3 | 2 |
| 3 переливання | 0 | 2 |
| 4 переливання | 2 | 0 |
| 5 переливання | 2 | 5 |
| 6 переливання | 3 | **4** |

5. Побудуємо відповідну таблицю:

| | 5 л | 17 л |
|---|---|---|
| 1 переливання | 5 | 0 |
| 2 переливання | 0 | 5 |
| 3 переливання | 5 | 5 |
| 4 переливання | 0 | 10 |
| 5 переливання | 5 | 10 |
| 6 переливання | 0 | 15 |
| 7 переливання | 5 | 15 |
| 8 переливання | 3 | 17 |
| 9 переливання | 3 | 0 |
| 10 переливання | 0 | 3 |
| 11 переливання | 5 | 3 |
| 12 переливання | 0 | 8 |
| 13 переливання | 5 | 8 |
| 14 переливання | 0 | **13** |

**5.5.** Відповіді до ілюстративних судоку:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 3 | 4 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 | 2 |
| 6 | 7 | 2 | 1 | 9 | 5 | 3 | 4 | 8 |
| 1 | 9 | 8 | 3 | 4 | 2 | 5 | 6 | 7 |
| 8 | 5 | 9 | 7 | 6 | 1 | 4 | 2 | 3 |
| 4 | 2 | 6 | 8 | 5 | 3 | 7 | 9 | 1 |
| 7 | 1 | 3 | 9 | 2 | 4 | 8 | 5 | 6 |
| 9 | 6 | 1 | 5 | 3 | 7 | 2 | 8 | 4 |
| 2 | 8 | 7 | 4 | 1 | 9 | 6 | 3 | 5 |
| 3 | 4 | 5 | 2 | 8 | 6 | 1 | 7 | 9 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 7 | 6 | 2 | 1 | 8 | 5 | 4 |
| 4 | 3 | 1 | 5 | 2 | 7 | 8 | 6 |
| 7 | 6 | 5 | 8 | 4 | 3 | 1 | 2 |
| 1 | 4 | 2 | 7 | 6 | 5 | 3 | 8 |
| 8 | 5 | 4 | 1 | 7 | 6 | 2 | 3 |
| 6 | 2 | 7 | 3 | 8 | 1 | 4 | 5 |
| 2 | 8 | 3 | 6 | 5 | 4 | 7 | 1 |
| 5 | 1 | 8 | 4 | 3 | 2 | 6 | 7 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 9 | 7 | 6 | 4 | 1 | 8 | 5 | 2 |
| 5 | 8 | 1 | 7 | 3 | 9 | 2 | 4 | 6 |
| 2 | 6 | 3 | 8 | 5 | 7 | 9 | 1 | 4 |
| 8 | 4 | 2 | 5 | 9 | 6 | 7 | 3 | 1 |
| 6 | 5 | 4 | 9 | 1 | 2 | 9 | 7 | 8 |
| 1 | 7 | 5 | 4 | 8 | 3 | 6 | 2 | 9 |
| 7 | 1 | 8 | 2 | 6 | 4 | 5 | 9 | 3 |
| 4 | 2 | 9 | 3 | 7 | 8 | 1 | 6 | 5 |
| 9 | 3 | 6 | 1 | 2 | 5 | 4 | 8 | 7 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 5 | 8 | 4 | 7 | 6 | 2 | 9 |
| 7 | 2 | 8 | 5 | 9 | 6 | 4 | 3 | 1 |
| 4 | 9 | 6 | 3 | 2 | 1 | 5 | 7 | 8 |
| 5 | 4 | 2 | 1 | 6 | 8 | 3 | 9 | 7 |
| 6 | 8 | 9 | 2 | 7 | 3 | 1 | 4 | 5 |
| 1 | 7 | 3 | 4 | 5 | 9 | 2 | 8 | 6 |
| 9 | 5 | 1 | 7 | 3 | 4 | 8 | 6 | 2 |
| 8 | 6 | 4 | 9 | 1 | 2 | 7 | 5 | 3 |
| 2 | 3 | 7 | 6 | 8 | 5 | 9 | 1 | 4 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 4 | 3 |
| 3 | 1 | 2 | 4 |
| 4 | 3 | 1 | 2 |
| 2 | 4 | 3 | 1 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 4 | 6 | 8 | 3 | 2 | 7 | 1 | 5 |
| 1 | 5 | 2 | 6 | 9 | 7 | 8 | 3 | 4 |
| 7 | 3 | 8 | 4 | 5 | 1 | 2 | 9 | 6 |
| 8 | 1 | 9 | 2 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 |
| 4 | 7 | 5 | 3 | 1 | 9 | 6 | 8 | 2 |
| 2 | 6 | 3 | 5 | 4 | 8 | 1 | 7 | 9 |
| 3 | 2 | 1 | 9 | 8 | 5 | 4 | 6 | 7 |
| 5 | 8 | 4 | 7 | 6 | 3 | 9 | 2 | 1 |
| 6 | 9 | 7 | 1 | 2 | 4 | 3 | 5 | 8 |

Відповіді до завдань:

1.

| | | |
|---|---|---|
| 1– 2 | 1 | 3 3 |
| 3÷ 3 | 2÷ 2 | 1 |
| 1 | 6× 3 | 2 |

2.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2÷ 2 | 1 | 24× 4 | 3 |
| 8+ 3 | 4 | 1 | 2 |
| 3– 1 | 3 3 | 2– 2 | 4 |
| 4 | 6+ 2 | 3 | 1 |

3.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 24× 4 | 3+ 1 | 2 | 1– 5 | 15× 3 |
| 2 | 3 | 4– 1 | 4 | 5 |
| 10× 1 | 2 | 5 | 48× 3 | 4 |
| 2– 3 | 5 | 4 | 1 | 2 2 |
| 5 | 1– 4 | 3 | 2÷ 2 | 1 |

4.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1– 1 | 2 | 2– 4 | 6 | 10+ 3 | 7 | 2– 5 |
| 3 3 | 22+ 5 | 6 | 2– 2 | 4 | 9+ 1 | 7 |
| 17+ 6 | 4 | 7 | 10+ 5 | 8+ 2 | 3 | 1– 1 |
| 4 | 4– 7 | 2– 3 | 1 | 6 | 5 | 2 |
| 7 | 3 | 5 | 4 | 6– 1 | 2 2 | 19+ 6 |
| 3– 5 | 6+ 1 | 2 | 3 | 7 | 6 | 4 |
| 2 | 5– 6 | 1 | 7 7 | 9+ 5 | 4 | 3 |

5.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 30× 5 | 6 | 40× 2 | 4 | 28× 7 | 3× 3 | 1 |
| 2÷ 6 | 3 | 5 | 210× 7 | 4 | 168× 1 | 2 |
| 210× 2 | 5 | 4× 1 | 6 | 3 | 4 | 7 |
| 3 | 28× 7 | 4 | 5 | 1 | 60× 2 | 6 |
| 7 | 4 | 3 3 | 12× 1 | 2 | 6 | 5 |
| 4× 1 | 2× 2 | 84× 7 | 2÷ 3 | 6 | 2100× 5 | 4 |
| 4 | 1 | 6 | 2 | 5 | 7 | 3 |

6.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20+ 8 | 5 | 10+ 7 | 2 | 1 | 10+ 6 | 4 | 3– 3 |
| 7 | 7– 8 | 10+ 5 | 3 | 7+ 4 | 3+ 1 | 2 | 6 |
| 9+ 6 | 1 | 2 | 4 4 | 3 | 2– 5 | 15+ 7 | 8 |
| 1 | 15+ 7 | 4 | 20+ 8 | 5 5 | 3 | 11+ 6 | 2 |
| 2 | 4 | 7– 8 | 5 | 15+ 6 | 7 | 3 | 10+ 1 |
| 9+ 3 | 6 | 1 | 7 | 15+ 8 | 2 | 5 | 4 |
| 9+ 4 | 8+ 2 | 3 | 13+ 6 | 7 | 17+ 8 | 1 | 12+ 5 |
| 5 | 3 | 6 | 1 | 2– 2 | 4 | 8 | 7 |

| 7. | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 17+ 9 | 2 | 13+ 6 | 3 | 6+ 4 | 19+ 1 | 12+ 7 | 15+ 8 | 5 5 |
| 6 | 1 | 3 | 22+ 9 | 2 | 4 | 5 | 7 | 12+ 8 |
| 10+ 3 | 17+ 9 | 8 | 6 | 7 | 5 | 6+ 2 | 9+ 1 | 4 |
| 7 | 9+ 3 | 14+ 1 | 5 | 8 | 9 | 4 | 2 | 6 |
| 2 | 4 | 15+ 7 | 8 | 14+ 6 | 18+ 3 | 20+ 9 | 5 | 3+ 1 |
| 19+ 1 | 5 | 13+ 9 | 4 | 3 | 7 | 8 | 6 | 2 |
| 8 | 12+ 7 | 4 | 1 | 5 | 8+ 2 | 6 | 12+ 3 | 9 |
| 5 | 18+ 6 | 7+ 2 | 24+ 7 | 9 | 8 | 8+ 1 | 4 | 3 |
| 4 | 8 | 5 | 3+ 2 | 1 | 9+ 6 | 3 | 16+ 9 | 7 |

| 8. | | | |
|---|---|---|---|
| 8× 4 | 8+ 2 | 3 | 6+ 1 |
| 2 | 3 | 1 | 4 |
| 1 | 12× 4 | 1– 2 | 3 |
| 3 | 1 | 2÷ 4 | 2 |

| 9. | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 6+ 4 | 2 | 6+ 5 | 1 | 10+ 3 |
| 6+ 2 | 4– 5 | 1 | 3 | 4 |
| 1 | 3 | 1– 4 | 5 | 10+ 2 |
| 2– 5 | 3– 4 | 9+ 3 | 2 | 1 |
| 3 | 1 | 2 | 4 | 5 |

| 10. | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 3÷ 1 | 3 | 2÷ 4 | 2 | 180× 5 | 6 |
| 120× 5 | 4 | 12× 6 | 1 | 3 | 2 |
| 12× 3 | 6 | 2 | 24× 4 | 1 | 15× 5 |
| 4 | 60× 5 | 3÷ 1 | 6 | 8× 2 | 3 |
| 6 | 2 | 3 | 5 5 | 4 | 1 |
| 2÷ 2 | 1 | 15× 5 | 3 | 24× 6 | 4 |

**5.6.**

$7 + 8 : 15 + 18 = 19$

$2 \times 9 - 16 \times 14 = 28$

$8 : 4 + 2 \times 19 = 76$

$2 \times 7 + 43 - 3 = 54$

1. $19 + 28 + 76 + 54 = 177$

$2 \times 9 + 8 + 9 = 35$

$24 : 8 + 7 \times 3 = 30$

$2 \times 4 \times 5 - 12 = 28$

$7 + 9 : 8 \times 24 = 48$

2. $35 + 30 + 28 + 48 = 141$

$14 : 2 - 3 \times 7 = 28$

$9 : 3 + 9 + 9 = 21$

$2 + 8 : 5 \times 16 = 32$

$3 \times 8 - 15 \times 4 = 36$

3. $28 + 21 + 32 + 36 = 117$

**5.7.**

1. 28 375 + 28 375 + 28 375 = 85 125

2. 3930 + 3980 = 7910

3. 93 989 + 7492 + 7492 = 108 973

4. 18 969 + 18 969 = 37 938

5. 35 206 + 35 206 = 70 412

6. 99 + 99 = 198

7. 546 790 + 794 075 = 1 340 865

8. 7483 + 7455 = 14 938

9. 68 782 + 68 782 + 650 = 138 214

10. 79 208 + 53 446 = 132 654

11. 586 + 39 586 = 40 172

12. 819 + 9219 = 10 038

13. 30 807 × 7 = 215 649

**5.8.**

1. а) не можна; г) можна;
б) не можна; д) можна;
в) не можна; е) можна.

2. Нехай люди – це вершини графа і між вершинами є ребро, якщо відповідні друзі грали один з одним. Тоді кількість партій, які зіграв гравець, є степенем його вершини. Оскільки за лемою про рукостискання сума степенів вершин довільного графа є завжди парною, то у графі не може бути непарної кількості вершин із непарним степенем, що й означає, що кількість осіб, які зіграли непарну кількість партій, парна.

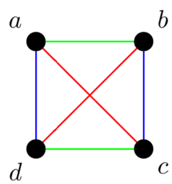
3. Припустимо, це не так. Тоді степені вершин – це числа від 0 до $(n-1)$. Проте якщо є вершина зі степенем $(n-1)$, то в графі не може бути вершини степеня 0, оскільки ця вершина суміжна з усіма. Протиріччя.

4. Так. Від супротивного одержується сума непарної кількості непарних чисел – степенів вершин графа, що неможливо.

5. Ні. Позначивши міністрів вершинами графа, а спілкування – ребрами, одержуємо непарну суму степенів вершин графа, що неможливо.

6. а) так;
б) ні;
в) так;
г) так при $m > 2$, ні при $m = 1$.

7. Так, може. Зобразимо це як розфарбування ребер графа, де зелений колір означає, що відповідні люди мають однакові імена, червоний – прізвища, синій – по батькові:




**5.10.**

1. Фокус у тому, що коли анімація рухає лівий шматок вправо догори, то «магічним чином» у цієї частини шоколадки виростає ще невеличка смужка, яка за площею якраз рівна маленькому квадратикові. Якщо ви проробите такі дії зі справжньою шоколадкою, то помітите, що крок 5 відрізняється від кроку 1 висотою шоколадки. Тому цей парадокс має досить легку розгадку.

2. Тут помилка полягає в побудові. Точка $F$ завжди лежатиме поза межами трикутника, причому так, що коли ми опустимо з неї перпендикуляри на сторони $AB$ і $AC$, то один із цих перпендикулярів потрапить на одну сторону трикутника, а другий – на продовження іншої. Тому все доведення можна вважати недійсним. Детальний

аналіз цього парадоксу можна знайти в розділі 6 книги Ю. Нортропа «Математичні загадки» [53].

3. Помилка полягає в припущенні того, що рівняння $x^2 + x + 1 = 0$ має дійсний корінь.

4. Помилка полягає в припущенні того, що найбільше натуральне число існує.

## 5.11.

**Теорема Коперника**: якщо в нас є два кола, одне з яких має діаметр, рівний радіусу іншого, і котиться всередині нього без ковзання, то кожна точка меншого кола, рухаючись, описуватиме траєкторію – діаметр великого кола.

*Доведення*. Нехай ми хочемо простежити рух певної точки $N$ маленького кола. Для зручності введемо систему координат так, щоб вектор $ON$, де $O$ – центр великого кола, задавав напрям осі ординат. Розглянемо положення маленького кола, зображене на рисунку нижче. Щоб довести, що відрізок $NO$ перейшов в $AB$, доведемо, що маленьке коло проїхало без ковзання по великому. Через центр $K$ відрізка $AB$ проведемо пунктирну лінію до точки дотику $C$. Відмітимо середину $L$ дуги $AC$ (*рис. 145*).

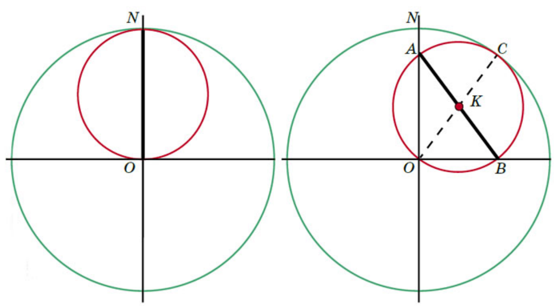


Рис. 145

Оскільки $NO$ і $LK$ паралельні, то кути $LKC$ і $NOC$ рівні. Через те що радіус меншого кола вдвічі менший за радіус більшого кола, то дуга $LC$ вдвічі коротша за дугу $NC$. Проте дуга $AC$ також удвічі довша за $LC$. Отже, маємо рівність дуг: $AC = NC$ (*рис. 146*).

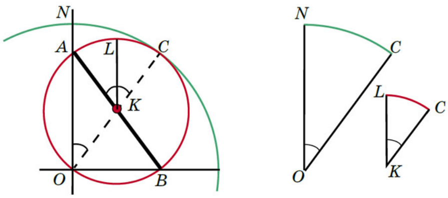



Рис. 146

Це й означає, що мале коло котиться по великому без проковзування: відстань від точки $N$ до точки дотику $C$ завжди дорівнює відстані від $A$ до точки $C$.

Відповіді до завдань:

1. $7\pi$.
2. 100.

**5.12.**

1. Вважатимемо, що сторона квадрата дорівнює 1. Тоді (*рис. 147*):

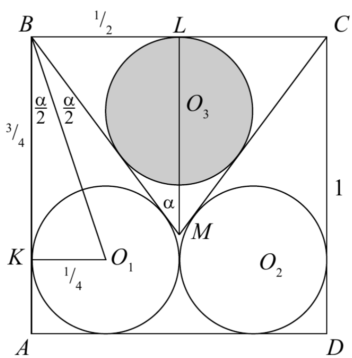



Рис. 147

$BK = \frac{3}{4}, KO_1 = \frac{1}{4}, BL = \frac{1}{2}$.

Покажемо, що $LO_3 = \frac{1}{4}$.

Поклавши $\angle KBO_1 = \frac{\alpha}{2}$, маємо: із прямокутного $\Delta KBO_1$

$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{KO_1}{BK} = \frac{1}{4} : \frac{3}{4} = \frac{1}{3}$.

Бачимо, що $\angle KBM = \angle BML = \alpha$ і $tg\alpha = \frac{3}{4}$, у чому можна переконатися за допомогою формули тангенса подвоєного кута і вже знайденого значення $tg\frac{\alpha}{2}$.

У прямокутному $\Delta BML$:

$LM = \dfrac{BL}{tg\alpha} = \dfrac{1}{2} : \dfrac{3}{4} = \dfrac{2}{3}$,

$BM^2 = LM^2 + BL^2 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{25}{36}$, і $BM = \dfrac{5}{6}$.

Оскільки $2S_{\Delta BMC} = BC \times ML = P_{\Delta BMC} \times LO_3$, то

$LO_3 = \dfrac{BC \times ML}{P_{\Delta BMC}} = \dfrac{BC \times ML}{BC + 2BM} = \dfrac{1}{4}$, що й треба було довести.

2. Нехай шуканий радіус дорівнює $r$, малий і великий катети кожного трикутника відповідно $a$ і $b$ (*рис. 148*).

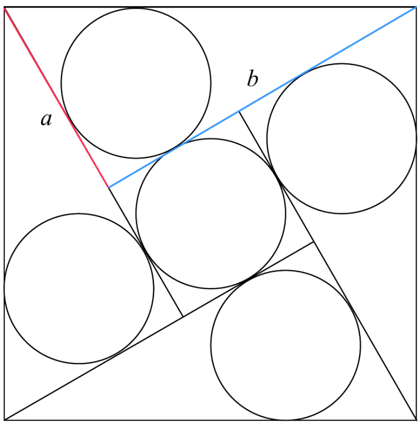



Рис. 148

Тоді з формули радіуса кола, вписаного в прямокутний трикутник,

$$2r = a + b - 1.$$

З іншого боку,

$$2r = b - a,$$

тому

$$a + b - 1 = b - a \Rightarrow a = \frac{1}{2},\ b = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow r = \frac{\sqrt{3} - 1}{4}.$$

3. Розглянемо частину наведеної в умові конструкції (*рис. 149)* і доведемо, що площа однієї лунки дорівнює чверті площі даного квадрата, звідки й випливатиме необхідне твердження.

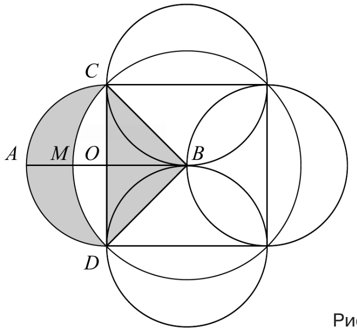


Рис. 149

Уведемо позначення:

$R = BC$ – радіус кола, описаного навколо квадрата; $r = OC$ – радіус кола, побудованого на стороні квадрата, як на діаметрі, тоді $R^2 = 2r^2$.

Площа лунки $ACMD$ дорівнює площі півкруга $ACD$ без площі сегмента $CMD$.

Оскільки

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\pi r^2 \text{ і } S_{CMD} = S_{BCMD} - S_{\Delta BCD} = \frac{1}{4}\pi BC^2 - \frac{1}{2}CD \times OB =$$
$$= \frac{1}{4}\pi 2r^2 - \frac{1}{2}2r \times r = \frac{1}{2}\pi r^2 - r^2,$$

то

$$S_{ACMD} = S_{ACD} - S_{CMD} = \frac{1}{2}\pi r^2 - \left(\frac{1}{2}\pi r^2 - r^2\right) = r^2 = S_{\Delta BCD},$$

що й треба було довести.

4. Нехай радіус найбільшого кола дорівнює $R = 3r$ (*рис. 150*). Тоді $r$ – радіус кожного кола у вертикальному триплеті і $2r$ – радіус кожного з двох великих двійників. Нехай $x$ – невідомий радіус.

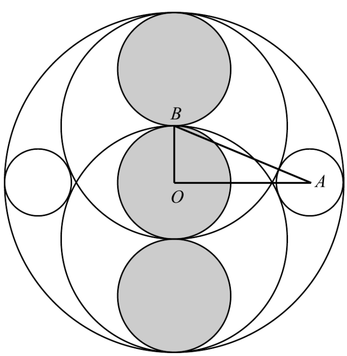


Рис. 150

У $\Delta ABO$:

$$AB = 2r + x,\ OB = r,$$
$$OA = 3r - x.$$

За теоремою Піфагора:

$$AB^2 = OB^2 + A^2,$$
$$(2r + x)^2 = r^2 + (3r - x)^2,$$
$$4r^2 + 4rx + x^2 = r^2 + 9r^2 - 6rx + x^2,$$
$$10rx = 6r^2,\ x = \frac{3r}{5}.$$

Оскільки $R = 3r$, то радіус найменшого кола виражається через радіус найбільшого у такий спосіб:

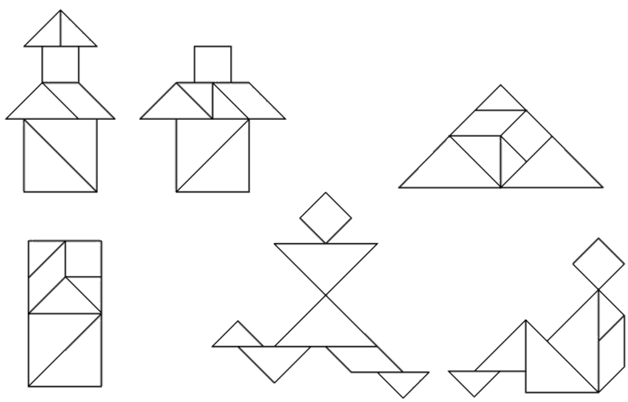
$$x = \frac{R}{5}.$$

Відповідь: $x = \frac{R}{5}$.

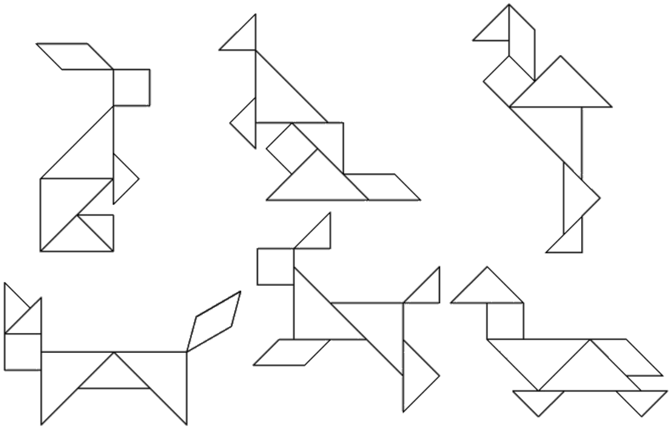
**6.2.**

1. Танграм

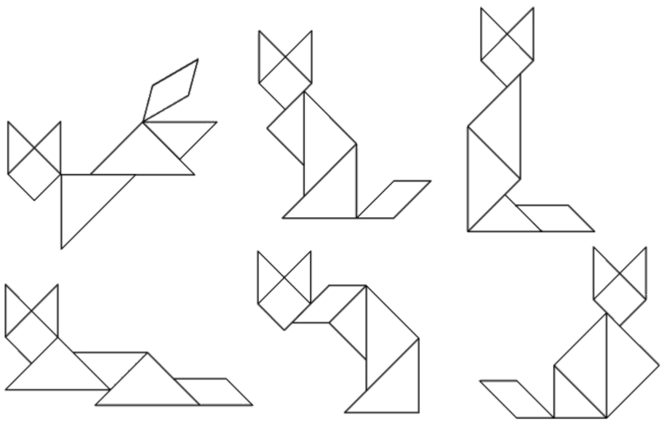
а)



б)

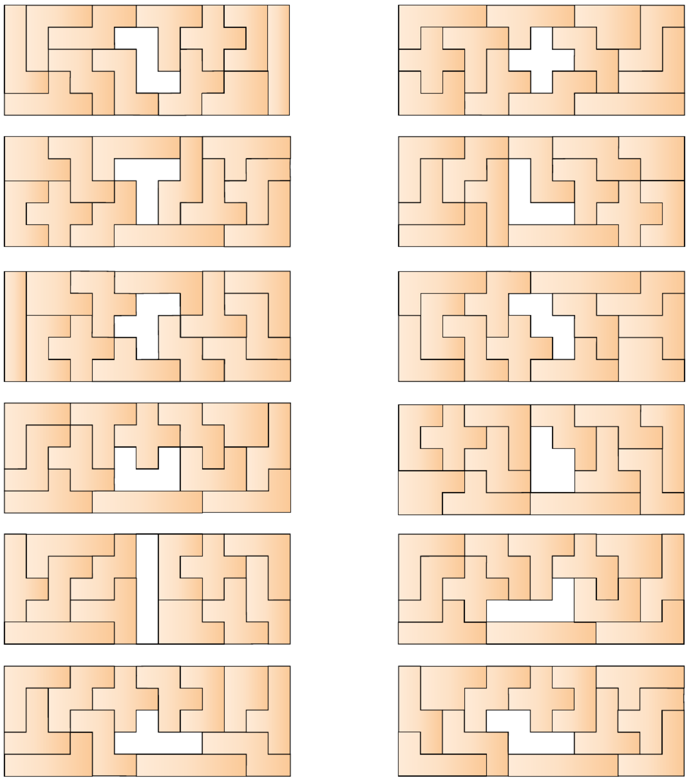


в)

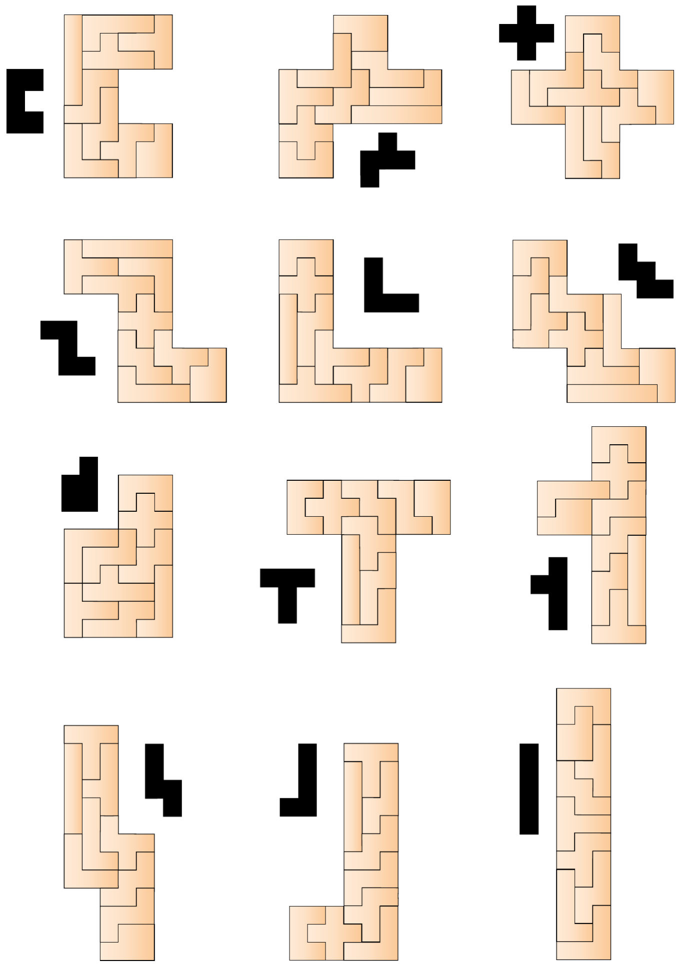


2. Пентаміно

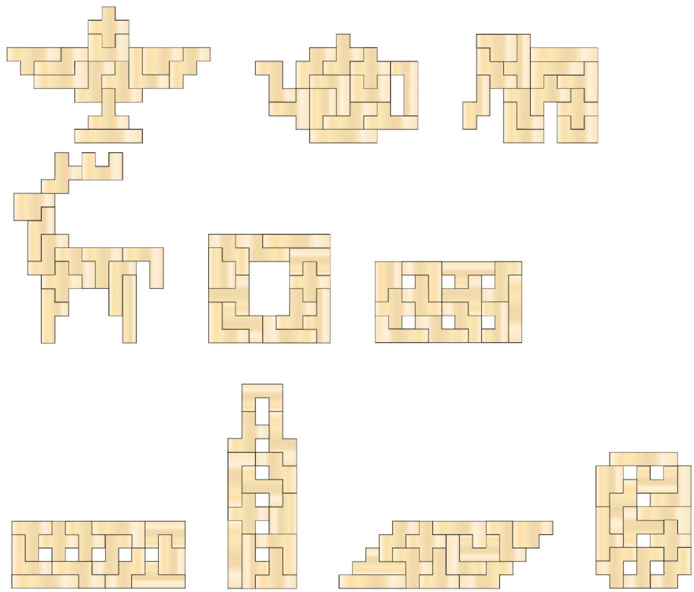
а)



б)



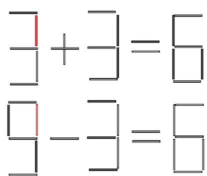
в)



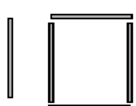
**6.3.**

Секція «Числова»

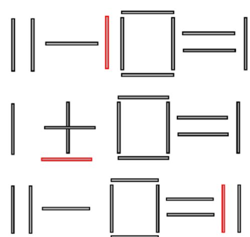
1.



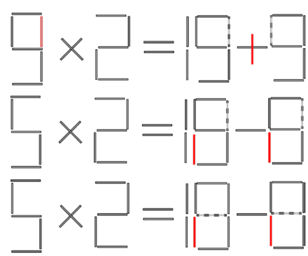
2.



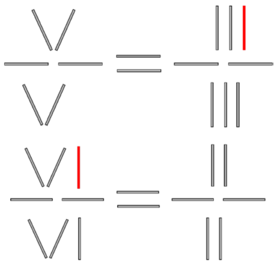
3.



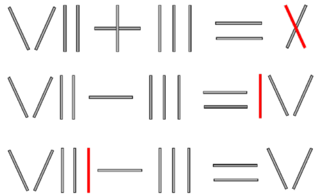
4.



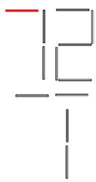
5.



7.

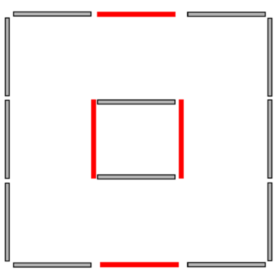


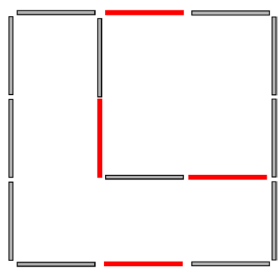
6.



Секція «Геометрична»

1.

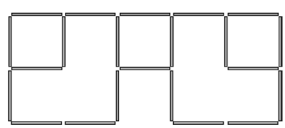




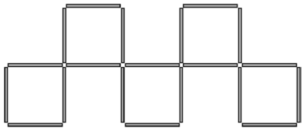
2.

а) 10 квадратиків 1 × 1;
13 прямокутників 1 × 2;
6 прямокутників 1 × 3;
4 прямокутники 1 × 4;
2 прямокутники 1 × 5;
4 квадрати 2 × 2;
3 прямокутники 2 × 3;
2 прямокутники 2 × 4;
14 прямокутників 2 × 5.
У сумі 45 прямокутників.

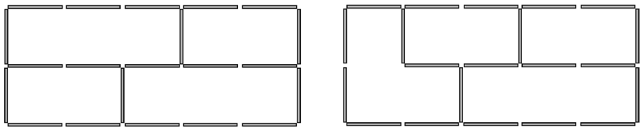
б)



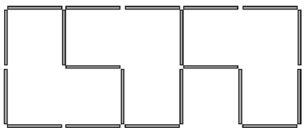
в)



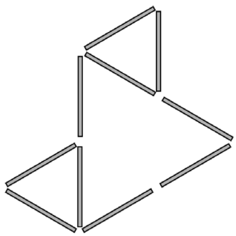
г)



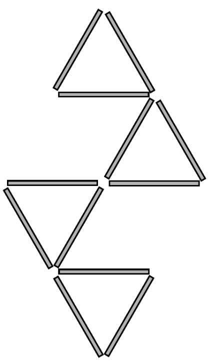
д)



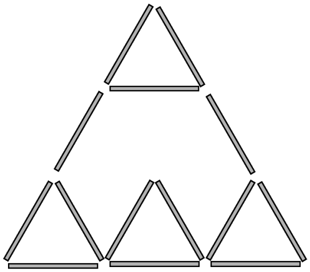
3.



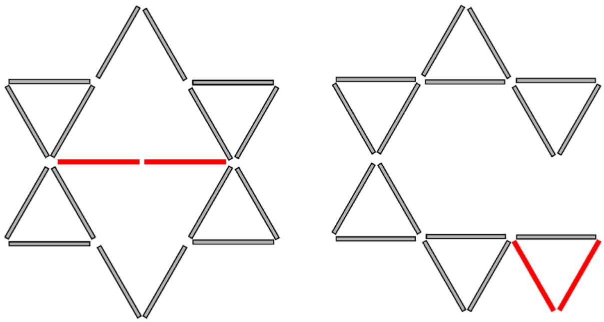
4.



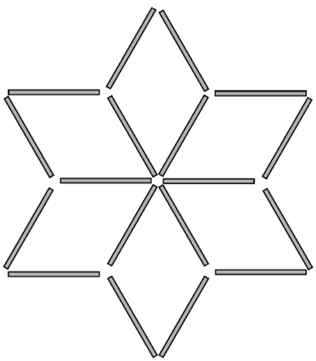
5.



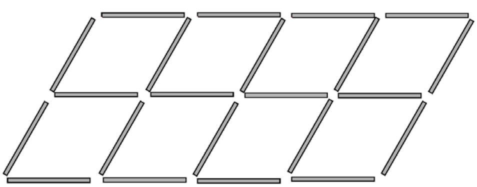
6.



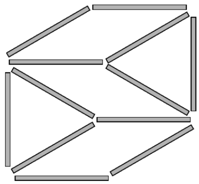
7.



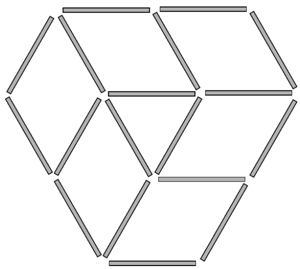
8.



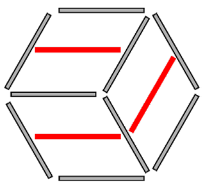
9.



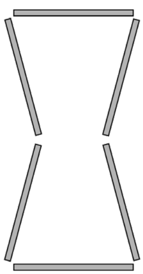
10.



11.



12.



## 6.5.

На *рис. 151* показаний один із двох відомих способів обв'язування.

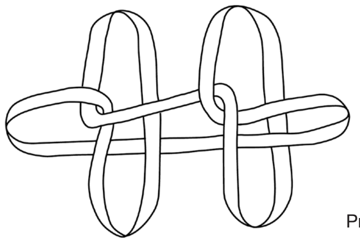


Рис. 151

Створити таку конструкцію не дуже просто, тому краще дати завдання кільком особам. Важливий момент: якщо у вас з'являться перекручування, то наприкінці виконання завдання їх можна позбутися, акуратно перекручуючи стрічку.

1. Чорна крива ділить площину на кілька частин. Простежте хід червоної лінії і ви побачите, що, потрапляючи в одну з таких ділянок, ви обов'язково маєте з неї вийти, інакше ви ніколи не повернетеся в ту точку, звідки почали свій рух. Оскільки кожна точка входу і точка виходу утворюють пару точок перетину, то загальна кількість таких точок завжди є парною.

2. Оскільки під пластиною пан *M* не бачить вузла, а поза пластиною ми бачимо перекид двох частин мотузки, то, взявши до уваги слова пана *N*, ми можемо стверджувати, що мотузкова петля утворює вузол «трилисник».

## 6.6.

Відповідь до поставленого в підрозділі завдання про розміщення додаткової шайбочки в рамці полягає в тому, що необхідно змінити квадратне пакування на гексагональне (*рис. 152*).

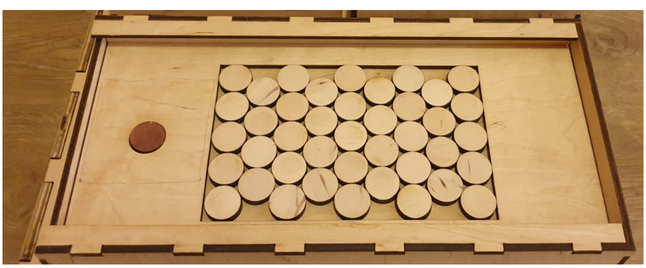


Рис. 152. Розв'язок: гексагональне пакування

**6.7.**

2.1. А – неможливо, В – можливо.
2.2. А – можливо, В – неможливо.
2.3. А – можливо, В – неможливо.
2.4. А – неможливо, В – можливо.
2.5. А – можливо, В – неможливо.
2.6. А – можливо, В – неможливо.
2.7. А – неможливо, В – можливо.
2.8. А – неможливо, В – можливо.

**6.8.**

1. Вказівки до складання цих візерунків є на відео:

2. Один із підходів до складання такої модифікації кубика можна знайти тут:

**8.1.**

1. Яр-під-Зайчиком, Па-де-Кале, Ріо-де-Жанейро, Ла-Манш, Франкфурт-на-Майні, Новосілки-на-Дніпрі, Дар-ес-Салам.

2. Івано-Франківськ, Михайло-Коцюбинське, Віта-Поштова, Гвінея-Бісау, Ельзас-Лотарингія, Кам'янець-Подільський, Берізки-Бершадські, Баня-Лука, Пуща-Водиця, Ріо-Негро, Улан-Уде, Дмитро-Варварівка, Нар'ян-Мар.

3. 1) Гельсінкі, Бухарест, Вільнюс, Бухара, Конакрі;
   2) Китайгород, Княжпіль, Ольгопіль, Адріянополь, Севастополь, Бранденбург, Кемберленд, Даугавпілс, Кейптаун;
   3) Габороне, Лісабон, Душанбе, Єреван, Загреб, Джибуті, Мапуту, Масеру, Веллінгтон, Вашингтон.

4. Леуварден, Копенгаген, Стокгольм, Джорджтаун, Браззавіль, Бельмопан, Парамарибо, Будапешт, Братислава, Джакарта.

5. Гавана, Доха, Габароне, Дакар, Додома.

6. Крутибороди, Копайгород, Гуляйполе, Мелітополь, Алатау, Аюдаг, Копетдаг, Сирдар'я.

7. Колумбія, Іспанія, Ірландія, Грузія, Латвія, Лівія, Болівія, Нігерія, Данія, Сирія.

## Корисні ютуб-канали:

1. Mind Your Decisions – головоломки.

2. European Erasmus + Project Math-GAMES – ідеї математичних ігор та головоломок, гра в 15, танграм.

3. Logic Channel – головоломки та логічні задачі.

4. Numberphile – цікаві математичні факти, геометричні задачі, парадокси, відкриті задачі, факти про числа.

5. Standupmaths – усе про математику від Метью Томаса Паркера – австралійського математика, письменника, коміка та сценариста.

6. Mathologer. У реальному житті Матологер – професор Університету Монаш у Мельбурні. Тут багато захопливих відео про математичні формули, геометричні об’єкти та цікаві факти.

7. 3 Blue 1 Brown – яскраві й дотепні розповіді про складні математичні поняття і задачі.

8. D!NG – різноманітна математична магія та розваги: парадокс Монті Голла, стрічка Мебіуса, амбіграми тощо.

9. MathsSmart – математичні задачі та головоломки!

## Предметний покажчик

## Іменний покажчик

## Список використаних джерел

1. Poundstone W. How Would You Move Mount Fuji?: Microsoft's Cult of the Puzzle – How the World's Smartest Companies Select the Most Creative Thinkers. New York : Little, Brown and Company, 2004. 288 p.

2. Meyer E. F., Falkner N., Sooriamurthi R., Michalewicz Z. Guide to teaching puzzle-based learning. London : Springer, 2014. 345 p.

3. Boaler J. Mathematical Mindsets. Unleashing Students' Potential Through Creative Math, Inspiring Messages. 2nd edition. San Francisco : Jossey-Bass, 2022. 320 p.

4. Zeitz P. The Art and Craft of Problem Solving. 2nd edition. Danvers : John Wiley & Sons, Inc., 2007. 366 p.

5. Michalewicz Z., Michalewicz M. Puzzle-based learning: an introduction to critical thinking, mathematics, and problem solving. Melbourne : Hybrid Publishers, 2008. 313 p.

6. Pólya G. How to Solve It. Garden City, NY : Doubleday, 1957. 253 p.

7. Оклі Б. Навчитися вчитися. Як запустити свій мозок на повну. Київ : Наш формат, 2018. 272 с.

8. Zeng Q., Davis B. R., Abbott D. Reverse auction: the lowest unique positive integer game. *Fluct Noise Lett*. 2007. Vol. 7. № 4. Pp. 439–447.

9. Barrows H. S. Problem-based learning in medicine and beyond: a brief overview. *New directions for teaching and learning*. 1996. № 68. P. 312.

10. Barr S. A miscellany of puzzles: Mathematical and Otherwise. Crowell : Pennsylvania State University, 1965. 164 p.

11. Dudeney H. The Canterbury Puzzles. Dover : Dover Publications, 1919. 267 p.

12. Carroll L., Collingwood S. D. Diversions and Digressions of Lewis Carroll. Dover : Dover Publications, 1961. 371 p.

13. Dalgety J., Hordern E. Classification of Mechanical Puzzles and Physical Objects Related to Puzzles. *Chapter in The Mathemagician and Pied Puzzler. A Collection in Tribute to Martin Gardner*. Edited by Elwyn R. Berlekamp, Tom Rodgers. Florida : A K Peters / CRC Press, 1999. Pp. 175–186.

14. Slocum J., Botermans J. Puzzles Old & New. How to make and solve them. 4th edition. Washington : University of Washington Press, 1994. 160 p.

15. Norgate M. Cutting borders: Dissected maps and the origins of the jigsaw puzzle. *The Cartographic Journal*. 2007. Vol. 44. № 4. Pp. 342–350.

16. Clark A. Lewis Carroll, a Biography. Praha : Schocken Books Incorporated, 1979. 284 p.

17. Newing A. The life and work of H. E. Dudeney. *Mathematical Spectrum*. 1988/89. № 21. Pp. 37–44.

18. Tierney J. For Decades, Puzzling People With Mathematics. *The New York Times*. 2009. 19 Oct. URL: https://www.nytimes.com/2009/10/20/science/20tier.htm (дата звернення: 20.09.2021).

19. Perelman Y. Short Works by Yakov Perelman. Prodinnova, 2014. 90 p.

20. Перельман Я. І. Жива математика: математичні оповідання і головоломки / пер. з рос. Т. І. Чумаченко. 5-те вид. Київ : Техніка, 1990. 136 с.

21. Гайштут и его друзья. URL: https://zadacha.uanet.biz (дата звернення: 12.09.2021).

22. Zeng D. X., Li M., Wang J. J., Huang Z. Overview of Rubik's Cube and Reflections on Its Application in Mechanism. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*. 2018. Vol. 31. № 1. Pp. 1–12.

23. Alex Bellos. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Alex_Bellos#On_mathematics (дата звернення: 26.12.2022).

24. Martin P., Kelly J., Grabow K. V. Rebuses for Readers. Englewood : Libraries Unlimited Inc., 1992. 148 p.

25. Rouse Ball W. W., Coxeter H. S. M. Mathematical Recreations and Essays. Thirteenth Edition. Dover Publications, 1987. 428 p.

26. Crossman E. K., Crossman S. M. The crossword puzzle as a teaching tool. *Teaching of Psychology*. 1983. Vol. 10. № 2. Pp. 98–99.

27. Kordemski B. A. Köpfchen, Köpfchen! Mathematik zur Unterhaltung. Leipzig – Jena : Urania-Verlag, 1965. 328 p.

28. Олімпіада з головоломок Русанівського ліцею. URL: https://www.rl.kiev.ua/olympiad/puzzles/ (дата звернення: 15.06.2021).

29. Felgenhauer B., Frazer J. Mathematics of sudoku I. *Mathematical Spectrum*. 2006. Vol. 39. № 1. Pp. 15–22.

30. Delahaye J. P. The science behind Sudoku. *Scientific American*. 2006. Vol. 294. № 6. Pp. 80–87.

31. Ozanam J. Recreations mathematiques et physiques. Paris, 1725. 510 p.

32. Euler L. Recherches sur une nouvelle espece de quarres magiques. Middelburg, 1782. Pp. 85–239.

33. Simonis H. Sudoku as a constraint problem. *CP Workshop on modeling and reformulating Constraint Satisfaction Problems*. Citeseer, 2005. Vol. 12. Pp. 13–27.

34. Ewing J., Kosniowski C. Puzzle it out: Cubes, groups, and puzzles. Cambridge University Press, 1982. 64 p.

35. Johnson Wm. W., Story W. E. Notes on the 15 Puzzle. *American Journal of Mathematics*. 1879. Vol. 2. № 4. Pp. 397–404.

36. Archer A. F. A Modern Treatment of the 15 Puzzle. *The American Mathematical Monthly*. 1999. Vol. 106. № 9. Pp. 793–799.

37. Slocum J., Sonneveld D. The 15 Puzzle: How it Drove the World Crazy : illustrated edition. Beverly Hills : Slocum Puzzle Foundation, 2006. 144 p.

38. Perelman Ya. Geometry in the Open Air. Prodinnova, 2014, 116 p.

39. Analysis of structural composition and representation of topological structures of Rubik's Cube mechanism / Zeng D. et al. *Mechanism and Machine Theory*. 2019. Vol. 136. Pp. 86–104.

40. Шкільняк С. С. Математична логіка. Основи теорії алгоритмів : навч. посіб. Київ : ДП «Видавничий дім "Персонал"», 2009. 280 с.

41. Gardner M. The Colossal Book of Short Puzzles and Problems. New York : WW Norton & Co, 2005. 512 p.

42. Hidetoshi F., Rothman T. Sacred Mathematics: Japanese Temple Geometry. Princeton : Princeton University Press, 2008. 392 p.

43. Hidetoshi F. Japanese Temple Geometry Problems Sangaku. Charles Babbage Research Ctr., 1989. 206 p.

44. Енциклопедія для дітей. Математика. Київ : Аванта+, 2007. 624 с.

45. Huzita H. Axiomatic Development of Origami Geometry *Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology*. 1989. Pp. 143–158.

46. Gaur S. How do you divide a strip into equal fifths? *At Right Angles*. 2012. Vol. 1. № 1. Pp. 25–28.

47. Wantzel P. M. L. Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas. *Journal de Mathématiques Pures et Appliqu´ees*. 1837. Vol. 1. № 2. Pp. 366–372.

48. Hisashi Abe, described in British Origami. 1984. Vol. 108. P. 9.

49. Jacques Justin, described in British Origami. 1984. Vol. 107. Pp. 14–15.

50. Wang F. T., Hsiung C. C. A Theorem on the Tangram. *The American Mathematical Monthly*. 1942. Vol. 49. № 9. Pp. 596–599.

51. Lucatero C. R. The Moser's formula for the division of the circle by chords problem revisited. URL: https://arxiv.org/abs/1701.08155v1 (дата звернення: 02.03.2021).

52. *Квантик*. 2016. № 5. 4-та стор. обкл. URL: https://kvantik.com/issue/pdf/2016-05.pdf (дата звернення: 02.03.2021).

53. Northrop E. P. Riddles in Mathematics : a book of paradoxes. New York : D. Van Nostrand Company, 1944. 262 p.

## СПИСОК ІЛЮСТРАЦІЙ

| | | | |
|---|---|---|---|
| 56 | 15 (б) | Міст Леонардо да Вінчі (Результат) | Катерина Антошина |
| 58 | 16 | Ребус «Тапір» | Сергій Веденський |
| 58 | 17 | Ребус «Увага» | Сергій Веденський |
| 58 | 18 | Ребус «Магазин» | Сергій Веденський |
| 59 | 19 | Ребус «Задача» | Сергій Веденський |
| 59 | 20 | Ребус «Нагляд» | Сергій Веденський |
| 59 | 21 | Ребус «Неаполь» | Сергій Веденський |
| 59 | 22 | Ребус «Читання» | Сергій Веденський |
| 77 | 23 | Скитала | Катерина Антошина |
| 85 | 24 | Якщо простежити за фіксованим вектором на монеті, то видно, що монета прокрутиться два рази | Катерина Антошина |
| 102 | 25 | Головоломка «M-heart-8 sequence» | Катерина Антошина |
| 106 | 26 | Ділення відрізка навпіл | Катерина Антошина |
| 107 | 27 | Ілюстрація парадокса «Ахілл і черепаха» | Катерина Антошина |
| 108 | 28 | Ілюстрація парадокса «Стадіон» | Катерина Антошина |
| 113 | 29 | Ілюзія. Паралелограм Зандера | Катерина Антошина |
| 113 | 30 | Вертикальна лінія здається довшою за горизонтальну | Сергій Веденський |
| 114 | 31 | Неможливі фігури | Катерина Антошина |
| 115 | 32 (а) | Картина «Бельведер» та її схема. М. Ешер. «Бельведер» | https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%B0%D0%B9%D0%BB:Belvedere_Escher.jpg |
| 115 | 32 (б) | Картина «Бельведер» та її схема. Пояснення ілюзії | Катерина Антошина |
| 115 | 33 (а) | Картини з неможливими елементами. Сандро дель Пре. «Hommage a Leonardo da Vinci» | https://spiritueleteksten.be/wp-content/uploads/2018/08/Zelfportret-Leonardo-da-Vinci-optische-illusie-Don-Quichot-door-Sandro-del-Prete.jpg |
| 115 | 33 (б) | Картини з неможливими елементами. А. Фоменко. Ілюстрація до книги «Курс гомотопической топологии» | https://i.stack.imgur.com/l6yG6.jpg |
| 144 | 34 | Розв'язання задачі Пуассона методом «більярду» | Катерина Антошина |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 147 | 35 | Підхід до розв'язання судоку | Сергій Веденський |
| 148 | 36 | Підхід до розв'язання судоку | Сергій Веденський |
| 148 | 37 | Підхід до розв'язання судоку | Сергій Веденський |
| 149 | 38 | Крок 1 | Сергій Веденський |
| 149 | 39 | Крок 2 | Сергій Веденський |
| 149 | 40 | Крок 3 | Сергій Веденський |
| 150 | 41 | Крок 4 | Сергій Веденський |
| 150 | 42 | Крок 5 | Сергій Веденський |
| 150 | 43 | Крок 6 | Сергій Веденський |
| 151 | 44 | Класичне судоку | Сергій Веденський |
| 151 | 45 | Нестандартні судоку | Сергій Веденський |
| 152 | 46 | «Х-судоку» та гіперсудоку | Сергій Веденський |
| 153 | 47 | Судоку незвичної форми | Сергій Веденський |
| 153 | 48 | Комбіновані судоку | Сергій Веденський |
| 167 | 49 | Фігура, яку можна намалювати, не відриваючи олівця від паперу й не проводячи поверх уже намальованого | Катерина Антошина |
| 167 | 50 | Умовна схема розташування мостів Кенігсберга та її інтерпретація мовою графів | Катерина Антошина |
| 168 | 51 | Фігури з позначеними точками перетину | Катерина Антошина |
| 169 | 52 | Заплутана фігура для задачі про обхід | Катерина Антошина |
| 171 | 53 | Повний граф на шести вершинах як модель для задачі Рамсея | Катерина Антошина |
| 171 | 54 | За принципом Діріхле має бути три червоні суміжні ребра | Катерина Антошина |
| 171 | 55 | З'являється червоний трикутник | Катерина Антошина |
| 172 | 56 | Якщо ребра не червоні, то вони сині. Маємо синій трикутник | Катерина Антошина |
| 179 | 57 | Поділ круга хордами на частини | Катерина Антошина |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 179 | 58 | Проведено всі можливі хорди між 6 точками на колі, круг ділиться на 31 частину | Катерина Антошина |
| 183 | 59 | Парадокс Монті Голла. Чи варто змінювати вибір? | Катерина Антошина |
| 185 | 60 | Реальний інтервал руху збігається із середнім інтервалом | Катерина Антошина |
| 185 | 61 | Реальний інтервал руху не збігається із середнім інтервалом | Катерина Антошина |
| 186 | 62 | Парадокс Арістотеля | Катерина Антошина |
| 187 | 63 | «Зникнення клітинки» | https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/5/5e/Missing_square_puzzle.svg/300px-Missing_square_puzzle.svg.png |
| 188 | 64 | Кути $GCD$ і $ADC$ рівні | Катерина Антошина |
| 189 | 65 | Паралелограм за двома кутами й сторонами | Катерина Антошина |
| 189 | 66 | Для такого чотирикутника міркування не підходять | Катерина Антошина |
| 190 | 67 | $\pi$ дорівнює 2 | Катерина Антошина |
| 192 | 68 | Парадокс Льюїса Керрола | Катерина Антошина |
| 194 | 69 | Варіанти відповіді на задачу про кошеня | Катерина Антошина |
| 195 | 70 | Кошеня сидить на драбині. Кошеня описує чверть кола | Катерина Антошина |
| 196 | 71 | Теорема Коперника | Сергій Веденський |
| 197 | 72 | Геометричне розв’язання задачі | Сергій Веденський |
| 198 | 73 | Головоломка «Square in the Bag» і її розв’язок | https://youtu.be/r3RHvG-vgEc |
| 199 | 74 | Розгортка для розв’язання задачі | Сергій Веденський |
| 200 | 75 | Схематична модель задачі про горизонт | Сергій Веденський |
| 204 | 76 | Приклад задачі сангаку | Сергій Веденський |
| 207 | 77 | Німецький релікварій з музею Ханенків | Фото Катерина Терлецька |
| 214 | 78 | Геометрична інтерпретація теореми Піфагора | Катерина Терлецька |
| 214 | 79 | Пазл «Теорема Піфагора» | Катерина Терлецька |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 215 | 80 | Зображення пазла, що доводить теорему Піфагора (доведення 1) | Катерина Терлецька |
| 215 | 81 | Зображення пазла, що доводить теорему Піфагора (доведення 2) | Катерина Терлецька |
| 216 | 82 | Зображення пазла, що доводить теорему Піфагора (доведення 3) | Катерина Терлецька |
| 218 | 83 | Танграм | Катерина Антошина |
| 219 | 84 | Фігури пентаміно | https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/6/69/Pentomino_Naming_Conventions.svg/425px-Pentomino_Naming_Conventions.svg.png |
| 219 | 85 | Один із варіантів складеного стомахіона | https://www.google.com/url?sa=i&url=https%3A%2F%2Fculturacientifica.com%2F2019%2F11%2F06%2Fel-puzzle-stomachion-y-el-palimpsesto-de-arquimedes-2%2F&psig=AOvVaw33WglgfHaY85F6thYzrWTM&ust=1669488022904000&source=images&cd=vfe&ved=0CAwQjRxqFwoTCJja2tP9yfsCFQAAAAAdAAAAABAE |
| 223 | 86 | Розв’язок задачі із сірниками | Сергій Веденський |
| 224 | 87 | Розв’язок геометричної задачі із сірниками | Сергій Веденський |
| 243 | 88 | Головоломка «Вушко голки» | Катерина Антошина |
| 244 | 89 | Покрокове розв’язання головоломки | Катерина Антошина |
| 245 | 90 | Фінальна стадія розв’язання головоломки | Катерина Антошина |
| 247 | 91 | Практичне заняття з розрізання фігур | Катерина Антошина |
| 248 | 92 | Результат неправильного з’єднання стрічок Мебіуса | Катерина Антошина |
| 248 | 93 | Схеми перев’язування двох коробок для демонстрації | Сергій Веденський |
| 249 | 94 | Два варіанти перетину стрічки | Сергій Веденський |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 283 | 113 | Кубики для складання послідовностей | Катерина Терлецька |
| 286 | 114 | Проведення гри «Хрестики-нулики» | Катерина Терлецька |
| 287 | 115 | Умовна схема гри «Трикутники» | Катерина Антошина |
| 289 | 116 | Картки для складання слів за темою «Географічні назви» (варіант 1) | Сергій Веденський |
| 290 | 117 | Картки для складання слів за темою «Географічні назви» (варіант 2) | Сергій Веденський |
| 291 | 118 | Картки для складання слів за темою «Географічні назви» (варіант 3) | Сергій Веденський |
| 291 | 119 | Картки для складання слів за темою «Географічні назви» (варіант 3) | Сергій Веденський |
| 292 | 120 | Картки для складання слів за темою «Географічні назви» (варіант 3) | Сергій Веденський |
| 293 | 121 | Картки для складання назв міст | Сергій Веденський |
| 293 | 122 | Картки для складання назв міст на 2–4 склади | Сергій Веденський |
| 294 | 123 | Картки для складання назв міст, що пишуться без дефіса | Сергій Веденський |
| 295 | 124 | Картки для складання назв країн, які закінчуються на -ія | Сергій Веденський |
| 298 | 125 | Фігури для складання квадратів | Сергій Веденський |
| 299 | 126 | Розгортки 20 кубиків для локації «Складання послідовностей» | Сергій Веденський |
| 300 | 127 | Схема для складання «неможливого трикутника» | https://images.birmiss.com/image/5cffd44c7ea60eda.jpg |
| 301 | 128 | Міжнародні сигнальні прапори | Сергій Веденський |
| 301 | 129 | Англійський алфавіт Морзе | Сергій Веденський |
| 302 | 130 | П’ятиклітинкове коно (корейські шахи) | https://letidor.ru/thumb/425x0/filters:quality(75)/imgs/2018/04/24/07/2133736/48c31ff69643bd93576b80a579f1c2b525cb6f1e.jpg |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 303 | 131 | Таблиці для математичного фокуса | Сергій Веденський |
| 304 | 132 | Приклад картки із шуканки. Відома задача Леонардо Пізанського про кролів | Катерина Терлецька |
| 305 | 133 | Приклад картки із шуканки | Катерина Терлецька |
| 306 | 134 | Приклад картки із шуканки | Катерина Терлецька |
| 307 | 135 | Приклад картки із шуканки | Катерина Терлецька |
| 308 | 136 | Приклад картки із шуканки | Катерина Терлецька |
| 309 | 137 | Приклад картки із шуканки | Катерина Терлецька |
| 310 | 138 | Головоломка «Невловимий шпигун» | Сергій Веденський |
| 311 | 139 | Перша дощечка, вид спереду і ззаду | Сергій Веденський |
| 311 | 140 | Друга дощечка, вид спереду і ззаду | Сергій Веденський |
| 312 | 141 | Третя дощечка, вид спереду і ззаду | Сергій Веденський |
| 312 | 142 | Четверта дощечка, вид спереду і ззаду | Сергій Веденський |
| 313 | 143 | Розв’язок головоломки «Невловимий шпигун» | Сергій Веденський |
| 313 | 144 | Розв’язок головоломки «Урятуйте королев!» | Сергій Веденський |
| 332 | 145 | Без підпису | Катерина Антошина |
| 333 | 146 | Без підпису | Катерина Антошина |
| 333 | 147 | Без підпису | Катерина Антошина |
| 334 | 148 | Без підпису | Катерина Антошина |
| 335 | 149 | Без підпису | Катерина Антошина |
| 335 | 150 | Без підпису | Катерина Антошина |
| 345 | 151 | Без підпису | Катерина Антошина |
| 345 | 152 | Розв’язок: гексагональне пакування | Катерина Терлецька |

Навчальне видання

# НАВЧАННЯ НА ОСНОВІ ГОЛОВОЛОМОК

Навчально-методичний посібник

Редагування*: І. В. Братащук,*
*З. В. Пономаренко, Т. І. Рябокінь*
Верстання *О. А. Жупанська*
Дизайн обкладинки *Б. Л. Лісовський*

Формат 60×84 1/16. Папір офс. 80 г/м$^2$.
Друк цифровий. Ум. друк. арк. 21,16.
Наклад 300 прим.

Видавництво: Національний центр «Мала академія наук України»,
Кловський узвіз, буд. 8, м. Київ, 01021

Свідоцтво суб’єкта видавничої справи:
ДК № 6999 від 04.12.2019