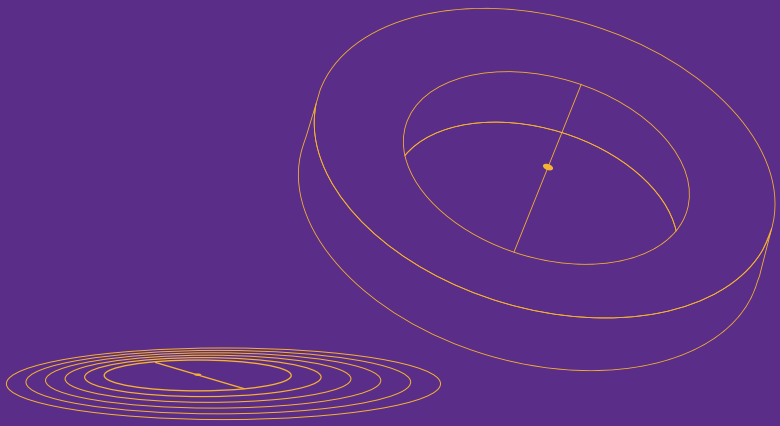
Міністерство освіти і науки України
Національна академія наук України
Національний центр
«Мала академія наук України»

INTERNATIONAL DAY OF MATHEMATICS MARCH 14

3;14 порад, як провести день числа π

Методичні вказівки



Київ
Національний центр
«Мала академія наук України»
2024

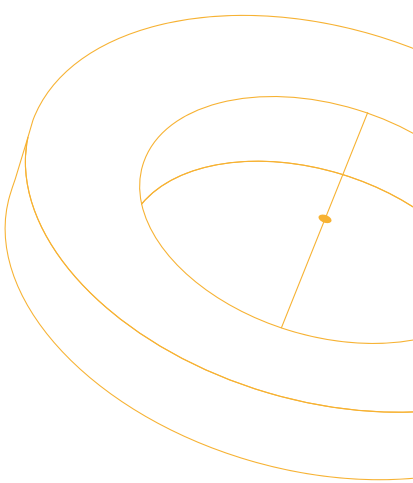
М.А.Н.

Міністерство освіти і науки України
Національна академія наук України
Національний центр «Мала академія наук України»

3;14 порад, як провести день числа π

Методичні вказівки

За редакцією
академіка НАН України
С. О. Довгого



Київ
Національний центр
«Мала академія наук України»
2024

УДК 37.01
Т67

Укладачка:

Терлецька Катерина Валеріївна – завідувачка лабораторії математичних наук Національного центру «Мала академія наук України», старша наукова співробітниця Інституту проблем математичних машин і систем Національної академії наук України, докторка фізико-математичних наук

Рекомендовано науково-методичною радою Національного центру «Мала академія наук України» (протокол № 1 від 05 лютого 2024 р.)

Т67 **3** і 14 порад, як провести день числа π : методичні вказівки / уклад. К. В. Терлецька ; за ред. С. О. Довгого. – Київ : Національний центр «Мала академія наук України», 2024. – 72 с.

Видання «3 і 14 порад, як провести день числа π» спрямоване на популяризацію математичної науки. У кожній пораді представлені рекомендації для педагогів щодо проведення різноманітних заходів під час святкування Міжнародного дня математики, які допоможуть зацікавити молодь вивченням математики. Кожна порада, починаючи від командної гри «Ханойська вежа» і закінчуючи обговоренням кліматичних змін чи порядків величин у питаннях про Землю та людство, спрямована на активне вивчення та застосування математичних принципів і передбачає цікаві та доступні форми роботи.

Методичні вказівки призначені для педагогічних працівників закладів позашкільної освіти, зокрема системи Малої академії наук України, а також усіх, хто цікавиться питаннями позашкільної освіти.

УДК 37.01

© Терлецька К. В., укладання, 2024
© Національний центр
«Мала академія наук України», 2024

Зміст

Передмова 4

Пояснювальна записка 6

Порада 1. Провести командну гру «Ханойська вежа» 8

Порада 2. Провести експеримент «Голки Бюффона» 13

Порада 3. Здійснити «Математичні пошуки скарбів» 16

Порада 4. Станцювати «Хаотичні танці» 22

Порада 5. Провести заняття «Доведення без слів» 25

Порада 6. Розповісти про парадокс із днями народження 30

Порада 7. Розгадати парадокс «Зникнення клітинки» 33

Порада 8. Розв'язати математичні ребуси 35

Порада 9. Пограти в гру «Математична переправа» 38

Порада 10. Утворити різні кути за допомогою мотузок 41

Порада 11. Продемонструвати фокус «Магічні таблиці» 43

Порада 12. Розв'язати криптарифми 46

Порада 13. Пограти в гру «Хрестики-нулики» 48

Порада 14. Провести гру «Вгадай 2/3 від середнього» 50

Порада 15. Провести шоу «Домовмося!» 52

Порада 16. Поміркувати про кліматичні зміни з математичної точки зору 55

Порада 17. Поміркувати про порядки величин у питаннях про Землю та людство 60

Список ілюстрацій 64

Список використаних джерел 68

Передмова

Шановні любителі математики!

У 1987 році відомий популяризатор науки фізик Ларрі Шоу (Лоуренс Н. Шоу) запропонував святкувати 14 березня день числа π. Відтоді в науковому музеї «Експлораторіум» (Сан-Франциско, Каліфорнія), де працював Ларрі Шоу, щороку відбувалось математичне свято, популярність якого поступово вийшла далеко за межі штату. Для поціновувачів математики свято розпочинається о 1:59 ночі, що разом із датою складає перші шість знаків числа π (3,14159...).

У листопаді 2019 року на 40-й Генеральній конференції ЮНЕСКО було проголошено Міжнародний день математики (резолюція 40C/30). Ініціатори цієї події – Міжнародний математичний союз і Міжнародна програма з фундаментальних наук ЮНЕСКО (МПФН) – запропонували відзначати Міжнародний день математики 14 березня – день числа π. Окрім того, цей день є також і днем народження Альберта Айнштайна, днем смерті Стівена Хокінга, що надає йому додаткового символізму серед математиків і фізиків.

Окрім Міжнародного дня математики – дня числа π, – із 2007 року математична спільнота відзначає також Всесвітній день математики. Його організатор – постачальник освітніх ресурсів 3P Learning за підтримки ЮНІСЕФ як глобального благодійного партнера. Компанія 3P Learning організовує онлайновий конкурс із математики, що останнім часом набув великої популярності. Кожного року 3P Learning визначає дату проведення заходу.

Як організувати свято?

Найкращий спосіб – провести захід, до якого можна залучити всіх охочих. Заплануйте зустріч у бібліотеці, інституті чи музеї. Запросіть педагогів із закладів загальної середньої і позашкільної освіти, викладачів університету, дослідників. Організуйте математичні вікторини та змагання на знання цифр у числі π, влаштуйте математичні ігри, конкурси. На завершення пригостіть учасників π-цами.

Обов'язково анонсуйте свій захід і повідомте про його результати в соціальних мережах, додайте хештег Міжнародного дня математики #idm314.

Команда Малої академії наук України разом із партнерами підготувала опис активностей для проведення дня числа π, де також використано ідеї відзначення Міжнародного дня математики: https://www.idm314.org/.

Організатори можуть перетворити захід на справжнє свято з оригінальними нестандартними рішеннями і цікавими експериментами. А всі охочі можуть доєднатися до активностей Малої академії наук України, інформацію про які знайдете на нашому сайті: https://man.gov.ua/

Станіслав Довгий,
президент Малої академії наук України,
академік НАН України, академік НАПН України,
доктор фізико-математичних наук,
професор

Пояснювальна записка

Усе у Всесвіті підкорюється математичним закономірностям. І хоча математику часто вважають абстрактною наукою, вона має фундаментальне значення для розуміння того, як влаштований світ. Пандемія COVID-19 привернула увагу суспільства до математичного моделювання. На математику покладаються не лише для прогнозування епідемій, а й для розуміння різних соціальних проблем. Математика дає змогу вдосконалювати прогнозування погоди, що має вирішальне значення для сільського господарства, рибальства тощо. Завдяки сучасним математичним підходам можна розрахувати траєкторію циклону, отримавши час на прийняття рішення, що допоможе запобігти економічним втратам. Під час війни математика, що лежить в основі цифрових технологій, фізичних процесів, матеріалознавства, відіграє значну роль у підготовці кадрів як ключового ресурсу у війні. Тому дуже важливо залучати до математичної освіти учнів і вихованців закладів загальної середньої і позашкільної освіти, створити умови для усвідомлення ними значення математики для прогнозування й розв'язання проблем, що виникають у різних сферах суспільного життя. Забезпечення пізнавальних потреб і запитів учнів, виявлення їхнього потенціалу, надання додаткових знань і формування навичок їх використання в освітній діяльності та повсякденному житті здійснюються в процесі освітньої діяльності в гуртках, секціях, що діють у Малій академії наук України. Саме тому з'являється можливість брати активну участь у Міжнародному дні математики.

Видання «3 і 14 порад, як провести день числа π» спрямоване на ознайомлення із захопливими фактами про математику та має на меті популяризацію цієї науки. У кожній пораді представлені рекомендації щодо проведення активностей під час математичних заходів, які допоможуть зацікавити молодь ви-

вченням математики. Кожна порада, починаючи від командної гри «Ханойська вежа» і закінчуючи обговоренням кліматичних змін чи порядків величин у питаннях про Землю та людство, спрямована на активне вивчення та застосування математичних принципів і передбачає цікаві та доступні форми роботи для широкого кола читачів.

Виконання завдань забезпечить формування в учасників заходів таких компетентностей, як: пізнавальна – усвідомлення значення математики для пошуку та висунення нових ідей, створення математичних моделей об'єктів, явищ, процесів і розвитку економічного й технологічного потенціалу; практична – уміння користуватися методами аналізу і синтезу, що базуються на теоретичних міркуваннях, узагальнення отриманих результатів, продукування висновків; застосування навичок використовувати набуті математичні знання для розв'язування задач; творча – здійснення творчого підходу до розв'язання задач із відкритими умовами (пошук власного підходу до проблеми, контрінтуїтивного рішення); соціальна – виконання спільної командної роботи (уміння будувати стосунки, висловлювати й аргументувати власні думки чітко); володіння такими якостями, як: наполегливість у розв'язуванні складних задач, готовність ділитися ідеями для досягнення мети та реалізації завдань спільної діяльності.

У виданні наведено 17 різноманітних активностей. Деякі з них потребують попередньої підготовки, а також матеріалів для виготовлення предметів. Деякі можна провести в невеликому за розміром приміщенні, а деякі – у великій залі. Заходами під час проведення дня математики також можуть бути інтерактивні лекції, лекції-візуалізації, дискусії, практичні заняття з розв'язанням задач, командні змагання.

ПОРАДА 1.
Провести командну гру «Ханойська вежа»

Джерело
Ханойська вежа та вежа Стокмайера. URL: https://static.idm314.org/resources/activities/idm-tower-of-hanoi-uk.pdf (дата звернення: 01.02.2024).

Короткий опис

Математична головоломка про перенесення вежі, зробленої з дисків різного розміру, з одного місця на інше. Пропонується ознайомитися з різноманітними варіантами її розв'язання.

Мета

Навчати учнів працювати в команді, щоб вибудовувати спільну стратегію гри.

Тривалість

Від 30 хвилин (залежить від кількості команд).

Підготовка

Гру «Ханойська вежа» можна створити самостійно. Для цього потрібні диски (з отвором чи без отвору), які можна зробити у будь-який зручний спосіб, наприклад склеїти кілька картонних кіл разом. Стрижні робити не обов'язково. Альтернативою є використання монет різного розміру.

Учасники

Вік учасників від 6 років. Гра проводиться в групах по 2–3 особи, щоб гравці обговорювали стратегію.

Примітка

Ця гра також підходить для людей із вадами зору.

Правила

Є N дисків різних розмірів і три стрижні (або положення). Число N може бути будь-яким, наприклад 5, як на рис. 1. На початку гри всі диски нанизуються на один стрижень з урахуванням спадання розмірів: найбільший диск розташований знизу. Єдиний дозволений рух – це переміщення верхнього диска з одного стрижня на інший із дотриманням обмеження, що жоден диск не може бути покладений на диск меншого розміру. Завдання – перемістити вежу з лівого стрижня на правий.

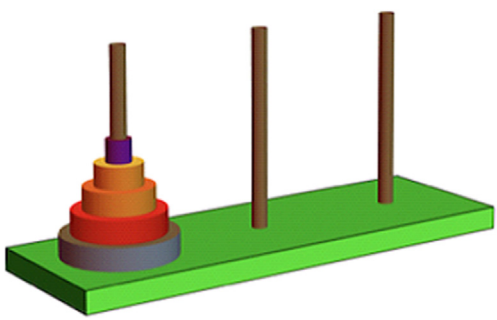


Рис. 1.
Гра «Ханойська вежа»

Перебіг гри

Команди виконують завдання ведучого. Виграє та команда, яка розв'яже задачу найшвидше.

Можливі завдання і умови

Раунд 1

Почніть із трьох дисків і перемістіть усі диски з лівого стрижня на правий за найменшу кількість ходів. Команда, яка першою правильно називає найменшу кількість ходів і може це продемонструвати, виграє.

Раунд 2
Повторіть те саме з чотирма дисками. Перемістіть усі диски з лівого стрижня на правий. Команда, яка першою правильно називає найменшу кількість ходів і може це продемонструвати, виграє.

Раунд 3
Повторіть те саме з п'ятьма дисками: перемістіть їх із лівого стрижня на правий. Команда, яка першою правильно визначає найменшу кількість ходів і може це продемонструвати, виграє.

Завдання підвищеної складності (розраховані на учасників, які поглиблено вивчають математику й мають знання з абстрактної алгебри).

Чи можете ви вгадати найменшу кількість ходів для N дисків?

Підказка:

нехай a_N – це найменша кількість ходів для N дисків.
Обчисліть a_N як функцію від a_{N-1}.

Ускладнення гри «Ханойська вежа»

Для класів із поглибленим вивченням математики ми пропонуємо ввести в гру додаткове обмеження: диск завжди потрібно переміщати тільки на сусідній.

Можливі завдання і умови

Раунд 4
Перемістіть три диски з крайнього лівого стрижня на крайній правий. Команда, яка першою правильно визначає найменшу кількість ходів і може це продемонструвати, виграє.

Раунд 5
Повторіть те саме з чотирма дисками: перемістіть усі диски з крайнього лівого стрижня на крайній правий. Команда, яка першою правильно визначає найменшу кількість ходів і може це продемонструвати, виграє.

Обговорення результатів
Після серії ігор буде корисним провести обговорення результатів. Попросіть гравців пояснити загальну послідовність і висловити думки щодо пошуку закономірності (формули).

Гра «Циклічна Ханойська вежа»

Тепер спробуйте зіграти в гру, коли стрижні знаходяться у вершинах трикутника і диск можна переміщати лише на наступний за годинниковою стрілкою стрижень. Нехай *A*, *B* і *C* – три стрижні, що розташовані за годинниковою стрілкою.

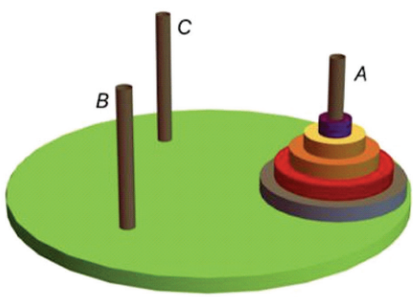


Рис. 2.
Гра «Циклічна Ханойська вежа»

Можливі завдання і умови

Раунд 6
Зіграйте в гру з трьома дисками та перемістіть усі диски з *A* на *B*. Команда, яка першою правильно визначає найменшу кількість ходів і може це продемонструвати, виграє.

Раунд 7
Повторіть те саме з чотирма дисками та перемістіть усі диски з *A* на *B*. Команда, яка першою правильно визначає найменшу кількість ходів і може це продемонструвати, виграє.

Раунд 8
Зіграйте в гру з трьома дисками та перемістіть усі диски з *A* на *C*. Команда, яка першою правильно визначає найменшу кількість ходів і може це продемонструвати, виграє.

Раунд 9
Повторіть те саме з чотирма дисками та перемістіть усі диски з *A* на *C*. Команда, яка першою правильно визначає найменшу кількість ходів і може це продемонструвати, виграє.

Після гри
Корисно обговорити різні стратегії, якими користувалися команди. Під час обговорення можна запропонувати учасникам вигадати нові правила. Наприклад, збільшення кількості стрижнів зменшує найменшу кількість ходів для N дисків. Більше інформації про цю гру можна знайти в [14].

Також можна разом переглянути відео *Ейлін Макдональд* для проєкту *Numberphile*, у якому вона демонструє гру в «Ханойську вежу» (включаючи картонну версію без паличок) і розповідає про те, що, коли під час цієї гри починає звучати музика, визначаються цікаві закономірності та з'являються ідеї.

Створюйте та діліться з іншими!

Зніміть відео того, як хтось дуже швидко грає в «Ханойську вежу». Ви можете навіть прискорити відео.

А чи зможете ви придумати нові правила гри?

ПОРАДА 2.
Провести експеримент «Голки Бюффона»

Короткий опис

Дивовижний спосіб отримати наближення числа π, підкидаючи палички, а потім рахуючи ті, які впали за певним правилом. Експеримент ґрунтується на математичній задачі XVIII століття.

Джерело

Голки Бюффона. URL: https://static.idm314.org/resources/activities/idm-buffo-needles-uk.pdf (дата звернення: 01.02.2024).

Мета

Знайти наближене значення числа π з використанням теорії ймовірностей.

Тривалість

45 хвилин.

Підготовка

Потрібна велика кількість паличок (від 200 штук, це також можуть бути голки, зубочистки, сірники, палички від ескімо, дерев'яні шпажки або інші види невеликих паличок однакової довжини) – «голок» – і «дошка» (можна використати великий аркуш паперу, наприклад обгорткового, чи намалювати крейдою прямокутник на підлозі).

Учасники

Вік учасників від 16 років, вони мають знання з теорії ймовірностей і вміють інтегрувати.

Експеримент

Формуються групи – «математичні лабораторії», у складі яких 2–3 учасники. Кожна лабораторія має набір «голок» і «дошку» для проведення експерименту. За результатами експерименту з використанням теорії ймовірностей знаходять наближене значення числа π.

Послідовність дій в експерименті

Крок 1
Намалюйте на дошці паралельні прямі, відстань між якими має бути вдвічі більшою за довжину палички.

Крок 2
Підкиньте палички в повітря так, щоб вони впали на дошку. Падіння голок має носити випадковий характер, для цього кидати їх вгору потрібно так, щоб вони падали майже вертикально на один зі своїх кінців.

Крок 3
Порахуйте кількість паличок, які перетинають паралельні прямі.

Крок 4
Поділіть кількість кинутих паличок на кількість паличок, які перетнули лінії. Результат має тим краще наближатися до числа π, чим більше паличок ви використаєте для експерименту. Також для отримання більш точного значення важливо підкидати палички вертикально (крок 2).

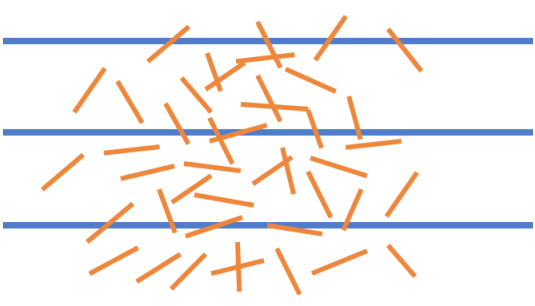


Рис. 3.
Експеримент
«Голки Бюффона»

Після проведення експерименту команди повідомляють про результати й обговорюють їх. Вихованцям надається інформація про «задачу з голками Бюффона», що названа на честь французького математика Жоржа-Луї Леклерка, графа де Бюффона, який вперше опублікував її у XVIII столітті.

Головна ідея полягає в доведенні, що ймовірність того, що одна голка перетне лінію, дорівнює 1/π. Ми можемо оцінити ймовірність події, повторивши експеримент багато разів і поділивши кількість успішних випадків на загальну кількість випадків. Успіх полягає в тому, щоб перетнути лінію, і це дає нам наближений результат. Чому в імовірності фігурує число π? Голка, що падає паралельно лініям на дошці, матиме нульову імовірність перетнути лінію, а та, яка падає ідеально перпендикулярно, матиме імовірність 0,5 перетнути лінію (максимум). Імовірність пов'язана з кутом повороту стрілки, і всі можливі кути описують повне коло.
Інше пояснення можна дати за допомогою інтегрування та інтуїтивного уявлення про імовірність (див. посилання 2, метод 1). Якщо учні мають не ґрунтовні знання про імовірність, можна пояснити за допомогою функцій щільності (див. посилання 1) або математичного очікування (див. посилання 2, метод 2).

Посилання:

1. 2. 3.

Можна також провести обговорення, поставити такі запитання:

- Що станеться, якщо між паралельними прямими буде різна відстань?
- Що буде, якщо використовувати палички іншого розміру або дошку з іншим візерунком? Наприклад, ви підкидаєте не голки, а рівносторонні трикутники над трикутною сіткою.

Створюйте та діліться з іншими!

Запишіть відео події з поясненнями, створіть нові завдання на тему геометричної ймовірності.

ПОРАДА 3.
Здійснити «Математичні пошуки скарбів»

Джерело
Математичні пошуки скарбів.
URL: https://static.idm314.org/resources/activities/idm-scavenger-hunt-uk.pdf (дата звернення: 01.02.2024).

Короткий опис

Гра, у якій невеликі команди шукають цікаві з математичної точки зору предмети за списком і фотографують їх. Ця активність про відкриття нового, творче мислення та погляд на звичайні речі з математичної точки зору.

Мета

Навчати учасників гри дивитися на звичайні речі з математичної точки зору.

Тривалість

Ми пропонуємо обмежити гру 45 хвилинами.

Гра не має закінчуватися, коли всі предмети знайдено, оскільки завжди є можливість використати щось нове для реалізації завдання. Можна провести гру ще раз, але зменшити час на реалізацію завдання.

Підготовка

1. Для початку визначте місце, де учасникам можна шукати предмети. Це може бути в межах території закладу, парку, міського кварталу, невеликого мікрорайону, історичного місця. Вона має бути такою, щоб групи учасників не лише могли робити дослідження незалежно одна від одної, але й стикалися, щоб відчувати, як всі грають разом. Також можна розробити варіант, який називається «Математична стежка», де учасники рухаються разом із гідом, дотримуючись визначеного шляху та шукаючи предмети на ньому. Стежка дає змогу грати в місцях,

куди зазвичай не можна потрапити самому (наприклад, у деяких приміщеннях закладу), зосередитися на математичних чи історичних ознаках, які раніше не помічали. Потрібно скласти список із 10 предметів, які слід знайти. Надаються ілюстровані картки з деякими прикладами (вони є в кінці поради), кілька порожніх карток, на яких пишуть нові завдання. Доповнювати списки можна назвами об'єктів, характерних для вашої місцевості чи окремих вікових груп. Предмети мають бути впізнаваними навіть без спеціальних математичних знань. Метою є не тільки пошук відповідей на запитання, а й спонукання дивитися на світ, що оточує нас, ураховуючи закони математики. Заздалегідь плануються способи формування команд, знаходження й фіксування предметів (фотографувати чи малювати). Умови мають бути однаковими для всіх команд. Після виконання завдань гри команди діляться враженнями про неї. Для цього визначається час і місце, де є великий екран для демонстрації того, як проходила гра.

Учасники

Грати можуть команди з 3–5 осіб віком від 12 років разом із дорослими, які можуть запропонувати допомогу молодшим учасникам.

Перебіг гри

1. Ведучий запрошує охочих стати учасниками гри й оголошує правила.
2. Ведучий формує команди.
3. Ведучий називає місце, де проводиться гра, час її початку й закінчення, місце зустрічі після гри.
4. Ведучий роздає картки із зображеннями предметів, які потрібно знайти.
5. Команди починають шукати предмети.
6. Після закінчення гри учасники збираються і діляться враженнями.
7. Фінальне селфі.

У цій грі команди шукають цікаві з математичної точки зору предмети у визначеному за списком місці й фотографують їх.

Ця активність про відкриття нового, розвиток творчого мислення, формування погляду на звичайні речі з математичної точки зору.
Щоб зафіксувати знайдений предмет зі списку, команда фотографує чи малює його та записує назву на зворотному боці картки, позначає цифрою чи наліпкою розташування на мапі ігрової зони. Дієва стратегія, яку можна запропонувати командам, це створення потрібного предмета замість того, щоб шукати його навмання. Заохочується нестандартний підхід і творча інтерпретація завдань. Після завершення пошуку всі групи діляться своїми знахідками. Якщо учасників небагато, вони можуть показати один одному те, що вони знайшли, на екранах своїх телефонів. Більші групи можуть роздрукувати фотографії та розмістити їх у визначеному місці, поділитися ними в соціальній мережі, завантажити у спільну галерею в онлайновому сервісі фотографій, показати на великому екрані. Можна залучити спеціалістів, які допоможуть більш швидко й якісно виконати такі завдання.

Після гри

У цій грі немає переможців, бо це спільна гра, метою якої є весело провести час і подивитися на речі з іншої точки зору, звертаючи увагу на їх особливості, які є частиною різних розділів математики. За активну участь можна нагородити значками або наліпками всіх учасників і зробити селфі.

Числа, які відображають щось інше
Наприклад, числа на годиннику позначають час

Найбільше число, яке ви можете знайти

Щось у природі з геометричною формою
Квітка, рослина, фрукт, овоч, камінь тощо

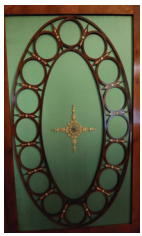
Геометрична конструкція
Будівля, скульптура, міст, арка, дверний отвір, вікно або інші зроблені людиною речі

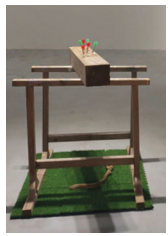
Витвір мистецтва з цікавими геометричними фігурами

Кількість речей занадто велика, щоб їх можна було порахувати

Річ, форма якої складається з плоских поверхонь і твердих країв без вигинів

Річ, форма якої складається лише з вигнутих поверхонь





Річ, що потребує дуже точних вимірювань або складних розрахунків для її створення

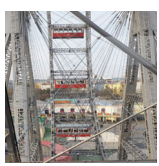
Кола всередині інших кіл

Стільки квадратів або прямокутників, скільки ви можете вмістити на одній картинці

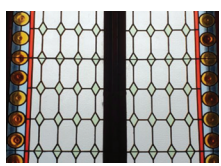
Многокутник із найбільшою кількістю сторін

Недосконала сфера

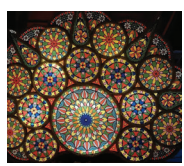
Приховані трикутники



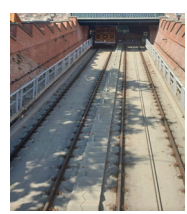
Дизайн, створений під час розміщення геометричних фігур, що знаходяться одна біля одної без проміжків



Речі або фігури, розташовані в барвистому і симетричному візерунку



Кілька речей, колір, розмір і форма яких повторюються за окремим шаблоном	Кілька схожих речей, розташованих випадково, без будь-якої закономірності	Кілька схожих речей, упорядкованих за розміром	Предмет, який був би дуже захопливим атракціоном, якби ви могли зменшитися в розмірах

Самоподібні структури	Щось, що містить елемент, схожий на параболу	Паралельні прямі	Поверхні другого порядку
			

ПОРАДА 4.
Станцювати «Хаотичні танці»

Короткий опис

Активність, що залучає велику групу учасників до танцю за дуже простими правилами. Учасники танцю поводяться подібно до детермінованих систем, які вивчає такий розділ математики, як теорія хаосу.

Джерело

Хаотичні танці. URL: https://static.idm314.org/resources/activities/idm-chaotic-dancing-uk.pdf (дата звернення: 01.02.2024). Ця активність була запропонована Дем'яном Гусом.

Мета

Ознайомити учасників гри з детермінованими хаотичними системами.

Тривалість

15–45 хвилин.

Підготовка

Заплануйте місце проведення. Це має бути доволі просторе місце (наприклад, у парку, спортзалі, дворі, залі тощо). Підготуйте аудіосистему, щоб усі могли чути енергійну музику, що змушує рухатися. На поверхні для танців можна зобразити трикутну сітку (крейдою чи малярним скотчем).

Учасники

10 або більше осіб, вік – від 10 років (поглиблені знання математики не обов'язкові).

Перебіг гри

Учасники збираються у визначеному місці, їх ознайомлюють із правилами:

• Учасник має таємно обрати двох інших людей (своїх партнерів) і запам'ятати їхні імена.

• Коли заграє музика, потрібно почати танцювати, рухаючися з двома партнерами так, щоб утворювати рівносторонній трикутник.
• Учасники мають підтримувати форму трикутника, коли позиції партнерів змінюються.
• Запропонуйте учасникам з'ясувати, до яких ще «трикутників» їх залучають.
• Танець закінчується після того, як музика припиняє грати. Танець можна повторити.

Після танцю

Розгляньте отриману схему й знайдіть рівносторонні трикутники у завершальному візерунку. Здогадайтеся, хто вибрав вас як частину свого трикутника. Ви також можете попросити кожного вказати на того, хто створював трикутник разом із вами.
Педагог надає стислу інформацію про детерміновані та хаотичні системи. У детермінованих системах поведінка всіх елементів заздалегідь визначена, тому в процесі немає випадковості (це означає, що, якби ми повторили експеримент з точно такими ж самими умовами, був би отриманий той самий результат). Хаотична система дуже чутлива до невеликих змін початкового стану, здається, що її поведінка непередбачувана (популярний «ефект метелика»). Цей тип систем вивчає розділ математики – теорія хаосу. Він використовується для аналізу багатьох систем, явищ, подій: погоди, клімату, фінансових систем, дорожнього руху та руху рідин.

Питання для обговорення

1. Що станеться, якщо двоє людей оберуть один одного партнерами в трикутнику, а третій – іншу людину?
2. Чи можна виконувати цю вправу з іншими фігурами (наприклад, відрізками чи чотирикутниками)?
3. Чи важко було залишатися вершиною вашого трикутника?
4. Як змінювався розмір вашого трикутника під час танцю?
5. Що станеться, якщо троє людей виберуть собі однакових партнерів для утворення трикутника?

Повторення танцю

Тепер учасники утворюють трикутники з інших початкових розташувань (учасники стоять, утворюючи коло, пряму лінію, дві паралельні прямі тощо). Якщо танець виконується в темряві, учасники можуть вказувати на своїх партнерів двома ліхтариками. Спробуйте повторити танець, вибираючи тих самих людей і починаючи з тієї самої позиції. Чи ви закінчите на тому ж самому місці?

Виконання колективного танцю

Учасники обирають ведучого, який стоїть у центрі. Як тільки починає звучати музика, усі мають дотримуватися таких правил:
• жоден танцюрист не може наближатися до інших танцюристів ближче ніж на 0,5 м (один довгий крок);
• жоден танцюрист не може відходити від групи далі ніж на 1 м (два довгі кроки);
• усі танцюристи мають рухатися в загальному напрямку групи.
Ведучий дає додаткове завдання: вибирає напрямок танцю, переміщається під час танцю. Він також може робити різкі зміни в будь-якому напрямку.
Виконуючи танець, учасники імітують алгоритм оптимізації, навіяний поведінкою зграї птахів (метод рою часток).
Ця програма-симулятор моделює зграю риб:

Створюйте та діліться з іншими!

Зафільмуйте танець (найкраще робити це з висоти). Створіть нові правила для різних хаотичних, колективних або інших математичних танців. Поділіться відео, плейлистами тощо з іншими, використовуючи хештег #idm314.

ПОРАДА 5.
Провести заняття «Доведення без слів»

Джерело
Доведення без слів. URL: https://static.idm314.org/resources/activities/idm-proofs-without-words-en.pdf?v=2 (дата звернення: 01.02.2024).

Короткий опис

Добірка математичних доведень, які можна зобразити за допомогою малюнків. Досліджуйте й обговорюйте їх, відкривайте для себе математику як універсальну мову.

Мета

Продемонструвати учасникам наочність геометричних задач і теорем.

Тривалість
45 хвилин.

Підготовка

Надрукувати візуалізації з рис. 4 до рис. 15 або показати їх зображення на екрані.

Учасники

Учні 8–9 класів, які мають володіти базовими знаннями з геометрії, тригонометрії та знанням прогресії.

Перебіг заняття

Педагог обирає кілька із запропонованих задач і візуалізацій та рекомендує їх учасникам для розв'язання.

Задача 1. Довести теорему Піфагора, використовуючи рисунки $a^2 + b^2 = c^2$.

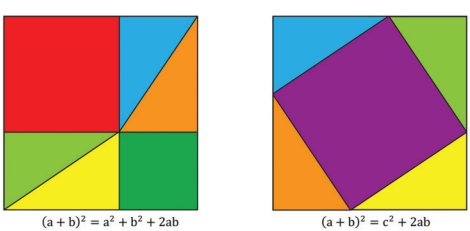


Рис. 4.
Візуалізація теореми Піфагора

Задача 2. Доведіть, що сума кутів трикутника дорівнює 180 градусів.

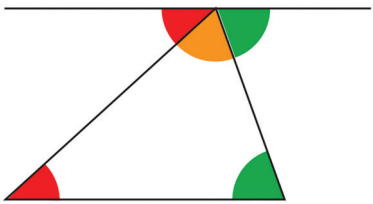


Рис. 5. Візуалізація доведення факту, що сума кутів трикутника становить 180 градусів

Задача 3. Доведіть формулу про знаходження площі кола $S = \pi r^2$.

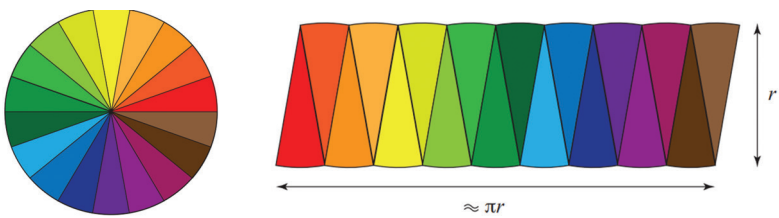


Рис. 6. Візуалізація доведення формули про знаходження площі кола $S = \pi r^2$

Задача 4. Доведіть теорему Вівіані:
у трикутнику сума відстаней від довільної точки всередині правильного трикутника до його сторін є сталою і дорівнює висоті трикутника $d_1 + d_2 + d_3 = h$.

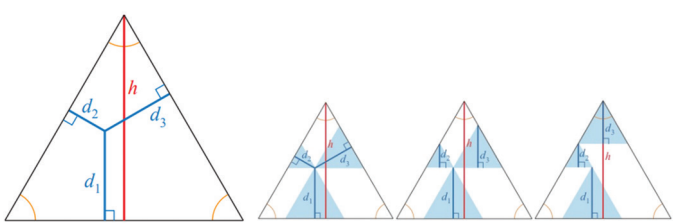


Рис. 7. Доведення теореми Вівіані

Задача 5. Доведіть тотожність: $A = \frac{1}{2}r(a+b+c)$.

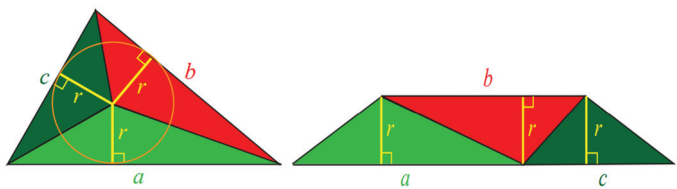


Рис. 8. Доведення тотожності: $A = \frac{1}{2}r(a+b+c)$

Задача 6. Доведіть тотожність: $arctan\frac{1}{2} + arctan\frac{1}{3} = arctan1$.

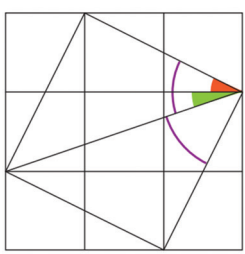


Рис. 9. Доведення тотожності:
$arctan\frac{1}{2} + arctan\frac{1}{3} = arctan1$

Задача 7. Доведіть тотожність: $1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2$.

Рис. 10. Доведення тотожності: $1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2$

Задача 8. Доведіть тотожність: $1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.

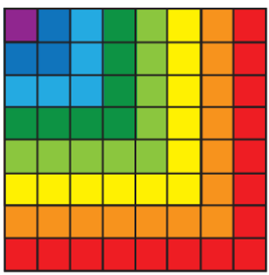


Рис. 11. Доведення тотожності:
$1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2$

Задача 9. Доведіть тотожність:
$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}\big(n \times (n + 1)\big)^2$.

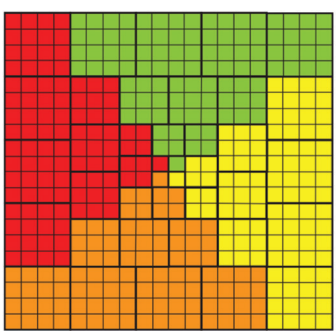


Рис. 12. Доведення тотожності:
$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}\big(n \times (n + 1)\big)^2$

Задача 10. Доведіть тотожність: $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$

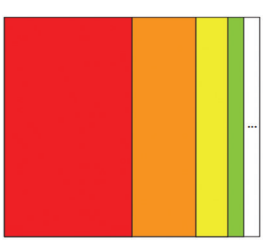


Рис. 13. Доведення тотожності:
$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$

Задача 11. Доведіть тотожність: $\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\left(\frac{1}{4}\right)^4+\cdots$

Рис. 14. Доведення тотожності: $\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\left(\frac{1}{4}\right)^4+\cdots$

Задача 12. Доведіть тотожність:

$$\frac{1}{5}=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\times\frac{4}{9}+\frac{1}{9}\times\left(\frac{4}{9}\right)^2+\frac{1}{9}\times\left(\frac{4}{9}\right)^3+\cdots$$

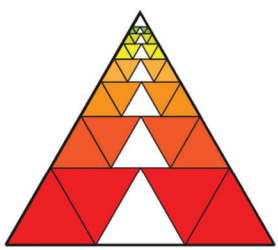


Рис. 15. Доведення тотожності: $\frac{1}{5}=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\times\frac{4}{9}+\frac{1}{9}\times\left(\frac{4}{9}\right)^2+\frac{1}{9}\times\left(\frac{4}{9}\right)^3+\cdots$

ПОРАДА 6.
Розповісти про парадокс із днями народження

Джерело
Mises Von R. Über Aufteilungs- und Besetzungswahrscheinlichkeiten. *Revue de la faculté des sciences de l'Université d'Istanbul.* 1939. № 4. Pp. 145–163.
Уперше цей парадокс був розглянутий Ріхардом Мізесом у 1939 році.

Короткий опис

Побийтеся об заклад про те, що серед 24 осіб принаймні у двох збігаються дні народження. Чи маєте шанс виграти? Відповідь буде контрінтуїтивною! Математичні розрахунки приводять нас до цікавих висновків. Відкривайте для вихованців логічне мислення як навичку, що стане в пригоді в їхньому житті.

Тривалість

20 хвилин.

Мета

Продемонструвати учням контрінтуїтивний математичний факт і пояснити його.

Учасники

Учні 10–11 класів, які володіють базовими знаннями з теорії ймовірності.

Перебіг заняття

Педагог формулює завдання: «*Припустімо, що в класі 24 учні. Яка ймовірність того, що як мінімум двоє з них святкують день народження в один день?*».
Педагог може запитати: чи ймовірність такого збігу подій велика чи мала? Як інтуїтивно слухачі могли б визначити таку ймовірність?
Можна запропонувати кілька варіантів відповіді, попросити проголосувати за ту відповідь, яка здається близькою до правильної.
А. Менш ніж 10 %.
Б. Понад 10 %, але менш ніж 30 %.

В. Понад 30 %, але менш ніж 50 %.
Г. Понад 50 % .
Потім педагог пропонує висловити міркування.
У році є 365 днів (для спрощення знехтуємо високосним роком), а учнів – 24.
Розрахуємо спочатку, яка ймовірність *p(n)* того, що з *n* осіб дні народження всіх будуть різними.
Насамперед порахуємо імовірність того, що дні народження двох не будуть збігатися. Зрозуміло, що тільки в одному випадку з 365 днів дні народження збігатимуться, тому ймовірність їх дорівнює (365 – 1)/365. Імовірність розбіжності дня народження третьої особи з першими двома становить 363/365, четвертої особи – 362/365 і так далі до двадцять четвертої, для якої відповідна імовірність дорівнює 342/365. Для того щоб тепер знайти імовірність того, що всі 24 дні народження не збігаються, треба перемножити ці ймовірності між собою, тобто:

$$\frac{364}{365}\times\frac{363}{365}\times\frac{362}{365}\times\frac{361}{365}\times\ldots\frac{341}{365}$$

Після розрахунків отримуємо 23/50.
Тоді ймовірність збігу дорівнюватиме: 1 – 23/50 = 27/50. Отже, правильною відповіддю на запитання буде неочікуваний варіант Г – імовірність такої події перевищує 50 %.
Такі знання дають вихованцям можливість укладати парі, визначаючи його ймовірність.
Якщо ми пропонуємо парі, що серед 24 осіб принаймні у двох будуть збігатися дні народження, то виграємо його у 27 випадках з 50 і програємо у 23 з 50. Педагог може запропонувати узагальнення – написати формулу для довільної кількості учнів у класі.
Наведемо такі міркування.
Для *n* людей формула для підрахунку ймовірності буде мати вигляд:

$$\overline{p}(n)=\frac{365!}{365^n(365-n)!}, p(n)=\overline{p}(n)-1$$

За такою формулою, що більша група людей, то більша ймовірність, що в когось співпадуть дні народження.

n	*p(n)*
10	12 %
20	41 %
30	70 %
40	89 %
50	97 %
60	99,4 %
100	99,99996 %

Так, у групі з 30 осіб імовірність такої події перевищує 70 %, у групі з 40 осіб – більше 89 %, у групі з 50 осіб – більше 97 %, а у групі з 60 осіб – майже дорівнює 100 %. Але не забувайте: якщо хтось народився 29 лютого, то це знижує імовірність збігу днів народження.

Калькулятор для розрахунку ймовірності співпадіння у двох і трьох учасників групи можна знайти тут:

ПОРАДА 7.
Розгадати парадокс «Зникнення клітинки»

Джерело
Навчання на основі головоломок : навч.-метод. посіб. / уклад.: К. В. Терлецька, К. О. Антошина ; за ред. С. О. Довгого. Київ : Національний центр «Мала академія наук України», 2024. 364 с.

Короткий опис

Розгадайте геометричний фокус, у якому зникає клітинка, якщо переставити частини трикутника.

Мета

Навчати учасників знаходити такі елементи в парадоксі, які ведуть до хибного висновку.

Тривалість
20 хвилин.

Учасники
Діти віком від 10 років.

Підготовка

Для демонстрації геометричного парадокса радимо заздалегідь зробити з картону складений із кольорових частин трикутник *(рис. 16)*.

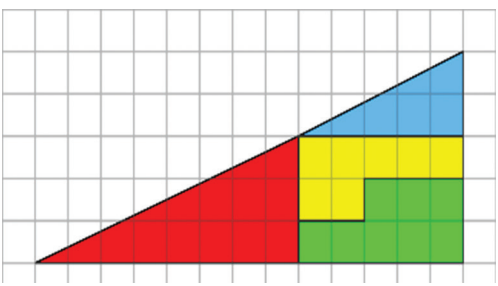


Рис. 16. Елементи фігури з парадокса «Зникнення клітинки»

Перебіг заняття

Педагог складає різноколірні частини трикутника так, як показано на рис. 16. Потім складає їх так, як на рис. 17. Складено той самий трикутник, але без однієї клітинки. Педагог ставить учасникам запитання про невідповідність трикутників.

Поясненням є помилкове сприйняття гіпотенузи як прямого відрізка. Варто звернути увагу на те, що тангенси менших кутів червоного і блакитного трикутників різні, що створює «вгин», а потім «вигин» псевдогіпотенузи великого трикутника. Така різниця і дає нам «зайвий» квадратик.

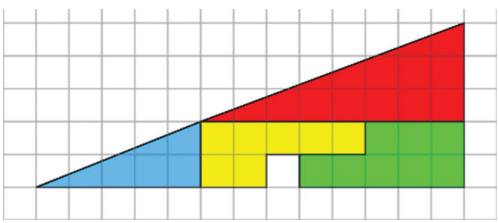


Рис. 17. Парадокс «Зникнення клітинки»

ПОРАДА 8.
Розв’язати математичні ребуси

Короткий опис

Розв’язування ребусів можна проводити як окрему активність або як доповнення до інших. Ребус – це загадка, в якій слово чи вислів зашифровано за допомогою різних малюнків. Розгадування ребусів сприяє розвитку кмітливості, швидкості мислення і викликає позитивні емоції. Щоб розгадати ребус, потрібно поміркувати над розташуванням елементів.

Джерело

З матеріалів про святкування Міжнародного дня числа π в МАН у 2021 році. Математичний онлайн-марафон МАН 2021.
URL: https://www.youtube.com/watch?v=aLPbeH7apBU (дата звернення: 01.02.2024).

Мета

Навчати учасників розв’язувати ребуси.

Тривалість

20 хвилин.

Підготовка

Надрукувати ребуси або показати їх зображення на екрані.

Перебіг заняття

Педагог пропонує учасникам розшифрувати різні ребуси на швидкість, а потім спробувати скласти свої ребуси, наприклад: зашифрувати імена і прізвища своїх однокласників, учителів та знайомих.

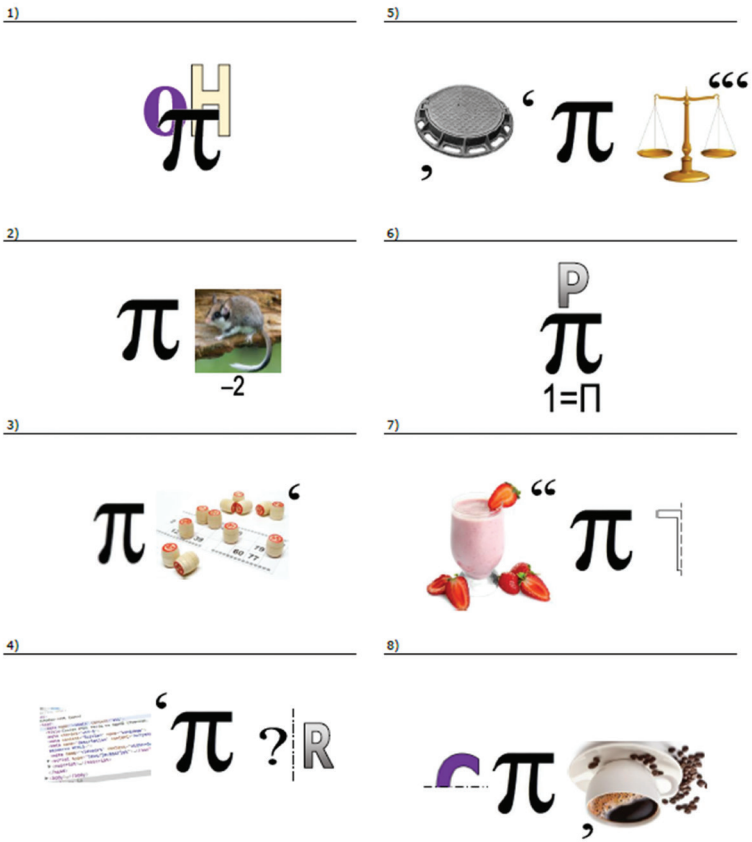


Рис. 18. Ребуси з використанням числа π (частина 1)

Відповіді:

1. Запізно. 2. Пісня. 3. Пілот. 4. Копія. 5. Юпітер. 6. Папір.
7. Шепіт. 8. Співак.

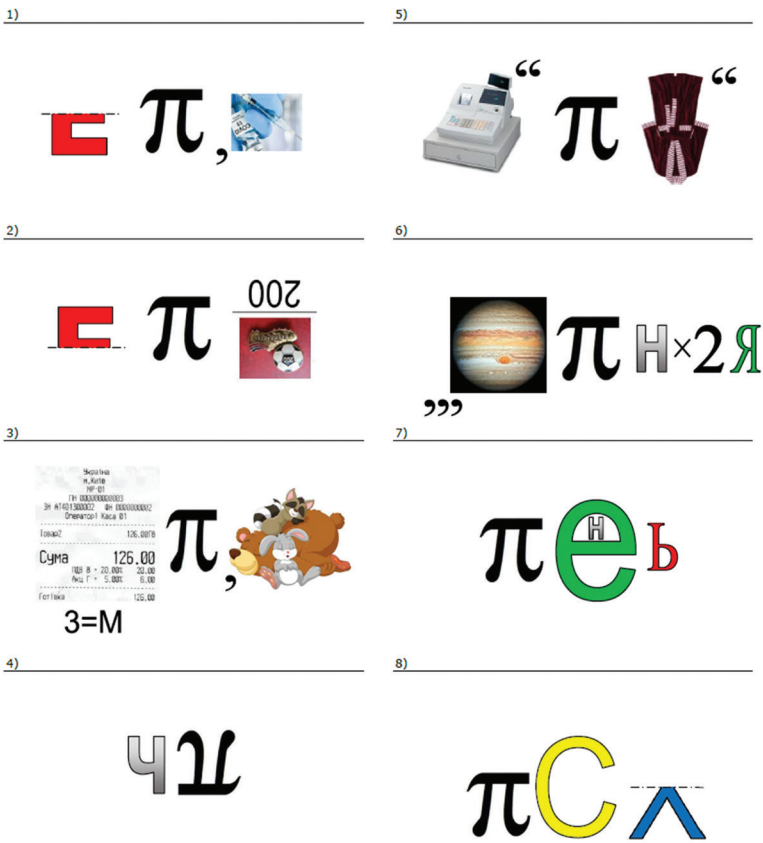


Рис. 19. Ребуси з використанням числа π (частина 2)

Відповіді:

1. Епізод. 2. Епілог. 3. Чемпіон. 4. Чіп. 5. Капітал. 6. Терпіння. 7. Півень. 8. Успіх.

ПОРАДА 9.
Пограти в гру «Математична переправа»

Джерело
Навчання на основі головоломок : навч.-метод. посіб. / уклад.: К. В. Терлецька, К. О. Антошина ; за ред. С. О. Довгого. Київ : Національний центр «Мала академія наук України», 2024. 364 с.

Короткий опис

Конкурс, у якому командам треба перебратися з одного «берега» на інший за визначеними правилами.

Мета

Навчати учасників працювати в команді, вибудовувати спільну стратегію гри.

Тривалість
20 хвилин.

Учасники
Діти віком від 12 років, об'єднані в групи по 5–6 осіб.

Підготовка

За допомогою малярного скотчу на підлозі розмічається «поле» із клітинок 6 × 6. У клітинках розміщуються картки з числами. Для команд із п'яти учасників кожна картки розкладаються так, як зображено на рис. 20.

9	8	9	7	9	6
6	7	9	5	6	7
8	3	5	8	8	5
4	7	2	3	6	2
3	1	4	1	5	1
1	2	3	4	2	4

Рис. 20. Поле для «математичної переправи» для команд із п'яти учасників

Для команд із шести учасників кожна картки розкладаються так, як зображено на рис. 21.

53	56	71	1	42	87
72	47	2	89	89	7
12	3	29	18	83	91
4	4	17	23	84	28
8	16	16	19	28	21
12	9	7	11	8	14

Рис. 21. Поле для «математичної переправи» для команд із шести учасників

Ведучий ознайомлює з правилами гри.
1. Команда гравців має по черзі перейти з одного боку поля на інший.
2. Правила проходження: крок можна робити на сусідню клітинку по вертикалі, горизонталі або діагоналі (варіант: у сусідню клітинку або через одну). Гравець збирає картки з числами, які є в клітинці. Числа мають складати послідовність (наприклад, перший гравець збирає числа в порядку зростання, другий – у порядку спадання, третій – лише ті, що діляться на три, тощо). Не можна ступати в клітинку без числа. Якщо учасник не може зробити хід, він залишає число у клітинці, де зупинився, і вибуває з гри.
3. Перемагає команда, в якій більша кількість учасників, що переправилися на протилежний «берег». Якщо є команди, які мають однакову кількість учасників, що переправилися, то виграє та, у якої лишилося найменше карток на полі.

Перебіг гри

Спершу нехай команди спробують пограти, щоби знайти і проаналізувати свою стратегію.

Для команди з п'яти осіб можуть бути такі правила: п'ятеро йдуть по черзі; починають знизу: перший хід у будь-яку клітинку перших двох нижніх рядів; потім крок на більше число, потім

на ще більше тощо. З будь-якої клітинки верхніх двох рядів можна зійти й закінчити гру. Картки з числами в клітинках, де пройшов учасник, забирають (надалі такі клітинки оминають). Якщо хтось не може дістатися кінця, він усе одно може ступати в клітинку, де картка з більшим числом, або вийти з будь-якої клітинки й закінчити гру.

Гра для шести учасників: один з учасників має зібрати числа за спаданням; другий – числа, кратні 4; третій – числа, кратні 7; четвертий – числа за зростанням; п'ятий – послідовність простих чисел; шостий – послідовність чисел, що мають у своєму записі цифру 8. Ходити можна лише на одну сусідню клітинку за одним із восьми напрямків.

ПОРАДА 10.
Утворити різні кути за допомогою мотузок

Джерело
Навчання на основі головоломок : навч.-метод. посіб. / уклад.: К. В. Терлецька, К. О. Антошина ; за ред. С. О. Довгого. Київ : Національний центр «Мала академія наук України», 2024. 364 с.

Короткий опис

Командний конкурс на відтворення різних кутів за допомогою мотузок. Учасники можуть пригадати, як це робили в Стародавньому Єгипті, придумати новий варіант гри.

Тривалість
20 хвилин.

Мета

Пригадати властивості геометричних фігур, співвідношень між сторонами і кутами.

Підготовка

Підготувати мотузки довжиною п’ять метрів для кожної з команд.

Учасники

Діти віком від 12 років, об’єднані в групи по 5–6 осіб. Команди мають перебувати на різних локаціях, щоб не заважати одна одній.

Перебіг конкурсу

Ведучий ознайомлює з правилами конкурсу: з мотузки треба скласти кути. Можна відміряти рівні частини мотузки (за допомогою, наприклад, ліктів, інших частин тіла, якихось предметів). Виграє команда, яка побудувала найбільшу кількість кутів за найменший час.

Завдання:
- побудувати кут 60°;
- побудувати кут 90°;
- побудувати кут 45°;
- побудувати кут 30°.

Після завершення конкурсу варто обговорити різні ідеї, які були реалізовані.

Ідеї: кут у 90° можна побудувати з «єгипетського трикутника» (сторони: 3, 4, 5 одиниць) *(рис. 22)* або спочатку побудувати правильний трикутник (отримати 60°), потім його медіану й отримати кути 90° і 30°. Для кута 45° треба побудувати квадрат.

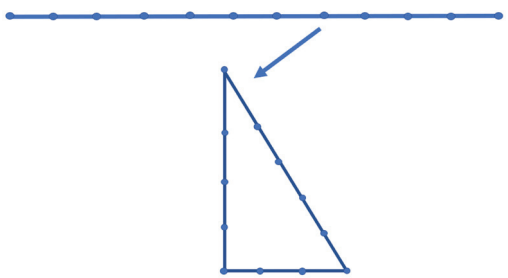


Рис. 22. Побудова єгипетського трикутника

Стаття про математику в Стародавньому Єгипті:

ПОРАДА 11.
Продемонструвати фокус «Магічні таблиці»

Джерело
Навчання на основі головоломок : навч.-метод. посіб. / уклад.: К. В. Терлецька, К. О. Антошина ; за ред. С. О. Довгого. Київ : Національний центр «Мала академія наук України», 2024. С. 208.

Короткий опис

Пропонується навчитися «читати думки» своїх друзів і вгадувати числа, які вони загадують. Для цього можна повторити тему «Представлення числа у двійковій системі числення».

Тривалість
20 хвилин.

Мета

Продемонструвати використання бінарної системи.

Учасники
Діти віком від 7 років.

Підготовка

Роздрукувати шість магічних таблиць *(рис. 23)*.

Перебіг гри

Ведучий пропонує учасникам задумати будь-яке чило від 1 до 60 і записати його на папері. Потім він просить одного з учасників вказати на ті таблиці, на яких цього числа немає. Наприкінці ведучий «заглядає в думки» гравця і називає його число. Цей фокус повторюють кілька разів. Розгадку не варто повідомляти відразу. Нехай учні спробують знайти закономірності того, як це відбувається.

Обговорення

Обговорити алгоритм знаходження задуманого числа. Секрет у тому, що для цього треба додавати числа, які розташовані в першому рядку першого стовпчика усіх таблиць, які не обрав гравець. Приклад для числа 23 зображено на рис. 24.

1	3	5	7	9
11	13	15	17	19
21	23	25	27	29
31	33	35	37	39
41	43	45	47	49
51	53	55	57	59

2	3	6	7	10
11	14	15	18	19
22	23	26	27	30
31	34	35	38	39
42	43	46	47	50
51	54	55	58	59

4	5	6	7	12
13	14	15	20	21
22	23	28	29	30
31	36	37	38	39
44	45	46	47	52
53	54	55	60	

8	9	10	11	12
13	14	15	24	25
26	27	28	29	30
31	40	41	42	43
44	45	46	47	56
57	58	59	60	

16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30
31	48	49	50	51
52	53	54	55	56
57	58	59	60	

32	33	34	35	36
37	38	39	40	41
42	43	44	45	46
47	48	49	50	51
52	53	54	55	56
57	58	59	60	

Рис. 23. Магічні таблиці

Якщо показувати таблиці послідовно, то відповіді учасника будуть, наприклад: «Так – Так – Так – Ні – Так – Ні». Їх можна перевести у код – 1 1 1 0 1 0. А це – запис числа у бінарній системі числення. Тобто розклад за степенями двійки.

$$23 = 1 \times 1 + 2 \times 1 + 4 \times 1 + 8 \times 0 + 16 \times 1 + 32 \times 0 =$$
$$= 2^0 \times 1 + 2^1 \times 1 + 2^2 \times 1 + 2^3 \times 0 + 2^4 \times 1 + 2^5 \times 0$$

Коли секрет розкрито, можна запропонувати самостійно створити магічні бінарні таблиці для будь-якого діапазону чисел. Для цього можна використовувати онлайн-калькулятор – він переводить числа в бінарну систему.

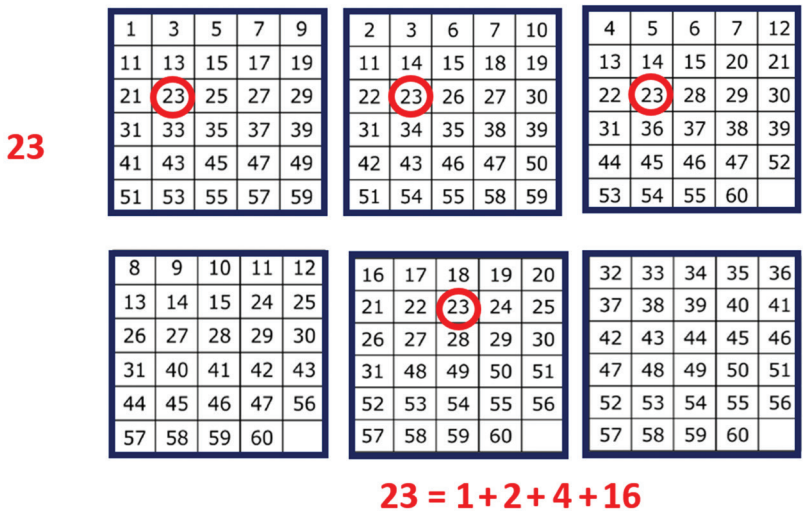


Рис. 24. Розгадка фокуса з магічними таблицями

Більше про магічні таблиці можна дізнатися тут:

ПОРАДА 12.
Розв’язати криптарифми

Джерело
Навчання на основі головоломок : навч.-метод. посіб. / уклад.: К. В. Терлецька, К. О. Антошина ; за ред. С. О. Довгого. Київ : Національний центр «Мала академія наук України», 2024. 364 с.

Короткий опис

Криптарифми – математичні головоломки, в яких із числами виконуються арифметичні дії, але цифри зашифровані літерами. За результатами розшифрування криптарифму учасники отримують фразу або слово.

Тривалість
45 хвилин.

Мета

Навчати учасників розв’язувати криптарифми.

Учасники

Діти віком від 12 років.

Підготовка

Не потрібна.

Перебіг заняття

Пропонується послідовно розв’язати дванадцять арифметичних прикладів, що приховані за літерами. Такі завдання потребують наполегливості й винахідливості.

Правила розв’язування криптарифмів:

- одна буква означає одну цифру;
- різні цифри зашифровані різними літерами;
- число не може починатися з нуля, це стосується крайніх букв ліворуч.

Розв'язуючи криптарифм, пам'ятаємо основні математичні правила множення на нуль, на одиницю, перенесення чисел у наступний розряд.

Завдання:

1. *КНИГА + КНИГА + КНИГА = НАУКА*
2. *КОКА + КОЛА = ВОДА*
3. *АТАКА + УДАР + УДАР = НОКАУТ*
4. *ДРАМА + ДРАМА = ТЕАТР*
5. *ВАГ0Н + ВАГ0Н = П0ТЯГ* (літера О = 0)
6. *ВВ + ВВ = АВС*
7. *SATURN + URANUS = PLANETS*
8. *BASE + BALL = GAMES*
9. *SEVEN + SEVEN + SIX = TWENTY*
10. *BLACK + GREEN = ORANGE*
11. *MAN + WOMAN = CH1LD*
12. *EAT + THAT = APPLE*

Відповіді:

1. 28 375 + 28 375 + 28 375 = 85 125
2. 3930 + 3980 = 7910
3. 93 989 + 7492 + 7492 = 108 973
4. 18 969 + 18 969 = 37 938
5. 35 206 + 35 206 = 70 412
6. 99 + 99 = 198
7. 546 790 + 794 075 = 1 340 865
8. 7483 + 7455 = 14 938
9. 68 782 + 68 782 + 650 = 138 214
10. 79 208 + 53 446 = 132 654
11. 586 + 39 586 = 40 172
12. 819 + 9219 = 10 038

ПОРАДА 13.
Пограти в гру «Хрестики-нулики»

Джерело
Навчання на основі головоломок : навч.-метод. посіб. / уклад.: К. В. Терлецька, К. О. Антошина ; за ред. С. О. Довгого. Київ : Національний центр «Мала академія наук України», 2024. 364 с.

Короткий опис

Активна гра-естафета у спортзалі або на свіжому повітрі, щоби порухатися й пограти в «хрестики-нулики», де треба бути швидким і виявити спритність.

Мета

Навчати учасників швидко ухвалювати рішення; розвивати логічне мислення, творчу активність; формувати вміння працювати в команді.

Тривалість
20 хвилин.

Учасники
Діти віком від 7 років, об'єднані в групи по 4–5 осіб.

Підготовка

Ця гра проводиться в спортивній залі або на ігровому майданчику. Має бути підготовлений набір шматків кольорової тканини для позначення хрестиків і нуликів. Поле для такої гри можна зробити або за допомогою скотчу, або за допомогою дев'яти обручів.

Перебіг гри

Учасники формують команди. Грають дві команди, потім наступна команда грає із переможцем. Під час гри учасники мають добігти до поля і кинути шматок тканини в одну з порожніх клітинок. Виграє та команда, яка першою утворить ряд із трьох шматків свого кольору.

Рис. 25. Проведення гри «Хрестики-нулики»

ПОРАДА 14.
Провести гру «Вгадай 2/3 від середнього»

Джерело
Ledoux A. Concours résultats complets. Les victimes se sont plu à jouer le 14 d'atout. *Jeux & Stratégie*. 1981. Vol. 2. № 10. Pp. 10–11.

Короткий опис

Гра для всіх охочих, яка демонструє різницю між абсолютно раціональною поведінкою і реальними діями гравців. Ця гра відома в теорії ігор.

Мета

Продемонструвати різницю між абсолютно раціональною поведінкою і реальними діями гравців.

Тривалість
10 хвилин.

Учасники
Діти віком від 10 років.

Підготовка

Підготувати аркуші паперу й олівці відповідно до кількості учасників, призи для переможців.

Перебіг гри

Ведучий інформує: «У 2005 році данська газета "Politiken" запропонувала своїм читачам гру "Вгадай 2/3 від середнього" із призом 5000 данських крон, на той час це було близько $800. Така гра є відомою в теорії ігор. Вона демонструє різницю між раціональною поведінкою і реальними діями гравців».
Далі він оголошує правила: виграє той, чиє число виявиться найближчим до 2/3 від середнього арифметичного загаданих усіма учасниками гри чисел. І пропонує кожному задумати

число від 0 до 100. Ведучий також бере участь у грі. Учасники пишуть задумані числа на аркушах паперу. Потім ведучий просить віддати аркуші і знаходить середнє арифметичне, а тоді – 2/3 від нього. Після цього отримане число озвучується.
Ведучий ставить учасникам запитання щодо їхніх міркувань під час вибору числа.
Отже, як мали думати учасники цієї гри? Уявімо собі, що всі вони діють повністю раціонально і, що не менш важливо, знають, що інші також діють раціонально і не змовляються між собою. Яке ж число буде оптимальним у такій ситуації?
Оскільки середнє арифметичне не може бути більше 100, то немає сенсу називати числа більші ніж 2/3 × 100 = 66,(6). Однак, якщо всі гравці міркують так само, усі числа будуть не більші ніж 66,(6). Отже, і середнє арифметичне не перевищить цього числа, тому не варто називати більше ніж 2/3 × 66,(6) = 44,(4). Повторюючи таке міркування нескінченно багато разів, дійдемо висновку, що єдиним правильним ходом буде число 0. Тож якщо всі гравці міркують раціонально, то всі вони виберуть число 0.
Чи хтось задумав число 0? Чи є раціональні гравці?
Однак у реальному житті ситуація відрізняється. Якщо гравець раціонально думає, він знає, що багато хто з його суперників не раціональні, а отже, йому доведеться враховувати, що їхні числа будуть більші за 0. На початку гри зазвичай залежно від аудиторії значення може змінюватися від 20 до 30.
Пропонуємо зіграти у гру кілька разів, коли вже всі знають стратегію раціонального гравця. Та чи вийде при цьому 0 у результаті?

Грайте кілька разів і діліться вашими результатами з іншими!

ПОРАДА 15.
Провести шоу «Домовмося!»

Джерело
Навчання на основі головоломок : навч.-метод. посіб. / уклад.: К. В. Терлецька, К. О. Антошина ; за ред. С. О. Довгого. Київ : Національний центр «Мала академія наук України», 2024. С. 183.

Короткий опис

Шоу, в якому кожен може виконати роль ведучого і запропонувати учаснику змінити вибір дверей, за якими може бути автомобіль. Така активність потребує застосування знань про теорію ймовірності.

Мета

Цікаво продемонструвати розв'язування задачі з теорії ймовірності.

Тривалість
20 хвилин.

Учасники

Діти віком від 10 років.

Підготовка

Підготувати три однакові коробки або шкатулки і цікавий предмет, який можна туди помістити.

Перебіг заняття

Ведучий ознайомлює з правилами гри, що відбулася на американському телевізійному шоу «Let's Make a Deal» і названа іменем його продюсера й першого ведучого Монті Голла. Суть гри полягає в тому, що учасникам показують троє замкнених дверей і повідомляють, що за одними дверима стоїть новенький автомобіль, а за двома іншими – кози.
Пропонується вибрати одні з дверей. Коли гравець робить свій вибір, ведучий, який знає, де автомобіль, відчиняє двері,

але за ними знаходиться коза. Він запитує у гравця, чи хоче той змінити свій вибір *(рис. 26)*. Постає питання, чи варто змінювати свій вибір. Ведучий має поцікавитися думкою інших учасників.

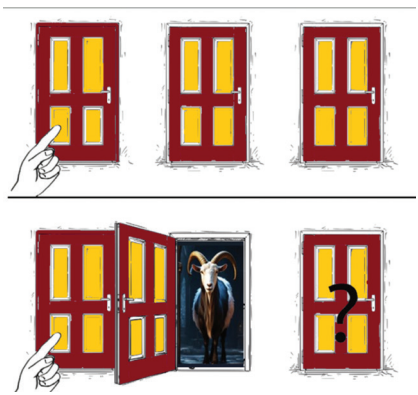


Рис. 26. Гра «Let's Make a Deal»

Нехай кожен гравець по черзі стає ведучим шоу «Let's Make a Deal» і ховає предмет лише в одній зі шкатулок. Ведучий починає гру з іншим гравцем. Результати кожної гри записують на дошці: чи вибір був змінений, і хто переміг. Далі інший гравець стає ведучим і запрошує ще одного гравця до участі. Якщо ігри проведені за правилами, то стратегія зміни шкатулки має бути виграшною.

Запитання: чому це так? Що підказує вихованцям інтуїція? Можливо, в будь-якому разі ймовірність виграти є 1/3? І це найбільша помилка тих, хто бере участь у грі. Треба запитати себе: а що ж мені дає той факт, що ведучий, знаючи, де розміщені кози, а де автомобіль, відчинив двері з козою? Чи змінило це мої шанси на виграш? Виявляється, так! Змінило! Ймовірність виграти автомобіль зросла вдвічі, і правильною відповіддю на запитання гри є «так, потрібно вибирати інші замкнені двері».

Тепер пояснимо, чому так відбувається. Під час вибору дверей навмання ймовірність указати на двері, за якими автомобіль,

дорівнює 1/3 (автомобіль один, дверей троє). Отже, ймовірність того, що автомобіль за одними з двох інших дверей, дорівнює 2/3. Коли ведучий відчиняє двері з козою, імовірність 2/3 припадає на останні двері, на які й потрібно змінити свій вибір глядачеві.

Публікації за темою парадокс Монті Голла:

ПОРАДА 16.
Поміркувати про кліматичні зміни з математичної точки зору

Джерело
Танення льоду та порядки величин. URL: https://static.idm314.org/resources/activities/idm-earth-questions-uk.pdf (дата звернення: 01.02.2024).

Короткий опис

Ця активність передбачає обговорення великих проблем планети Земля, ознайомлення учасників із деякими методами пошуку відповідей на ці виклики.

Учасники

Діти віком від 12 років.

Тривалість
60 хвилин.

Мета

Обговорити проблеми, пов'язані з нашою планетою, визначити можливі способи їх розв'язання з використанням математичної та стратегічної точок зору.

Підготовка

Ознайомитися з темою та поданими нижче ресурсами; знайти цікаві дані для повідомлення учням; підготувати демонстраційні матеріали: склянки з водою і лід.

Обговорення

Танення льоду: що станеться, якщо крижані шапки планети повністю розтануть? Педагог розповідає, що це гіпотетичний сценарій, створений для того, щоби потренувати математичні навички, застосувати знання з фізики та знання про Землю. Далі ознайомлює з дослідженнями вчених минулого століття, які засвідчили, що середній рівень моря піднявся приблизно на 16–21 см й очікується, що протягом цього століття він підніметься ще приблизно на 50 см – 1 м. Такі дані викликають зане-

покоєння і потребують уваги. Пропонується розглянути можливість виникнення надзвичайних ситуацій.

Що перше спадає вам на думку?
Варто почати з такого запитання: «Як ви гадаєте, що буде, якщо рівень океану підніметься на 2 м?». Заохочуйте учнів творчо підійти до пошуку відповідей. Чи зміниться берегова лінія? Що буде з прибережними містами? Чи виникнуть проблеми з виробництвом продуктів харчування? Якими будуть економічні наслідки? Чи змінять річки своє русло? Що трапиться із фауною?

Мета: спонукати учнів до обдумування проблеми, а не давати відповідь відразу (можна запропонувати більше інформації [12]). Змініть числа в самому запитанні. Що буде, якщо рівень океану підніметься на 5 см? А якщо на 10 м?

Що трапиться, якщо розтане лід на Північному полюсі?
Запитайте в учнів, що сталося б, якби лід на Північному полюсі розтанув. Дайте час, щоб вони обдумали відповіді. Потім нагадайте їм, що крижана шапка Північного полюса – це крижана маса, яка плаває в океані (ми не розглядаємо Гренландію як частину крижаної шапки). Запропонуйте знайти відповідь, якщо уявити, що є до країв наповнена водою склянка, тому вона не може вмістити більше води. У воді плаває кубик льоду. Більшість льоду перебуває під водою, але є частина над її поверхнею. Тоді уявимо, що склянка з водою і льодом залишається кімнатної температури, поки лід не розтане. Що станеться? Вода виливатиметься через край склянки чи навпаки – її рівень знизиться?

Запитання
Що станеться з рівнем моря, якщо крижана шапка на Північному полюсі розтане?

Відповідь:

Рівень моря залишиться таким самим. У прикладі з кубиком льоду, який плаває в склянці, рівень залишатиметься таким самим, вода не виливатиметься. Пояснення цього ґрунтується на законі Архімеда. Тому, якби крижана шапка Північного полюса розтанула, рівень Світового океану залишився б таким самим.

А якщо льодові шапки Південного полюса розтануть?
На Південному полюсі крижана шапка перебуває над сушею – Антарктидою. Тому, якби антарктичний лід розтанув, то до океану додалося б багато води. Попросіть вихованців визначити, наскільки піднявся б рівень моря. Щоб вирішити це завдання, потрібні дані. Розпочніть дискусію про те, які дані (й формули) потрібно знати. Запропонуйте пошукати ці дані самостійно в інтернеті або надайте ті, що написані нижче.

Задача
Лід в Антарктиді має площу 14 млн км^2 і середню товщину 2 км. Землю можна вважати кулею радіусом 6371 км, на 70 % заповненою водою. Вода щільніша за лід, 1 м^3 льоду дорівнює 0,9 м^3 води. Якщо весь лід над сушею Антарктиди розтане, наскільки підвищиться рівень моря?

Розв'язання
Об'єм льоду на суші Антарктики становить

$$14 \text{ млн км}^2 \times 2 \text{ км} = 28 \text{ млн км}^3 \text{ льоду.}$$

Якби цей лід розтанув, він би перетворився на
28 млн км^3 льоду × (0,9 м^3 води / 1 м^3 льоду) = 252 млн км^3 води.
З іншого боку, поверхня Землі має площу

$$4 \times \pi \times r^2 \text{ (радіус}^2\text{)} = 4 \times 3{,}1416 \times (6371 \text{ км})^2 = 510 \text{ млн км}^2.$$

Якщо лише 70 % цієї поверхні становить вода, це дає нам поверхню для океанів

$$510 \text{ млн км}^2 \times 0{,}7 = 357 \text{ млн км}^2.$$

Тепер можна припустити, що весь розмерзлий лід буде накопичуватися на тій самій поверхні, що й океани. Оскільки об'єм дорівнює площі поверхні, помноженій на висоту,

$$\text{об'єм} = \text{площа} \times \text{висота},$$

то підвищення висоти рівня моря є часткою доданого об'єму води, поділеного на поверхню океанів:

$$h = 25{,}2 \text{ млн км}^3 / 357 \text{ млн км}^2 = 0{,}0705 \text{ км} = 70 \text{ м}.$$

Отже, за нашими оцінками, якби весь лід в Антарктиді розтанув, рівень океану піднявся б приблизно на 70 м.

Що можна зробити? Один із варіантів – урахувати, що не вся вода буде накопичуватися в океані, бо частина її розтечеться на рівнинах.

Запитання

Припустимо, що близько 10 % суші буде затоплено, а середня висота цього затопленого регіону становить 10 м. На скільки метрів підніметься рівень океану? Ці два числа взяті випадково; змініть їх, щоб побачити, чи суттєво зміниться результат.

Відповідь:

Поверхня суші становить 30 % поверхні Землі:

$$510 \text{ млн км}^2 \times 0{,}3 = 153 \text{ млн км}^2.$$

Тепер ми маємо 10 % суші, тобто

$$153 \text{ млн км}^2 \times 0{,}1 = 15{,}3 \text{ млн км}^2.$$

Оскільки ця затоплена територія має середню висоту 10 м, це означає, що середня висота води над нею буде h – 0,01 км. Рельєф затопленої території не має значення, оскільки ми знаємо, що середня висота становить 10 м.

Тепер об'єм води розраховується так:

$$\text{об'єм} = \text{площа океанів} \times h + \text{площа затоплених територій} \times (h - 0{,}01 \text{ км}).$$

Об'єм води і площа океанів такі самі, як і в попередньому прикладі. Розв'язання для h дає h = 68 м. Отже, різниця дуже невелика. Це не дивно: 10 % суші – це лише 3 % поверхні Землі. Ми можемо «грати» із цими двома значеннями як з параметрами. У крайньому разі, якби вся суша мала нульову висоту, підйом усе одно був би 49,4 м, тобто дуже високим.

У джерелі [12] є відповідь про підвищення рівня моря на 73,32 м. Імовірно, там використані більш точні дані. Остаточний результат – підвищення рівня моря на 80,32 м, якщо врахувати Гренландію та всі інші льодовики на Землі.

Як ми зазначали раніше, це малоймовірна катастрофа. Прогнозується підвищення рівня моря на 30 см до кінця століття. Іншим фактором, який суттєво впливає на рівень моря, є теплове розширення води через підвищення температури. Воно не лише спричиняє танення льодовиків, а й прискорює підвищення рівня моря.

Додаткові матеріали

1. Презентація про сучасні дослідження щодо танення льодовикових шапок:

2. Матеріали про підвищення рівня моря:

3. Картографічний застосунок для спостереження за частинами світу, які можуть бути покриті водою після підвищення рівня моря:

ПОРАДА 17.
Поміркувати про порядки величин у питаннях про Землю та людство

Джерело
Танення льоду та порядки величин. URL: https://static.idm314.org/resources/activities/idm-earth-questions-uk.pdf (дата звернення: 01.02.2024).

Короткий опис
Обговорення проблеми у великих масштабах та підходів до її розв'язання.

Учасники
Діти віком від 12 років.

Тривалість
60 хвилин.

Мета
Навчати учасників знаходити відповіді на питання щодо масштабних проблем, про які недостатньо даних.

Огляд
Як ми можемо оцінити будь-яку глобальну проблему, коли маємо недостатньо даних або вони відсутні взагалі? Так буває тому, що масштаб проблеми занадто великий (наприклад, уся планета) або занадто малий (місто, школа), а ніхто не збирав дані про неї. Іноді даних немає, тому що неможливо визначити точну кількість об'єктів (наприклад, будинків або дерев на планеті) або необхідну кількість чого-небудь для вирішення завдання (скільки дерев потрібно, щоби поглинути поточні викиди CO_2). Для розв'язання таких проблем ми шукаємо лише приблизну оцінку порядку величини відповіді. Такі оцінки часто називають оцінками Фермі. Існує багато прийомів, які можна використовувати, щоб дати відповіді на ці запитання. У цій активності ознайомимося з однією з технік і застосуємо її для пошуку відповідей на деякі пов'язані з планетою Земля екологічні питання.

1. Запитання для розминки

Попросіть учнів знайти відповіді на запитання:

Скільки їжі споживається людством за один день?

Скільки сміття додається за один день на планеті?

Скільки літрів води потрібно на день лише для споживання людьми (за винятком промисловості та сільського господарства)?

Відповідаючи, учні мають використати власний досвід (скільки їжі я з'їдаю щодня, скільки сміття викидаю тощо). Можна надати їм дані про кількість населення у світі (7,8 млрд). Поставте запитання про варіативність цього числа. Чи однакове споживання їжі на одну людину в усьому світі? А як щодо сміття? А як щодо промислових відходів? Їх більше чи менше за сміття, яке викидають люди? В інтернеті можна знайти деякі «офіційні» відповіді на ці запитання. Обговорення варто почати після надання відповідей.

2. Запитання з неповною інформацією

Поставте учням запитання, що потребують пошуку даних із різних джерел та простих оцінок:

Скільки літрів води використовується школою (будівлею, в якій ми перебуваємо) щотижня?

Скільки травинок на футбольному полі, спортивному майданчику, в саду, парку тощо?

Скільки CO_2 видихають усі учні школи за день / учасники нашої активності за хвилину тощо?

3. Запитання щодо актуальних проблем нашого життя

Поставте запитання:

Як ви гадаєте, який об'єм усіх пластикових пляшок щодня потрапляє в океан?

Нехай учні визначають способи розв'язання проблеми (за потреби педагог допомагає).

Запитання, які можуть виникнути:

Який порядок величини? Кілограми? Тонни? Мільйони тонн? Мільярди тонн?

Скільки пластику виробляє людство за рік? Яка його частина потрапляє в океан?

Припустимо, що пластик, який не переробляється, а неправильно обробляється, надходить лише з особистого споживання, а не від промисловості. Спробуйте оцінити, скільки пластику споживає людина, і помножити на кількість населення.

Скільки людей живе в прибережних районах (країнах з узбережжям)?

Ви можете припустити, що тільки країни з узбережжям забруднюють океани.

Для кожного кроку можна спробувати зробити припущення або знайти інформацію в інтернеті.
Мета дискусії полягає в тому, щоб спонукати учасників обговорити величини та їх співвідношення. Через деякий час попросіть їх дійти до спільного числа. Скористайтеся покликанням на статтю [10], щоб дати більш точну відповідь: від 4,8 до 12,7 млн тонн пластикового сміття, викинутого в океан у 2010 році, з перспективою зростання на порядок (тобто в 10 разів) до 2025 року, якщо не буде вжито жодних заходів. Обов'язково обговоріть можливі наслідки забруднення океанів.

Поділіться своїми запитаннями, роздумами, результатами обговорення в соцмережах, використовуючи хештеги #idm314earth та #idm314.

Додаткові матеріали

1. Освітні ресурси з кліматології (проєкт TROP-ICSU):

2. Інтерактивний кліматичний симулятор:

Список ілюстрацій

С.	Рис.	Підпис до рисунка	Автор / Джерело
9	1	Гра «Ханойська вежа»	https://static.idm314.org/resources/activities/idm-tower-of-hanoi-uk.pdf Ліцензія 2022. Крістіан Руссо Creative Commons Attribution 4.0 International License
11	2	Гра «Циклічна Ханойська вежа»	https://static.idm314.org/resources/activities/idm-tower-of-hanoi-uk.pdf Ліцензія 2022. Крістіан Руссо Creative Commons Attribution 4.0 International License
14	3	Експеримент «Голки Бюффона»	ілюстрація Катерини Терлецької
19–21		Фото для активності «Математичні пошуки скарбів»	фото з особистого архіву Катерини Терлецької
25	4	Візуалізація теореми Піфагора	https://static.idm314.org/resources/activities/idm-proofs-without-words-en.pdf?v=2 Ліцензія 2022. Крістіан Руссо Creative Commons Attribution 4.0 International License
26	5	Візуалізація доведення факту, що сума кутів трикутника становить 180 градусів	https://static.idm314.org/resources/activities/idm-proofs-without-words-en.pdf?v=2 Ліцензія 2022. Крістіан Руссо Creative Commons Attribution 4.0 International License

26	6	Візуалізація доведення формули про знаходження площі кола $S = \pi r^2$	https://static.idm314.org/resources/activities/idm-proofs-without-words-en.pdf?v=2 Ліцензія 2022. Крістіан Руссо Creative Commons Attribution 4.0 International License
26	7	Доведення теореми Вівіані	https://static.idm314.org/resources/activities/idm-proofs-without-words-en.pdf?v=2 Ліцензія 2022. Крістіан Руссо Creative Commons Attribution 4.0 International License
27	8	Доведення тотожності: $A = \frac{1}{2}r(a+b+c)$	https://static.idm314.org/resources/activities/idm-proofs-without-words-en.pdf?v=2 Ліцензія 2022. Крістіан Руссо Creative Commons Attribution 4.0 International License
27	9	Доведення тотожності: $arctan\frac{1}{2} + arctan\frac{1}{3} = arctan1$	https://static.idm314.org/resources/activities/idm-proofs-without-words-en.pdf?v=2 Ліцензія 2022. Крістіан Руссо Creative Commons Attribution 4.0 International License
27	10	Доведення тотожності: $1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2$	https://static.idm314.org/resources/activities/idm-proofs-without-words-en.pdf?v=2 Ліцензія 2022. Крістіан Руссо Creative Commons Attribution 4.0 International License
28	11	Доведення тотожності: $1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$	https://static.idm314.org/resources/activities/idm-proofs-without-words-en.pdf?v=2 Ліцензія 2022. Крістіан Руссо Creative Commons Attribution 4.0 International License

28	12	Доведення тотожності: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}(n \times (n+1))^2$	https://static.idm314.org/resources/activities/idm-proofs-without-words-en.pdf?v=2 Ліцензія 2022. Крістіан Руссо Creative Commons Attribution 4.0 International License
28	13	Доведення тотожності: $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$	https://static.idm314.org/resources/activities/idm-proofs-without-words-en.pdf?v=2 Ліцензія 2022. Крістіан Руссо Creative Commons Attribution 4.0 International License
29	14	Доведення тотожності: $\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \left(\frac{1}{4}\right)^4 + \cdots$	https://static.idm314.org/resources/activities/idm-proofs-without-words-en.pdf?v=2 Ліцензія 2022. Крістіан Руссо Creative Commons Attribution 4.0 International License
29	15	Доведення тотожності: $\frac{1}{5} = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \times \frac{4}{9} + \frac{1}{9} \times \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \frac{1}{9} \times \left(\frac{4}{9}\right)^3 + \cdots$	https://static.idm314.org/resources/activities/idm-proofs-without-words-en.pdf?v=2 Ліцензія 2022. Крістіан Руссо Creative Commons Attribution 4.0 International License
33	16	Елементи фігури з парадокса «Зникнення клітинки»	https://en.wikipedia.org/wiki/Missing_square_puzzle
34	17	Парадокс «Зникнення клітинки»	https://en.wikipedia.org/wiki/Missing_square_puzzle
36	18	Ребуси з використанням числа π (частина 1)	ілюстрація Сергія Веденського
37	19	Ребуси з використанням числа π (частина 2)	ілюстрація Сергія Веденського
38	20	Поле для «математичної переправи» для команд із п'яти учасників	ілюстрація Катерини Терлецької

39	21	Поле для «математичної переправи» для команд із шести учасників	ілюстрація Катерини Терлецької
42	22	Побудова єгипетського трикутника	ілюстрація Катерини Терлецької
44	23	Магічні таблиці	ілюстрація Сергія Веденського [7, с. 303, рис. 131]
45	24	Розгадка фокуса з магічними таблицями	ілюстрація Катерини Терлецької
49	25	Проведення гри «Хрестики-нулики»	фото з особистого архіву Катерини Терлецької [7, с. 286, рис. 114]
53	26	Гра «Let's Make a Deal»	ілюстрація Катерини Терлецької

Список використаних джерел

1. Голки Бюффона. URL: https://static.idm314.org/resources/activities/idm-buffons-needles-uk.pdf (дата звернення: 01.02.2024).

2. Доведення без слів. URL: https://static.idm314.org/resources/activities/idm-proofs-without-words-en.pdf?v=2 (дата звернення: 01.02.2024).

3. Математичний онлайн-марафон МАН 2021. URL: https://www.youtube.com/watch?v=aLPbeH7apBU (дата звернення: 01.02.2024).

4. Математичні пошуки скарбів. URL: https://static.idm314.org/resources/activities/idm-scavenger-hunt-uk.pdf (дата звернення: 01.02.2024).

5. Міжнародний день математики. URL: https://www.idm314.org/ (дата звернення: 01.02.2024).

6. Танення льоду та порядки величин. URL: https://static.idm314.org/resources/activities/idm-earth-questions-uk.pdf (дата звернення: 01.02.2024).

7. Навчання на основі головоломок : навч.-метод. посіб. / уклад.: К. В. Терлецька, К. О. Антошина ; за ред. С. О. Довгого. Київ : Національний центр «Мала академія наук України», 2024. 364 с.

8. Ханойська вежа та вежа Стокмайера. URL: https://static.idm314.org/resources/activities/idm-tower-of-hanoi-uk.pdf (дата звернення: 01.02.2024).

9. Хаотичні танці. URL: https://static.idm314.org/resources/activities/idm-chaotic-dancing-uk.pdf (дата звернення: 01.02.2024).

10. Plastic waste inputs from land into the ocean / J. R. Jambeck et al. *Science*. 2015. Vol. 347. Issue 6223. Pp. 768–771. DOI: https://doi.org/10.1126/science.1260352.

11. Ledoux A. Concours résultats complets. Les victimes se sont plu à jouer le 14 d'atout. *Jeux & Stratégie*. 1981. Vol. 2. № 10. Pp. 10–11.

12. Mc Granahan G., Balk D., Anderson B. The rising tide: Assessing the risks of climate change and human settlements in low elevation coastal zones. *Environment & Urbanization*. 2007. Vol. 19. Pp. 17–37. DOI: https://doi.org/10.1177/0956247807076960.

13. Mises Von R. Über Aufteilungs- und Besetzungswahrscheinlichkeiten. *Revue de la faculté des sciences de l'Université d'Istanbul*. 1939. Vol. 4. Pp. 145–163.

14. Stockmeyer Paul K. Variations of the Four-Post Tower of Hanoi Puzzle. Proceedings of the Twenty-fifth Southeastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing. *Congr. Numer.* 1994. Vol. 102. Pp. 3–12.

Переклад активностей idm314 з англійської [2–7; 12] здійснювали: лабораторія математичних наук НЦ «МАНУ», студенти механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка і факультету інформаційних технологій та математики Київського столичного університету імені Бориса Грінченка.

ДЛЯ НОТАТОК

ДЛЯ НОТАТОК

Навчальне видання

3 і 14 порад, як провести день числа π

Методичні вказівки

Редагування: *І. В. Братащук, З. В. Пономаренко*
Верстання *О. А. Жупанська*
Дизайн обкладинки *К. Ю. Мацюта*

Формат 60×84 1/16. Папір офс. 80 г/м^2.
Друк цифровий. Ум. друк. арк. 4,18.
Наклад 300 прим.

Видавництво: Національний центр «Мала академія наук України»,
Кловський узвіз, буд. 8, м. Київ, 01021

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 6999 від 04.12.2019